微积分考研辅导讲义

郑州大学数学系

二〇〇三年六月

目　录

第一讲　函数，极限，连续

§1　函数极限

一、概念、定理、公式

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

2. $f_+(x_0)$　$f_-(x_0)$　　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

3.<局部保号性>　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

①若 A>B，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$

②若 $f(x)\geq g(x)$，则 $\exists\delta$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，A≥B

4. <局部有界性>　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\exists\delta>0,M>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)|\leq M$.

5. (夹逼定理)：设 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$，

　且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 A

6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$ " $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ "

$$\left[\begin{array}{l} proof \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0 \\ \qquad \Leftarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[A+\alpha(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} A+0=A \end{array}\right]$$

7.两个重要极限：

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　　②$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

8.极限运算：

9.无穷小与无穷大的关系

10.无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x)=0$　　$\lim\beta(x)=0$

(1) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$　　$\alpha(x)=o(\beta(x))$　　$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小

(2) $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$　　$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小

(3) $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$　$(c \neq 0)$　　$\alpha(x),\beta(x)$同阶无穷小

(4) $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$　　$\alpha(x),\beta(x)$等价无穷小,记　$\alpha(x) \sim \beta(x)$

(5) $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C$　$\begin{pmatrix} c \neq 0 \\ k > 0 \end{pmatrix}$　　$\alpha(x)$为$\beta(x)$的k阶无穷小

注：$x \to 0$: $\sin x \sim x$　　$\arcsin x \sim x$　　$\tan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$　　$e^x - 1 \sim x$　　$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$a^x - 1 \sim x\ln a$ $\begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$　$\arctan x \sim x$　$(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$　　$(\alpha \neq 0)$

注：1.等价无穷小在乘除运算中方可适用

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = 0 \text{ ✗ } \left(\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{但} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ✓}$$

2.在某一极限过程，$\alpha(x)$为无穷小，则

$$\alpha(x) + o(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\tan x + b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x) + d(1-e^{-x^2})} = 2,\qquad a^2 + c^2 \neq 0$$

解法①

$$\frac{ax}{c\ln(1-2x)} + \frac{b\frac{1}{2}x^2}{d(1-e^{-x^2})}$$

$$\frac{ax}{c\ln(1-2x)}$$

$$\frac{ax}{c(-2x)} + \frac{b\frac{1}{2}x^2}{d(x^2)}$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{a\frac{\tan x}{x}+b\frac{1-\cos x}{x}}{c\frac{\ln(1-2x)}{x}+d\frac{1-e^{-x^2}}{x}}$$

$$=\frac{a+b\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}}{c\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x}+d\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}}=\frac{a}{-2c}=2 \quad 则 \quad a=-4c$$

解法②

$a\tan x\sim ax$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $\ln(1-2x)\sim-2x$

$1-e^{-x^2}\sim-(-x^2)$

$c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})\sim c\ln(1-2x)\sim-2cx$

$原式=\lim_{x\to0}\frac{ax}{-2cx}=-\frac{a}{2c}$ 则$a=-4c$

11.洛必达法则，$<\frac{0}{0},\quad\frac{\infty}{\infty}>$

$f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim_{x\to x_0}f(x)=0\quad\lim_{x\to x_0}g(x)=0$

(2) $f(x),g(x)$在x_0的邻域内可导,(在x_0处可除去),$g'(x)\neq0$

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注：1.只有$(\frac{0}{0},\quad\frac{\infty}{\infty})$

2.每用完一次，将式子整理化简

3.经常将法则与等价无穷小结合使用

4.若$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在(非∞),不能推出$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在

二、极限的求法：

1. $\dfrac{0}{0}$ ①通过因式分解或根式有理化，消去“0”因子。

②洛必达法则

③变量替换

④中值定理

例 1. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ $\quad \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2}{x^2\sqrt{x^2+1}}\Big|_{x\to 0} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}$ $\quad \dfrac{\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\sec^2 x} = \sqrt{\dfrac{\sin x}{\tan x}}\cos^2 x = \cos^3 x \neq$

解: (1)原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\dfrac{1}{2}$ （采用①）

$$(2)\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}.\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}.\sec^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}.\frac{\tan x}{\sin(\tan x)}.\frac{\sin x}{\tan x}}.\cos^3 x$$
$$=1$$

习题: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{1-\cos\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 1\cdot\dfrac{\sin x}{1-\cos\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\frac{1}{2}\sqrt{x}^2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=1$

例2 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}.\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x - x\cos x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x\cdot(e^{tgx-x}-1)}{tgx-x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{tgx-x}-1}{tgx-x}\cdot e^x = \lim\limits_{x\to 0^+} 1\cdot e^0$

$$\text{解}:(1)\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x - x}.\frac{\tan x - x}{\sin x - x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\xi}.\frac{\sin x - x\cos x}{\cos x(\sin x - x\cos x)} \qquad x<\xi<\tan x$$
$$=\lim_{\xi\to 0^+}e^{\xi}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}$$
$$=1$$

或原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x[e^{\tan x-x}-1]}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x-x}{\sin x-x\cos x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos^2x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2.\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1$$

或原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x[e^{\tan x-x}-1]}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin x-x\cos x}=1$

(2)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{6}$$

(3)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2][\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}]}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}.\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1-\cos x}{[\ln(1+x)-x]\cos x}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{1}{1+x}-1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)}{-x}=-\frac{1}{2}$$

2. $(\frac{\infty}{\infty})$,①洛必达

②变量替换为 $\dfrac{0}{0}$

例3.(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$=\dfrac{\pi^2}{4}$

3. $\infty-\infty$型，①通分　②有理化　③变量替换<倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$>

例4 (1) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x})$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x\cot x}{x^2}(\dfrac{0}{0})$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\cot x+x.\dfrac{1}{\sin^2x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{x}{\sin^2x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x\cos x+x}{2x\sin^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}\sin 2x+x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\cos 2x+1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}.4x^2}{6x^2}=\dfrac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})-x]$

令 $\dfrac{1}{x}=t$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}[\dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)-\dfrac{1}{t}]=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-t}{2t(1+t)}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$

4. $0\cdot\infty$型转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$

例5 $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

令$\frac{1}{x}=t$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin x\ln(1+t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\cos[(\ln(1+3t))].\frac{3}{1+3t}-\cos[\ln(1+t)].\frac{1}{1+t}$

$=3-1$

$=2$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\ln(1+\frac{3}{x})}{\sin\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\ln(1+\frac{3}{x})\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2}}{\cos\ln(1+\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+3}\cdot 3=3\neq 1.$

$\therefore \sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})\sim\ln(1+\frac{3}{x})-\ln(1+\frac{1}{x})$

$\sim\frac{3}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2.$

5. $0^0,\infty^0,1^\infty$型,采用两边取对数法化为未定型

例6 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ (0^0)

令$\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=A$

$\ln A=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(e^x-1)}.\ln x$ $(0\cdot\infty)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$ $(\frac{\infty}{\infty})$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=1$

则 $A=e$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $\qquad \infty^0$

令$A=\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$\ln A=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}.\ln\cot x \qquad (\frac{\infty}{\infty})$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{-\frac{1}{\cot x.\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}=-1$

$\therefore A=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ $\qquad 1^\infty$

注：凡1^∞型,其底必是e,其幂可这样确定

$\lim\mu(x)=0 \qquad \lim v(x)=\infty$

$\lim(1\pm\mu(x))^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln(1\pm\mu(x))}$

$=e^{\pm\lim v(x)\mu(x)}$

即括号 1 后的变量（包括符号）与幂乘积的极限，就是1^∞型极限的幂。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}.\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

$\therefore$ 原式$=e^{-\frac{1}{6}}$

例 7　杂例

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right]$
$=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{-x}\right]=2-1=1$

故原式 $=1$

(2) $f(x)$有连续导数, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$

$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$ 当$x\to 0$时

$F'(x)$与x^k同阶无穷小, 则$k=$

解：$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt = x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt+x^2 f(x)-x^2 f(x)}{x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}} \quad \neq 0 \quad =C$$

$x^{k-3}=1$ $\quad\therefore k=3$

§1.2 数列的极限

一、概念、定理、公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2. 数列有界

注：无穷大量与无界的区别

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \Rightarrow \{x_n\}$无界, < 反之不真 >

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$

*4. 单调有界必有极限

*5.（夹逼定理）：$\exists N$，$\forall_n > N$时，　$x_n \le y_n \le z_n$，

且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，　则有

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$　则①$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$

②若$\{a_n\}$为正数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = a$

7. *Stolz*定理：　若(1)$\{y_n\}$严格递增　且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$

则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$

二、单调有界必有极限

例 1 设(1) $x_0 = 2$,　$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{2}{x_n})$　求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{2}{x_n}) \ge \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n \cdot \dfrac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{2}{x_n}) - x_n$

$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{x_n} - x_n) \le 0$

$\therefore \{x_n\}$为单减有界的数列,则必有极限,记为l

$l = \dfrac{1}{2}(l + \dfrac{2}{l})$

$\Rightarrow l = \sqrt{2}$　(负值舍去)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$

注并不是出现递推公式就一定用单调有界有极限

例 2　$x_0 = a$　$x_2 = b$　$x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$　$n = 2,3\cdots\cdots$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$解: x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}=\cdots$$

$$=\frac{x_2-x_1}{(-2)^{n-1}}=\frac{x_1-x_0}{(-2)^n}=\frac{b-a}{(-2)^n}$$

$$及\ x_{n+1}=\sum_{m=0}^{n}(x_{m+1}-x_m)+x_0$$

$$=(b-a)\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(-2)^m}+a$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{b-a}{1-(-\frac{1}{2})}+a=\frac{a+2b}{3}$$

三、 n项和，当$n\to\infty$时的极限

a．利用定积分定义求极限 b．利用夹逼定理

[提示]：（1）n 个项按递增或递减排列，则用夹逼定理

（2）若每一项可提一个$\frac{1}{n}$,提出$\frac{1}{n}$后剩下的可表示为一个通式，则用定积分定义。

例 3（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$

$$(5)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

解：$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{n}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx$$ 《令$\sqrt{1+x}=t$》 则 $1\le t\le\sqrt{2}$　$x=t^2-1$　$dx=2tdt$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt$$

$$=2\int_1^{\sqrt{2}}(t^4-t^2)$$

$$=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=2\cdot\left[\frac{1}{5}\cdot4\sqrt{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{4}{15}[\sqrt{2}+1]$$

$$(2)\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

故原式$=1$

$$(3)\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{-\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$(4)\frac{1}{n+1}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right]<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}$$

故原式 $=\dfrac{2}{\pi}$

习题

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ $(\ln 2)$ ↳夹逼准则

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\cdots+n^p)$ $(p\geq 0)$ $\left(\frac{1}{p+1}\right)$ ↳定积分定义

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{1}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\right)$ $(\sin 1)$ ↳定积分定义.

四、n 项乘积

a. 夹逼定理

b. 利用对数恒等式化为 n 项和形式

例4 (1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$

(1) $\because 1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$

$\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{6}{5}$

$\therefore$ 原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln n^n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n-1)]-\ln n^n}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots\ln(1+\frac{n-1}{n})]}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\ln(1+\frac{i}{n})}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=e^{2\ln 2-1}$

$=\frac{4}{e}$

五、利用洛必达法则计算数列极限

例 5　$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$　　1^{∞}

$$=\lim_{x\to\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}[1+(x\tan\frac{1}{x}-1)]^{x^2}$$

$$\because \lim_{x\to\infty}(x\tan\frac{1}{x}-1)\cdot x^2$$

令 $\frac{1}{x}=t$　$\lim\limits_{t\to0}[\frac{1}{t}\tan t-1]\cdot\frac{1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan t-t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\tan^2 t}{3t^2}$$

$$=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{3}}$

§1.3 函数的连续性

（一）概念、定理

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$

[a,b]连续 $\Leftrightarrow$ (a,b)连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$且$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$

左右连续

2、间断点：

第一类：$f_+(x_0)$，$f_-(x_0)$都存在

①$f_+(x_0)\neq f_-(x_0)$ 跳跃间断点

②$f_+(x_0)=f_-(x_0)\neq f(x_0)$（或 f 在 x_0 无定义）可去间断点

第二类：$f_+(x_0)$ $f_-(x_0)$至少有一个不存在

若有一为无穷间断点，称无穷间断点

3．闭区间上连续函数的性质

例 1.间断点的求法：

$$(1)f(x)=\begin{cases}x-1 & -1\le x<0\\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & -1\le x<0\\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1\end{cases}$$

（若 $f(x)$ 是分段函数，则判别分界点的极限）