

PHYSICS

物理学同步辅导

(适用少学时专业)

主编 徐力



物理学同步辅导

(适用少学时专业)

主编 徐力



图书在版编目(CIP)数据

物理学同步辅导 / 徐力主编. —天津: 天津大学出版社, 2009. 11

适用少学时专业

ISBN 978-7-5618-3262-2

I. ①物… II. ①徐… III. ①物理学 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. ①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 192152 号

出版发行 天津大学出版社

出版人 杨欢

地址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)

电话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742

网址 www.tjup.com

印刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司

经销 全国各地新华书店

开本 169mm × 239mm

印张 17

字数 363 千

版次 2009 年 11 月第 1 版

印次 2009 年 11 月第 1 次

印数 1 - 3 000

定价 28.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

本书是与刘永胜教授主编的《物理学》(第2版)配套的学习指导书。在本书编写过程中,依托于教材的基本内容,充分体现了其中的基本要求。读者通过本辅导书的学习,可对教材中的内容有更深刻的理解和认识,从而学好物理学。

物理学作为一门基础理论科学,其重要性随着科学技术的发展而日益明显。许多边缘学科都是以物理规律为基础而发展起来的,所以理工科学生只有打好物理学基础,才有可能在专业课学习及科研新领域开拓中获得较大的成就。为了使广大学生学好物理学,本书根据学生在学习物理时所存在的问题和需求,每章都有基本概念和规律、基本要求、典型例题、同步练习习题解答、自测题等内容,力求让学生了解每一章的要求,掌握解题的思路,做好课后练习,并根据各章的知识点进行自我检测。相信本书会对广大读者有所启迪与帮助。

本书由王丽艳(第1章、第2章、第3章)、韩丽萍(第4章、第5章)、段秀丽(第6章、第7章)、杨帅(第8章、第9章)、许照锦(第10章、第11章)、李洪国(第12章、第13章、第14章)、徐力(第15章、第16章)编写。全书由徐力进行统稿和修改。刘永胜教授指导了本书的编写工作并审阅了全书。

由于编者水平所限,错误和不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者
2009年3月

目 录

第 1 章 质点运动学	(1)
一、基本概念和规律	(1)
二、基本要求	(6)
三、典型例题	(6)
四、同步练习习题解答	(11)
五、自测题	(16)
第 2 章 质点动力学	(18)
一、基本概念和规律	(18)
二、基本要求	(22)
三、典型例题	(22)
四、同步练习习题解答	(27)
五、自测题	(35)
第 3 章 刚体定轴转动	(37)
一、基本概念和规律	(37)
二、基本要求	(41)
三、典型例题	(41)
四、同步练习习题解答	(47)
五、自测题	(54)
第 4 章 气体动理论	(58)
一、基本概念和规律	(58)
二、基本要求	(60)
三、典型例题	(61)
四、同步练习习题解答	(64)
五、自测题	(69)
第 5 章 热力学基础	(71)
一、基本概念和规律	(71)
二、基本要求	(74)
三、典型例题	(74)
四、同步练习习题解答	(80)
五、自测题	(87)
第 6 章 静电场	(90)
一、基本概念和规律	(90)

二、基本要求	(92)
三、典型例题	(92)
四、同步练习习题解答	(98)
五、自测题	(107)
第7章 静电场中的导体和电介质	(110)
一、基本概念和规律	(110)
二、基本要求	(111)
三、典型例题	(111)
四、同步练习习题解答	(116)
五、自测题	(124)
第8章 恒定电流的磁场	(127)
一、基本概念和规律	(127)
二、基本要求	(130)
三、典型例题	(131)
四、同步练习习题解答	(136)
五、自测题	(146)
第9章 电磁感应	(149)
一、基本概念和规律	(149)
二、基本要求	(150)
三、典型例题	(151)
四、同步练习习题解答	(156)
五、自测题	(164)
第10章 机械振动	(167)
一、基本概念和规律	(167)
二、基本要求	(169)
三、典型例题	(170)
四、同步练习习题解答	(173)
五、自测题	(184)
第11章 机械波	(187)
一、基本概念和规律	(187)
二、基本要求	(192)
三、典型例题	(192)
四、同步练习习题解答	(198)
五、自测题	(210)
第12章 光的干涉	(213)
一、基本概念和规律	(213)
二、基本要求	(214)

三、典型例题	(215)
四、同步练习习题解答	(216)
五、自测题	(221)
第 13 章 光的衍射	(224)
一、基本概念和规律	(224)
二、基本要求	(226)
三、典型例题	(226)
四、同步练习习题解答	(229)
五、自测题	(232)
第 14 章 光的偏振	(235)
一、基本概念和规律	(235)
二、基本要求	(236)
三、典型例题	(236)
四、同步练习习题解答	(238)
五、自测题	(242)
第 15 章 狭义相对论基础	(245)
一、基本概念和规律	(245)
二、基本要求	(246)
三、典型例题	(246)
四、同步练习习题解答	(248)
五、自测题	(251)
第 16 章 近代物理初步	(253)
一、基本概念和规律	(253)
二、基本要求	(254)
三、典型例题	(255)
四、同步练习习题解答	(257)
五、自测题	(262)

第1章 质点运动学

一、基本概念和规律

1. 基本概念

(1) 参考系

描述物体机械运动时被选作参考的其他物体,称为参考系。

由于自然界中物体的运动是绝对的,物体运动的描述是相对的,所以在研究物体的运动时必须引入参考系。为定量描述物体运动,需在参考系上建立坐标系。常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系和自然坐标系等。

(2) 描述质点运动的物理量

本章以物体的理想模型——质点为研究对象,描述其机械运动。机械运动指物体位置的变化,所以要描述质点的运动,首先需要确定质点的位置;质点在运动过程中,位置不断改变;不同的质点,位置变化快慢和方向不同,即运动快慢和方向不同;运动快慢和方向也可能在运动过程中发生改变。这些分别用物理量位置矢量、位移、速度、加速度描述。

1) 位置矢量

位置矢量用来描述质点在空间的位置,是从坐标原点指向质点所在位置的矢量,物理符号为 r ,简称位矢。

在直角坐标系中

$$r = xi + yj + zk$$

其大小为

$$r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

方向用方向余弦表示:与 x 轴夹角余弦 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$;与 y 轴夹角余弦 $\cos \beta = \frac{y}{r}$;与 z 轴夹角余弦 $\cos \gamma = \frac{z}{r}$ 。

位矢既有大小又有方向,具有矢量性。

质点运动时,位置随时间改变,位矢随之发生变化,因此,位矢具有瞬时性。

选择不同的参考系,虽然质点在空间的位置不变,但是描述质点位置的位矢的大小和方向却发生了变化。因此,位矢又具有相对性。

2) 位移

位移是描述质点一段时间内位置改变大小和方向的物理量,是从起点位置指向

终点位置的有向线段,即质点位矢的增量

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

在直角坐标系中,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= [x(t + \Delta t) - x(t)]\mathbf{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)]\mathbf{j} \\ &= \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} \end{aligned}$$

其大小为

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

方向:由初位置指向末位置。

位移是矢量,既有大小又有方向。

位移不具有相对性。

注意区别:

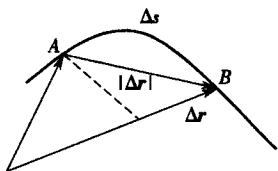


图 1-1

①位移与路程如图 1-1 所示,位移是矢量。路程指质点运动所经历的轨迹的长度,是标量。在一段时间内,位移大小不等于路程,即

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$$

但在极限情况 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,即 dt 时间内,某一时刻质点所在位置处切线、弦和弧三线合一,则位移和路程相等,即

$$|d\mathbf{r}| = ds$$

②位矢增量的大小和位矢大小的增量如图 1-1 所示,位矢增量的大小即位移大小 $|\Delta \mathbf{r}|$,沿弦线方向位矢大小的增量为 Δr ,沿径向则

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r, |d\mathbf{r}| \neq dr$$

3) 速度和速率

I. 速度

描述质点位置变化的快慢与方向的物理量称为速度,速度是矢量,具有瞬时性和相对性。

①平均速度:描述质点在一段时间内位置变化的平均快慢和方向,表示为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

其大小为

$$|\bar{\mathbf{v}}| = \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right|$$

方向:与位移方向相同。

②瞬时速度:描述质点某一时刻位置变化的快慢和方向,表示为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

在直角坐标系中(以二维平面运动为例):

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt} \boldsymbol{j} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$$

其大小为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

方向:与 x 轴夹角 $\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x}$ 。

II. 速率

速率是描述质点位置变化快慢的物理量,是标量。

平均速率

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

瞬时速率

$$v = \frac{ds}{dt}$$

注意区别:平均速度大小和平均速率大小。

$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \right| \neq \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \bar{v}$$

即平均速度的大小不等于平均速率。

$$|\boldsymbol{v}| = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = v$$

即瞬时速度的大小等于瞬时速率。

4) 加速度

描述质点速度变化的大小和方向的物理量,是矢量,具有瞬时性和相对性。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2}$$

在直角坐标系中(以二维平面运动为例):

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} = \frac{dv_x}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt} \boldsymbol{j} = \frac{d^2 x}{dt^2} \boldsymbol{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \boldsymbol{j}$$

其大小为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

方向:与 x 轴夹角 $\alpha = \arctan \frac{a_y}{a_x}$ 。

(3) 运动方程与轨迹方程

1) 运动学方程

质点的位置随时间变化的函数式,称为质点的运动学方程。它可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

在直角坐标系中,矢量表达式为

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

分量表达式为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

位置矢量给出的是质点运动过程中某一时刻的位置, 而由运动学方程可求出任意时刻的位置。运动学的重要任务之一就是找出各种具体运动所遵循的运动方程, 从而进一步判断运动情况, 如某一时刻的位置、速度和加速度。

2) 轨迹方程

运动质点在空间经过的路径所满足的方程, 称为轨迹方程。

运动学方程在直角坐标系中的分量表达式即为轨迹方程的参量方程, 从中消去时间参量 t 即得轨迹方程。

(4) 圆周运动的描述

质点作圆周运动时, 始终沿圆周循环往复运动, 在运动过程中质点到圆心的距离始终不变。由于这种运动轨迹的特点, 分别在自然坐标系和极坐标系中用如下方法描述圆周运动。

1) 线量描述

①位置用从计时时刻质点所在位置开始的弧长描述, 物理符号为 s 。

②运动学方程: s 随时间变化的函数式, 从中可求质点任一时刻的位置。

$$s = s(t)$$

③线速度即速度, 大小为

$$v = \frac{ds}{dt}$$

方向: 始终沿切线方向。

④加速度: 在自然坐标系中描述质点圆周运动比较方便, 可表示为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$$

其中, 切向加速度描述速度大小的变化, 有

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t$$

大小为

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

方向: 始终沿切线方向。

法向加速度描述速度方向的变化, 有

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R} \boldsymbol{e}_n$$

大小为

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

方向:始终指向圆心。

2) 角量描述

如图 1-2 所示,以圆心为坐标原点,建立 Ox 轴,则由径矢 r 与 Ox 之间的夹角 θ 可以完全确定质点的位置。

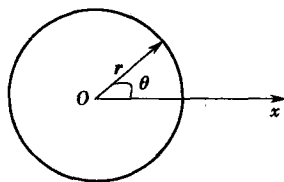


图 1-2

①角位置(角坐标):描述质点某一时刻的位置,物理符号为 θ ,单位 rad。

注意: θ 有正负。一般选择逆时针方向为运动正方向,即质点逆时针方向运动时, $\theta > 0$;反之, $\theta < 0$ 。

②运动学方程: θ 随时间变化的函数式,从中可求质点任一时刻的位置,即

$$\theta = \theta(t)$$

③角速度:角坐标随时间的变化率,即

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

④角加速度:角速度随时间的变化率,即

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角量和线量关系:

$$s = R\theta, v = R\omega, a_t = R\beta, a_n = R\omega^2$$

(5) 一般曲线运动的加速度

一般曲线运动的加速度如图 1-3 所示,表达式为

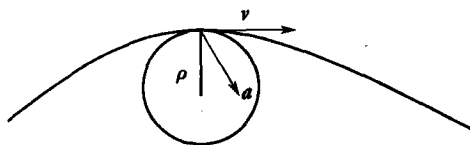


图 1-3

$$a = a_t e_t + a_n e_n = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{\rho} e_n$$

其中 ρ 为质点运动轨迹上某点的瞬时曲率半径,加速度方向指向轨迹曲线凹侧。

2. 几种简单运动的规律

(1) 匀加速运动

$$a = \text{常量}$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

(2) 斜抛运动

直角坐标系中:

$$a_x = 0, a_y = -g$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0, v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

$$x = v_0 t \cos \theta_0, y = v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\mathbf{r} = (v_0 t \cos \theta_0) \mathbf{i} + (v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2) \mathbf{j}$$

(3) 圆周运动

1) 匀速率圆周运动

$$\beta = 0$$

$$a_t = 0, a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t$$

2) 匀变速率圆周运动

$$a_t = \text{常量}, \beta = \text{常量}$$

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

3. 运动学的两类问题

① 已知运动方程, 求速度和加速度, 用微分法。

② 已知速度、加速度, 求运动方程, 用积分法。

二、基本要求

① 熟悉描述质点运动物理量的定义及其矢量性、相对性和瞬时性。

② 掌握运动方程的物理意义, 会用微积分方法求解一维运动学的两类问题。

③ 理解平面抛体运动和圆周运动的规律, 会圆周运动的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度的简单计算。

三、典型例题

例 1 已知一质点的运动学方程为

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j} \quad (\text{SI})$$

试求: (1) 从 $t = 1 \text{ s}$ 到 $t = 2 \text{ s}$ 质点的平均速度大小;

(2) $t = 2 \text{ s}$ 时质点的速度和加速度;

(3) 质点的轨迹方程。

分析 已知运动学方程, 对位矢求导, 即可得质点运动的速度和加速度。在求平

均速度大小时需要注意, 平均速度大小 $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \frac{\Delta|\mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|}{\Delta t}$ 。运动学方程在直角

坐标系中的分量表达式即为轨迹方程的参数方程,消去时间参数 t 即得轨迹方程。

解 依题意有

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (2 - t^2)\boldsymbol{j}$$

(1) 将 $t = 1 \text{ s}$ 和 $t = 2 \text{ s}$ 代入上式,有

$$\boldsymbol{r}(1) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \text{ (m)}$$

$$\boldsymbol{r}(2) = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} \text{ (m)}$$

质点位移

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(1) = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} \text{ (m)}$$

平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

其大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{2^2 + 3^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3.6 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$(2) \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -2\boldsymbol{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

当 $t = 2 \text{ s}$ 时,速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{j} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

(3) 由运动学方程

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t^2 \end{cases}$$

消去时间 t 可得轨迹方程

$$y = 2 - \frac{x^2}{4}$$

即质点轨迹为一抛物线。

例2 已知质点沿 x 轴作直线运动,其运动学方程为 $x = 3t^2 - t^3$ (SI),求:

(1) 质点在 $t = 1 \text{ s}$ 到 $t = 4 \text{ s}$ 内的平均速度;

(2) 质点在该时间内所通过的路程;

(3) $t = 1 \text{ s}$ 时的速度和加速度。

分析 例2和例1都属于运动学第一类问题,即已知运动学方程求速度和加速度,求解方法与例1相同,所不同的是,例2是一维直线运动的情况,只需处理 x 轴分量就可以了,这里需注意矢量符号的表达。另外求解位移和路程时必须注意,位移和路程是两个完全不同的概念,位移 Δx 可直接由运动方程得到: $\Delta x = x_2 - x_1$ 。求路程时容易出现的错误是认为路程等于位移大小,但实际上只有当质点作直线运动且运动方向不改变时,二者才会相等。所以需要先判断质点运动过程中有无方向改变,换

向时刻是否在所求的时间段内。若换向时刻不在所求的时间段内,则路程等于该段时间内位移大小;若换向时刻在所求的时间段内,则路程等于换向时刻前后两段时间内位移大小之和,根据 $v = \frac{dx}{dt} = 0$ 求出换向时刻 t , 路程 $\Delta s = |x_{t_1} - x_{t_2}| + |x_{t_2} - x_t|$ 。

解 依题意有

$$x = 3t^2 - t^3$$

(1) 将 $t = 1 \text{ s}$ 和 $t = 4 \text{ s}$ 代入上式,有

$$x(1) = 2 \text{ m}$$

$$x(4) = -16 \text{ m}$$

质点位移

$$\Delta x = x(4) - x(1) = -18 \text{ m}$$

平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -6 \text{ m/s}$$

负号表示平均速度方向沿 x 轴负向。

(2) 令 $v = \frac{dx}{dt} = 6t - 3t^2 = 0$, 得

$$t = 2 \text{ s} \quad (t = 0 \text{ 舍})$$

路程

$$\Delta s = |x(4) - x(2)| + |x(2) - x(1)| = 22 \text{ m}$$

(3) $v = \frac{dx}{dt} = 6t - 3t^2$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6 - 6t$$

当 $t = 1 \text{ s}$ 时,速度和加速度分别为

$$v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = 0$$

例3 质点沿直线运动,加速度 $a = 4t$ (SI), 当 $t = 3 \text{ s}$ 时, $x = 3 \text{ m}$, $v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求质点的运动方程。

分析 本题属于运动学第二类问题,即已知加速度和速度求运动方程。用积分的方法求解,积分时要注意积分上下限的确定,以及根据给定条件确定初始运动状态,从而确定积分常数。

解 由 $a = \frac{dv}{dt}$, 得

$$dv = a dt$$

两边积分

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt = \int_0^t 4t dt$$

可得

$$v = v_0 + 2t^2$$

将 $t = 3 \text{ s}$, $v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入上式, 得

$$v_0 = -15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以

$$v = -15 + 2t^2$$

由 $v = \frac{dx}{dt}$, 得

$$dx = v dt$$

两边积分

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (-15 + 2t^2) dt$$

可得

$$x = x_0 - 15t + \frac{2}{3}t^3$$

将 $t = 3 \text{ s}$, $x = 3 \text{ m}$ 代入上式, 得

$$x_0 = 30 \text{ m}$$

所以, 运动学方程为

$$x = 30 - 15t + \frac{2}{3}t^3$$

例4 一质点按规律 $s = t^3 + 2$ (SI) 作圆周运动。如果当 $t = 1 \text{ s}$ 时的总加速度大小为 $6\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 求此圆弧的半径。

分析 该题本质上是已知质点圆周运动的运动方程, 求质点的加速度, 属于运动学第一类问题, 应用求导的方法。这里给出的是圆周运动的线量描述, 在自然坐标系

中求解。 $v = \frac{ds}{dt}$, 切向加速度大小为 $a_t = \frac{dv}{dt}$, 法向加速度大小为 $a_n = \frac{v^2}{R}$, 总加速度 $\boldsymbol{a} =$

$a_t \boldsymbol{e}_t + a_n \boldsymbol{e}_n$, 加速度大小 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ 。

解 依题意, 有

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 6t$$

当 $t = 1 \text{ s}$ 时, $a_t = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{9}{R}$$

由 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{36 + \frac{81}{R^2}} = 6\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 得

$$R = 1.5 \text{ m}$$

例 5 一质点在半径为 1 m 的圆周上运动,其运动方程为 $\theta = 3 + t^3$ (SI)。求:

(1) $t = 1$ s 时质点的切向加速度和法向加速度;

(2) 切向加速度大小恰等于总加速度大小的 $\frac{1}{3}$ 时, θ 值为多少?

分析 该题同例 4,都是已知质点圆周运动的运动方程求加速度,所不同的是本题给出的是圆周运动的角量描述。对角坐标求一阶导数得到角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$,角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ 。再由角量和线量的关系 $a_t = R\beta$, $a_n = R\omega^2$,可求得质点的切向加速度和法向加速度。

解 (1) 依题意,有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 3t^2$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 6t$$

由角量和线量关系,得

$$a_t = R\beta = 6t, a_n = R\omega^2 = 9t^4$$

当 $t = 1$ s 时,

$$a_t = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, a_n = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 当 $a_t = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ 时,有

$$8a_t^2 = a_n^2$$

即 $8(6t)^2 = (9t^4)^2$

$$t^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ s}$$

代入运动方程,此时角坐标

$$\theta = 4.88 \text{ rad}$$

例 6 一球以 30 m/s 的速率水平抛射。试求 5 s 后加速度的切向分量和法向分量的大小。

分析 这是抛体运动,是二维平面曲线运动。建立平面直角坐标系,水平方向为 x 轴,竖直方向为 y 轴,分别处理两个坐标轴上的分量。球在水平方向作匀速直线运动,在竖直方向作自由落体运动,据此可求出两个方向上的速度时间表达式,从而求出速度大小的时间表达式,然后根据 $a_t = \frac{dv}{dt}$ 求出切向加速度大小。显然,总加速度大小 $a = g$,根据 $a^2 = a_t^2 + a_n^2$,可求得法向加速度大小 a_n 。

解 由 $v_x = 30 \text{ m/s}$, $v_y = gt$,可知速度大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{30^2 + (gt)^2}$$