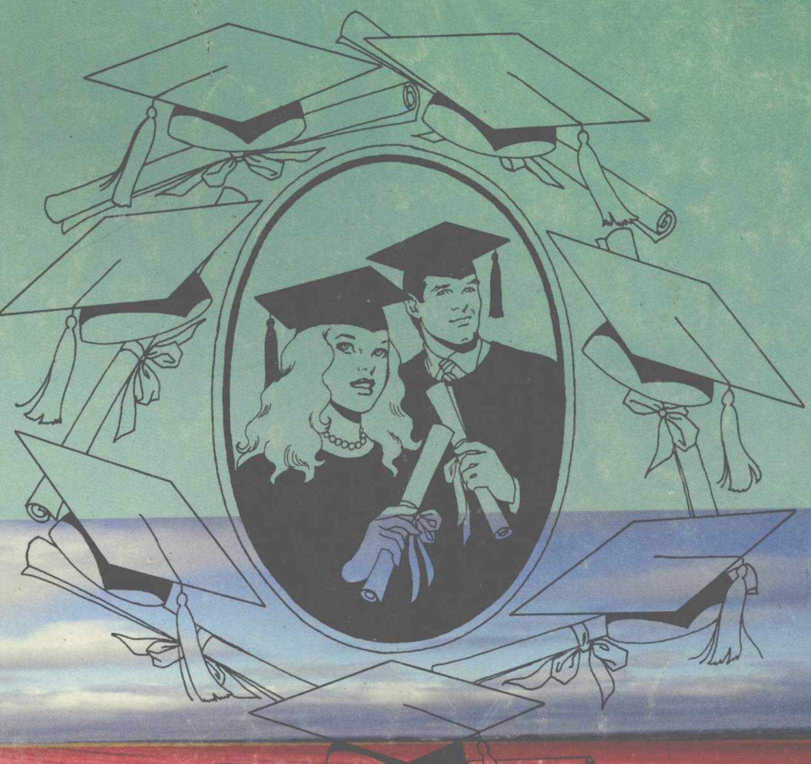
硕士研究生入学考试
辅导与强化训练

(数学·上册：基础训练)

北京大学
数学系田茂英教授编著



中国人事出版社

考研辅导教材

硕士研究生入学考试辅导与强化训练

（数学·上册：基础训练）

（含数学一至四及MBA）

主编 北京大学数学系田茂英教授

（数学试题分析组长）

编写 田茂英 张立昂

中国人事出版社

1996年5月

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试辅导与强化训练:数学/田茂英主编.
北京:中国人事出版社,1996.6
ISBN 7-80076-890-2
Ⅰ.硕…
Ⅱ.田…
Ⅲ.高等数学-练习-研究生-升学参考资料
Ⅳ.O13/44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 09825 号

责任编辑:谭东琪
封面设计:胡东华 韩 珍

硕士研究生入学考试辅导与强化训练(数学分册)
田茂英 编著
中国人事出版社出版
(100028 北京朝阳区西坝河南里 17 号楼)
新华书店经销
北京美通印刷厂印刷
*
1996 年 6 月第 1 版 1996 年 6 月第 1 次印刷
开本:787×1092 毫米 1/16 印张 42
字数:800 千字 印数:1—5000 册
ISBN 7-80076-890-2/G·263
全套(上、下册)合计 定价:58.00 元

前言：强势辅导　势在必得

为帮助参加硕士研究生入学考试考生复习迎考，了解97研考复习重点，并训练、积累足够的应试经验和技巧，结合国家教委颁布的最新考试大纲，特精心编写此套考研系列丛书。本考研丛书作者都有多年丰富教学辅导和命题经验。具体为：

一、《1997 **年硕士研究生入学考试辅导与强化训练**》，分四个分册：①**政治分册**，由北京大学中国政治与外交教研室主任林代昭教授编著，定价25元。②**英语分册**，由清华大学外语系肖立齐教授、中国人民大学王长喜教授、北京大学英语系石春祯教授等编写。分上、下两册，上册为基础训练，下册为模拟训练，合计定价50元。③**数学分册**，由北京大学数学系田茂英教授编著。　数学上册：基础训练，定价33元。数学下册：模拟训练，定价25元。④**时事政治**，　由北京大学林代昭教授编写，定价7元。

二、为帮助考生熟悉考试题型，同时，通过作模拟题及时发现薄弱环节，查漏补缺，特编写：《1997 **年硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题**》，政英分册，由北京大学林代昭、清华大学肖立齐、中国人民大学王长喜编写，定价25元。该书将结合最新考试形势编写，在10月份出版。

三、《1997 **年硕士研究生入学考试医学综合考试试题分析及全真模拟题库**》，分上、下两个部分：①西医部分，由北京医科大学教授编写，②中医部分，由北京中医药大学教授编写。

以上1997年版本考研书，是在1996年版本基础上作很大幅度修改，书名也由原来的“辅导与综合训练”变为“辅导与强化训练”。特别是《英语分册》和原来完全不一样，《政治分册》修改幅度也很大，这样有利于拥有去年1996版本的考生，今年购1997版本时不受任何影响。

去年，在相关作者、出版单位及有关发行单位共同努力下，该套系列考研丛书受到了广大考生的青睐，在考生中有非常好的声誉，特别是在1996年2月份举行的全国硕士研究生入学考试中这一点得到了进一步印证，考试试题和以上书目的1996年版本有很多题目相同或相似，现将有关切中试题的题目和相关书目列表对照如下：

政治部分：

1996 年全国攻读硕士学位研究生入学考试政治理论试题	和试题吻合或相似的题及相关书目	点 评
文、理科试题第三大题简答题 21 题： 中国共产党十四届五中全会提出的“九五”时期和 2010 年国民经济和社会发展的主要奋斗目标是什么？	北京大学林代昭教授中国人民大学王长喜教授，清华大学肖立齐教授编：《1996 年硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》(政英分册)第三大题简答题 21 题(P29 页)： 简述今后 15 年我国人民在国民经济和社会发展方面的主要奋斗目标。	两题完全一样
文、理科试题第三大题(简答题)22 题： 简评美国政府允许李登辉访美。	北京大学林代昭教授人大王长喜清华大学肖立齐教授编：《1996 年硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》第六题材料题(P38 页)：中美关系恶化的近因是什么？为什么说克林顿政府允许李登辉访美是违背中美关系的基本准则的？ 林代昭教授主编《时事政治》(P50 页第 47 题)： 为什么说，美国允许李登辉访美严重损害了中国的主权……	相 似
理科试题第五大题(论述题)第 28 题： 试述邓小平建设有中国特色社会主义理论首要的基本的理论问题及科学回答这一问题的重大意义。(12 分)	北京大学林代昭教授编：《1996 年硕士研究生入学考试辅导与综合训练》(政治分册)第 15 题(P86 页)：什么是社会主义的本质？邓小平同志对社会主义本质的概括对科学社会主义理论的发展作出哪些重大贡献？	相 似
理科试题第二题(多选题)第 19 题：我国所要建立的现代企业制度，其基本特征有： A. 产权清晰 B. 权责明确 C. 政企分开 D. 股份制度 E. 管理科学	北京大学林代昭教授中国人民大学王长喜清华大学肖立齐编：《1996 年硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》(政英分册)第 18 题(P16 页)：现代企业制度的特点是： A. 产权清晰 B. 权责明确 C. 政企分开 D. 资产公有 E. 管理科学	完全一样
文科、理科试题都为第二题多选题第 20 题：在北京召开的第四次世界妇女大会的主题是，以行动谋求： A. 解放 B. 平等 C. 发展 D. 进步 E. 和平	北京大学林代昭教授编：《时事政治》第 64 题(P55 页)：第四次世界妇女大会于 1995 年 9 月 4 日至 15 日在北京召开，会议主题为：以行动谋求平等、发展与和平，次主题为：健康、教育和就业。	实质一样
理科试题第六题(材料题)第 30 题(10 分)：材料 1、2、3 略，请回答：①根据材料 1，概括民族、民权、民生三大主义的中心思想。④指出中国共产党革命纲领同新三民主义的主要区别。	北京大学林代昭教授编：《1996 年硕士研究生入学考试辅导与综合训练》(政治分册) 第 16 题(P101 页)：怎样正确评价孙中山的三民主义？ 第 36 题(第 109 页)：新三民主义与旧三民主义有什么原则区别？	相 近
文科试题第二题(多选题)第 16 题 邓小平建设有中国特色社会主义理论首要的基本的理论问题是： A. 社会主义初级阶段理论 B. 什么是市场经济、怎样建立社会主义市场经济体制 C. 解放思想，实事求是 D. 什么是社会主义、怎样建设社会主义 E. 科技是第一生产力	北京大学林代昭教授中国人民大学王长喜清华肖立齐编：《1996 年硕士研究生入学考试辅导与综合训练》(政英分册) 第 19 题(P42 页)： 贯穿邓小平同志建设有中国特色社会主义理论的主题是： A. 什么是社会主义 B. 怎样建设社会主义 C. 怎样建设一个马克思主义政党 D. 怎样建设社会主义道路 E. 怎样把我国建设成为一个社会主义现代化的国家	相近
此外，文科试题第一题第 6、7 题 第二题第 13，理科试题第二题第 18 题及其它各题	与以上三本书中某些题相近，不同程度切中题，因篇幅有限，在此不一一列举。	

英语部分：

1996 年全国攻读硕士学位研究生入学考试英语试题	和试题吻合或相似的题及相关书目	点评
试题第五部分，作文题： part V Writing(15 points) 76. **Directions**： A. Title：GOOD HEALTH B. Time limit：40 minutes C. Word limit：120-150 words (not including the given opening sentence) D. Your composition should be based on the OUTLINE below and should start with the given opening sentence ："The desire for good health is universal." E. Your composition should be written neatly on the ANSWER SHEET. OUTHINE：1. Importance of good health；2. Ways to keep fit；3. My own prantices.	北京大学林代昭、中国人民大学王长喜、清华大学肖立齐编：《1996 年硕士研究生入学考试最后冲刺—— 各科全真模拟试题》政英分册 P127 页第五部分，作文题：Part V. writing (15 points) **Directions**： A. Title：Health B. Time limit：40 minutes C. Word limit：120-150 words (not including the given opening sentence) D. Your composition should be based on the OUTLINE below and should start with the given opening sentence ："Nothing is more valuable than health" E. Your composition must be written clearly on the ANSWER SHEET. **Outline**： 1. The importance for keeping healthy；2. How to maintain good health	两者 80% 一样
试题第一部分，第 14 题： 14. Each cigarette which a person smokes dose [A] some [B] harm, and eventually you [C] may yet a serious disease from its [D] effect.	北京大学林代昭、中国人民大学王长喜、清华大学肖立齐编，《1996 年硕士研究生入学考试最后冲刺—— 各科全真模拟试题》政英分册 P119 页第 20 题 20. Each cigarette which (A) a person smokes dose (B) some harm, and eventually you (C) may get a serious disease from its effects (D).	很相似
试题第二部分第 41 题至 50 题： Part Ⅱ cloze Test Directions： For each numbered blank in the following passage, there are four choices marked [A], [B], [C]and [D], Choose the best one and mark your answer on the…… Vitamins are organic compounds necessary in small amounts in the diet for the normal growth……	北京大学林代昭、中国人民大学王长喜、清华大学肖立齐编：《1996 年硕士研究生入学考试最后冲刺—— 各科全真模拟试题》政英分册 P79 页 Part Ⅱ cloze Test 第 41 至 50 题 For each numbered blank in the following passage, there are four choices marked A, B, C and D. Choose the best one and mark your answer on the…… Vitamins and minerals are 41 for good health. A varied, 42 diet usually supplies a full 43 of all the nutrients you need, Vitamin……	相似

由于篇幅有限，清华大学肖立齐所编《1996 年硕士研究生入学考试辅导与综合训练》英语分册一书，也还有一些和考题相近的地方。同时，北京大学田茂英教授所编《数学分册》和《数学冲刺》也有不同程度的切题，而且 90% 以上的题型一样，在此不一一列举。

值得注意的是，考生在复习时，应本着认真、刻苦、求实的态度，虽然书中能切中一些题，但不要以为这样就能走捷径，不能只寄希望于猜题、押题上，而忽视了基础知识的复习。只有下苦功夫，使用正确的学习方法，同时拥有二至五套好的复习资料。既有全面的内容复习，又有适量的重点训练，才能把基础打扎实，考出好的成绩。

内容介绍

近几年来，报考硕士研究生的人数不断增加。为了帮助考生在短时间内系统地复习数学知识，掌握重点，熟悉统考命题的内容，应广大考生的要求，根据国家教委新修订的工学与经济学硕士研究生入学考试数学大纲编写了这本书。

最新修订的 1997 年数学考试大纲较原大纲有所变动：将原大纲的数学一、二合并为数学一；新的数学一不再考复变函数而要考概权率论与数理统计；原数学三、四、五相应变为数学二、三、四。

本书对大纲所要求的概念、定理和公式进行简明、扼要地叙述，便于复习。重点是精选了各类题型的例题，并作详细的解答。每节(或章)后均附有适当数量的习题(第四篇除外)，全部习题都附有答案或提示，以便读者练习。本书的题目来源于编者多年的教学积累，并根据编者以往研究生入学考试的命题、评卷经验编写而成。

本书对重点例题，或在解答之前作了解题方法分析，或题后有关键的注释。部分题目一题多解，这些都有利于提高考生的解题、应试能力。此外本书也介绍了考试中常见题型，并以例题形式作了重点介绍。

根据新的考试大纲，数学一包括本书第一、二两篇的全部内容及概率论。数学二包括第一篇的一、二章，第六章§1 及§2 的部分内容。数学三包括第一篇的一、二章，第三章§2、§3，第四章§1，第五章§1，§2，第六章§1 及§2 的部分内容，第二(第四章§1 除外)、三两篇的全部内容，第四篇。数学四包括第一篇的一、二章，第三章§2、§3，第二篇的一、二、三章，第四章§2，第三篇的一、二两章，第四篇。MBA 数学的要求与数学四相同。除此之外，还对有些内容及题目加以 * 号。凡带 *、* * 的部分，对数学二、数学三、数学四及 MBA 数学的考生都不要求；凡带 * * 者是适当拓宽的内容，对数学一的考生，一般不要求，可根据需要由读者自行取舍。这样，更便于不同类考生选用，也有利于广大读者阅读。

本书还将近几年来的全国硕士研究生入学考试数学试题作了简单分析，放在附录中，供读者参考。读者通过对近几年考研试题中各知识点所占分数统计，可把握重点，了解考试规律和趋势。

本书不仅是研究生入学考试应试者的一本复习用书，同时我们希望对正在学习高等数学、线性代数、概率论及复变函数的理工学、经济学类院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生，也是一本好的参考书。

本书的编写得到了郭懋正教授和黄少云教授的支持，在此表示感谢。

由于水平有限，时间仓促，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

于北京大学蔚秀园

目 录

常用记号

∀，表示任意一个；

∃，表示存在，有一个；

$A \Rightarrow B$，表示 A 蕴涵 B，即如果 A 则必 B；

$A \Leftrightarrow B$，表示 A 与 B 等价，即 A 以 B 为充分必要条件。

第一篇　高等数学

第一章　一元函数微分学

§1　极限与连续

一、极限的概念及运算

1. 数列的极限

(1)**定义**　设有数列$\{x_n\}$及数a，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时以a为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a$(当$n\to\infty$)。也称$\{x_n\}$收敛。

数列$\{x_n\}$是否收敛以及极限a均与$\{x_n\}$的前有限项无关。

(2)若$\{x_n\}$的极限存在，则极限唯一。

2. 函数的极限

(1)**定义**　函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义(可能不包括点x_0)，A为某个确定的常数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时以A为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$)。

(2)单侧极限

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作$f(x_0-0)=A$。

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记为$f(x_0+0)=A$。

(3)左、右极限与极限的关系

定理1　极限存在$\Leftrightarrow$左、右极限存在且相等。此定理常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性。

3. 极限的运算法则

若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$　特别

$\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$，C 为常数

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq 0)$

注　1° 极限过程为 $x\to x_0$（或 $x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty$ 等）

2°(1)，(2)可推广到有限个函数的极限。

4. 性质

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则 $\exists\ \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且存在一个 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$

(3)**夹逼定理**：若 $\exists\ \delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

5. 无穷小量与无穷大量

(1)**定义**　若函数（或数列）以零为极限，则称该函数（或数列）为无穷小量。非零无穷小量的倒数为无穷大量。

(2)无穷小量的阶

设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是 x 的同一极限过程的无穷小量。

1°　若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=0(\beta(x))$

2°　若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量

3°　若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等阶的无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$)

4°　若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k_{(x)}}=C\neq 0$，($k$ 为常数)，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量。

(3)极限与无穷小量的关系

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$

二、求极限的常用方法

1. 证明数列极限存在的常用方法：

(1)单调增（或减）且有上（或下）界的数列有极限。

(2)夹逼定理。

(3)利用函数极限与数列极限的关系。

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ （A 为有限或∞）$\Leftrightarrow$对任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

该定理还常用来证明函数的极限不存在。

2.求极限是最基本的运算，也是必定考的问题。求极限的主要方法如下：

(1)利用极限的运算法则及函数的连续性；

(2)利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；

(3)利用函数的单调有界性；

(4)利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量；

(5)用夹逼定理；

(6)用洛必达法则；

(7)利用等价无穷小量及台劳公式；

(8)利用导数与定积分的定义；

(9)利用微分中值定理和积分中值定理。

另外，求极限还常用以下结果：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

三、常考题型例题分析

1.用极限的定义证明极限

例 1 用“$\varepsilon-N$”的方法证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2-3}=0$。

分析 根据定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|=\frac{n}{n^2-3}<\varepsilon$$

如何找 N？首先要从上面最后的不等式中解出 n，为便于这样做，要通过适当放大，消去分子中的 n，只让分母含有 n。

由于 $n\to\infty$，故可设 $n>3$，从而（用 n 代替分母中的 3）有

$\frac{n}{n^2-3}<\frac{n}{n^2-n}=\frac{1}{n-1}$，要使$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{n-1}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}+1$，这样就可

取到 N

证明 不妨设 $n>3$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N\geqslant\max\{\frac{1}{\varepsilon}+1,3\}$，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|<\varepsilon,\quad 这就证明了\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-3}=0$$

注 要使 $\frac{1}{n-1}<\varepsilon$，只要取 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}+1$ 即可，但前面已设 $n>3$，故取 $N\geqslant\max\{\frac{1}{\varepsilon}+1,3\}$

例 2 用定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=0(|q|<1)$

证法一 $\forall\ \varepsilon>0$，要使 $||q|^n-0|=|q|^n<\varepsilon$，只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，即只要 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$（因为 $|q|<1$，故 $\ln|q|<0$），可取 $N\geqslant\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，当 $n>N$ 时，就有

$$||q|^n-0|<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=0$

证法二 $\because|q|<1$，故可令 $|q|=\frac{1}{1+h}(h>0)$，从而 $|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}$，$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n>nh$，于是 $|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{nh}$，$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $||q|^n-0|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{nh}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{h\varepsilon}$，故可取 $N=[\frac{1}{h\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，就有 $||q|^n-0|<\varepsilon$

例 3 用定义证明 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$

分析 由定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^2-9|<\varepsilon$。

为找 $\delta>0$，要从最后的不等式中解出 $|x-3|$。因为 $|x^2-9|=|x+3||x-3|$，将其中的 $|x+3|$ 用数代替，为此可设 $|x-3|<1$（因为 $x\to3$），即 $-1<x-3<1$，于是 $5<x+3<7$，由此得 $|x+3|<7$，这样就容易找到 δ（在证明时，也可不写出分析）

证明 不妨设 $|x-3|<1$。因为

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|$$

$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $|x^2-9|<\varepsilon$，只要 $7|x-3|<\varepsilon$，即只要 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$，故可取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7},1\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有 $|x^2-9|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$

2. 用单调有界性求极限

例 4 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})(n=1,2,\cdots)$

(1)证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在；

(2)求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。

解 (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}>0$，$\Rightarrow x_n\geqslant\sqrt{a}\ (n\geqslant2)$ 即 $\{x_n\}$ 有下界。

由此得　$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，即$\{x_n\}$单调下降。

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}x_n$存在。

(2)设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$，由(1)$\beta\geqslant\sqrt{a}>0$。对递推公式两端取极限，得$\beta=\frac{1}{2}(\beta+\frac{a}{\beta})$，解得$\beta=\pm\sqrt{a}$(舍去负值)，$\therefore\beta=\sqrt{a}$。

注　求数列的极限分两步：1^0 先用数学归纳法证明数列单调有界，从而数列有极限；2^0 设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$，对给定$x_n$的递推公式两端取极限，表达式变为$\beta$的代数方程，最后解出$\beta$。

例5　设$x_1=\sqrt{A}\,(A>0)$，$x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}$，…

$x_n=\sqrt{A+\sqrt{A+\cdots+\sqrt{A}}}\,(n=1,2\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。

解　(1)先证$\{x_n\}$单调增加且有上界。

$\because x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}=\sqrt{A+x_1}>x_1$

假设当$n=k$　时，有$x_k>x_{k-1}$，那么由$A+x_k>A+x_{k-1}$，知

$\sqrt{A+x_k}>\sqrt{A+x_{k-1}}$，即$x_{k+1}>x_k$，故对$n=k+1$也成立。由数学归纳原理知$\{x_n\}$单调增加。

再证数列$\{x_n\}$有界。$\because x_1=\sqrt{A}<\sqrt{A}+1$，设当$n=k$时，有$x_k<\sqrt{A}+1$，那么当$n=k+1$时

$x_{k+1}=\sqrt{A+x_k}<\sqrt{A+\sqrt{A}+1}<\sqrt{A+2\sqrt{A}+1}=\sqrt{(\sqrt{A}+1)^2}=\sqrt{A}+1$，因此$\{x_n\}$有上界。从而数列$\{x_n\}$收敛。

(2)再求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$。将$x_{n+1}=\sqrt{A+X_n}\,(n=1,2,\cdots)$两端取极限，得$\alpha=\sqrt{A+\alpha}$，解得$\alpha=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4A})$，由(1)知$\alpha>0$，因此

$$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4A})。$$

3.用夹逼定理求数列的极限

例6　求$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

错误做法：原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots$

$+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0+0\cdots+0$。因为当$n\to+\infty$时，项数无限增加，不能用极限运算法则。

正确作法：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$