高等职业技术院校规划创新教材

工科数学

李稳贤　谢亚萍　主编

陕西师范大学出版社

高等职业技术院校规划创新教材

工科数学

主　编　李稳贤　谢亚萍
副主编　宋剑萍　梁　怡

陕西师范大学出版社

图书代号 JC9N0696

图书在版编目(CIP)数据

工科数学/李稳贤,谢亚萍主编. -西安:陕西师范大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5613-4750-8

Ⅰ.工… Ⅱ.①李… ②谢… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115142 号

工科数学

李稳贤 谢亚萍 主编

责任编辑 李 博
责任校对 颜 红
视觉设计 吉人设计
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网 址 http://www.snupg.com
经 销 新华书店
印 刷 陕西光大印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 18.75
字 数 363 千
版 次 2009 年 8 月第 1 版
印 次 2009 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5613-4750-8
定 价 29.80 元

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社教材中心联系、调换。
电 话:(029)85307826 85303622(传真)
E-mail:jcc@snnup.net

高等职业技术院校规划创新教材

编委会

出版人　高经纬

总策划　雷永利

策　划　杨雪玲　钱　栩　李慧娜　侯晋公

出版说明

职业技术教育是现代化教育的重要组成部分。发展职业技术教育是加快提高劳动者素质,振兴我国经济的必由之路。为了促进高等职业教育健康发展,2006年教育部下发了《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》。《意见》指出,要以课程建设与改革为核心,加强教材建设,这是发展高等职业教育的一项基础性工作,对实现办学指导思想和培养合格人才具有举足轻重的作用。为此,我们组织有关高等职业技术院校的专家,对相关专业的教材进行了多次研讨,遴选了一些较为成熟的成果,组织编写了"高等职业技术院校规划创新教材",以推动高等职业院校教育教学的改革与发展。

本系列教材坚持科学的发展观和以人为本的指导思想,突出德育为先,立德树人;坚持以就业为导向,面向市场、面向社会,培养学生的可持续发展能力,为就业和再就业服务;坚持"必需、够用"原则,注重讲清基本概念、基本原理和基本方法,尽可能避免大篇幅的理论分析和繁琐的公式推导,实训教材简明实用,内容科学合理,让学生易于理解、掌握和运用,使其技能操作符合职业技能鉴定规范;坚持教学的适用性,根据学生水平、培养目标、课时数确定教材内容、深浅程度和篇幅,方便教师教学,符合学生发展需要,为学生进一步提高打下基础。

本系列教材的编写和出版,得到许多高等职业技术院校领导的亲切关怀和大力支持。各学科参编者多为长期在职业技术院校从事教学、具有丰富教学实践经验的骨干教师。为了确保教材质量,我们还约请了其他院校部分学术造诣深厚的专家参与编写大纲的讨论和审稿。本系列教材在坚持科学性、突出实用性、增强灵活性等方面具有许多创新之处。我们向有关高等职业技术院校的领导和教师表示衷心的感谢。今后,我们还将不断出版反映现代科学技术水平,具有职业教育特色,品种多样,系列配套,层次衔接,有利于培养高素质劳动者和高、中、初级实用人才的职业教育教材。

本系列教材还可供其他高专、成人高校、普通中专、职业中专相关专业选用。

陕西师范大学出版社

2008年7月

内容提要

本教材是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》,在认真总结高职高专数学教学改革经验的基础上,由多年从事高职高专数学教学工作的一线教师编写而成。

本教材根据应用型人才对数学知识的实际要求,力求贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则。在内容的编排上,减少了繁琐的推理和证明,强调了数学知识在专业课上的应用,注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,突出当前高职高专教育培养高素质技能型人才数学课程设置的教学理念。

本教材共十一章。主要内容包括:预备知识、函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、空间解析几何、多元函数微分初步、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、二重积分等。其中第1章、第7章由李稳贤编写;第8章、第9章由谢亚萍编写;第2章、第5章、第6章、第11章由宋剑萍编写;第3章、第4章、第10章由梁怡编写。

本书可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高校及本科院校的二级职业技术学院和民办高校的高等数学教材、自学考试学生的课外教材,同时也可作为一般工程技术人员的参考用书。

目录

CONTENTS

上　篇

第 1 章　预备知识

第 2 章　函数的极限与连续

第 3 章　导数与微分

下 篇

第7章 不定积分

第8章 定积分

第9章 定积分的应用

第10章 常微分方程

第11章 二重积分

第 1 章　预备知识

世间万物千变万化，人们在研究各种自然现象和社会现象的变化规律时，描述了变量与变量之间的依赖关系，即“函数”的概念. 函数是整个高等数学课程所研究的对象，中学时学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，都是最基本的函数. 本章我们将学习更为复杂的函数——复合函数.

极坐标是高等数学的计算工具，有些问题用极坐标计算大大简化了运算过程. 本章我们还将学习极坐标的有关知识.

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

在同一个变化过程中，往往有几个变量同时存在，变量与变量之间的依赖关系正是高等数学研究的主要问题. 本章只讨论两个变量的情况.

例 1　一个物体在离地面 H 米的高处下落，其初速度为 v_0，则在开始下落至地面的过程中，该物体所下落的距离 s 与所经历的时间 t 有下列关系：

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

其中 g 是重力加速度. 显然，下落距离 s 随所经历的时间 t 的变化而变化. 假定物体着地时刻为 $t = T$，当时间 t 在区间 $[0, T]$ 内任意取定一个数值时，相应的下落距离 s 的数值也随之唯一地确定.

例 2　出租车载客收费标准为:3 公里以内的路程收费 6 元，此后每公里加收 1.2 元，不足 1 公里按 1 公里收费，这样就规定了出租车载客时的收费数 F 与行驶公里数 s 之间的关系：

$$F = \begin{cases} 6 & 0 < s \leqslant 3, \\ 6 + 1.2[s-3] & s > 3. \end{cases}$$

其中 $[s-3]$ 表示大于或等于 $s-3$ 的最小整数，例如 $[0.7] = 1$，$[4.6] = 5$.

例如，出租车载乘客甲行驶 2.6 公里，应收费 6 元；载乘客乙行驶 17.5 公里，应收费 24 元.

上面两个例子均表达了两个变量之间的依赖关系，每个依赖关系对应一个法则，根据各自的法则，当其中一个变量在某一个数集内任取一值时，另一变量就有确定值与之对应. 两个变量之间的这种依赖关系称为函数关系.

定义 设 D 是一个非空数集,如果有一个对应法则 f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一确定的数值 y 与之对应,那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,x 叫做函数的**自变量**,y 叫做**因变量**;数集 D 叫做函数的**定义域**,函数 y 的取值范围 M 叫做函数的**值域**.

函数符号 $y=f(x)$,只表示"y 是 x 的函数"这件事,f 表示自变量 x 通过 f 对应成 y,$f(x)$ 不是 f 与 x 相乘. 如

$$y=f(x)=3x^2+x-7,$$

那么 f 就代表运算式

$$3(\quad)^2+(\quad)-7,$$

括号内是自变量的位置,运算的结果得到函数(因变量)的值.

$f(0)$ 表示自变量 $x=0$ 时所对应的函数值,即 $f(0)=-7$. $f(x)$ 表示自变量取任意值时所对应的函数值也是任意的.

2. 函数的定义域

在实际问题中,函数的定义域是由自变量所表示的实际意义确定的,如例 1 中的定义域为 $[0,T]$,例 2 中的定义域为 $(0,+\infty)$. 如果不考虑所讨论的函数的实际背景,那么其定义域为使得函数解析式有意义的全体自变量的集合. 求解析式表示的函数的定义域,有以下常用原则:

(1) 分式的分母不能为零;

(2) 偶次根式下的量大于或等于零;

(3) 对数式中真数大于零;

(4) 三角函数和反三角函数中,要符合它们的定义域;

(5) 在含有多种式子的函数中,应取各部分定义域的交集;

(6) 分段函数的定义域,应取各段定义区间的并集.

由定义可知,对应法则和定义域构成函数的二要素,只有构成函数的对应法则和定义域相同的两个函数才是同一个函数. 例如,$y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$,$y=\sqrt{x^2}$ 可化简为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,这时两个函数的对应法则也相同,因此这两个函数是同一个函数.

例 3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{3}{x-1}$;　　(2) $y=\dfrac{x}{\ln(x+3)}$.

解 (1) 要使函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{3}{x-1}$ 有意义,必须有 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$,解得

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

所以函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{3}{x-1}$ 的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

(2) 要使函数 $y=\dfrac{x}{\ln(x+3)}$ 有意义,必须有 $\begin{cases}x+3>0\\ \ln(x+3)\neq 0,\end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x > -3, \\ x+3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2. \end{cases}$$

所以函数 $y=\dfrac{x}{\ln(x+3)}$ 的定义域为 $(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$.

例 4　求函数 $f(x)=x^2-2x+5$ 在 $x=3, x=x_0, x=x_0+\Delta x$ 各点的函数值.

解　$f(3)=3^2-2\times3+5=8$;

$f(x_0)={x_0}^2-2x_0+5$;

$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)+5.$

如果自变量在定义域内任取一个值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 例如，$y=x+2$ 是单值函数，由方程 $x^2+y^2=1$ 可确定 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. 任取 $x\in(-1,1)$，y 就有两个值与之对应，因此这里的 y 是 x 的多值函数，但是可以把它分成两个单值函数

$$y=\sqrt{1-x^2} \text{和} y=-\sqrt{1-x^2}.$$

今后没有特别说明，本书讨论的函数都是指单值函数.

1.1.2　函数的表示方法

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数. 为了能更好地研究函数关系，就应该选取适当的方法把它表示出来. 函数的表示方法通常有三种：表格法、图象法和解析法.

1. *表格法*

在实际应用（尤其是数值计算）中常把一系列自变量值及其相对应的函数值用表格列出，这种表示函数关系的方法称为**表格法**. 例如，大家熟悉的《中学数学用表》中的对数表、开方表和三角函数表等都是用表格法来表示函数的.

表格法表示函数的优点是可以由自变量数值直接查到相应的函数值，使用方便. 但表中所列数值往往不全面，不能查出函数的任意值，因此表格法一般不能完整地表示函数，不便于进行运算和分析.

2. *图象法*

函数 $y=f(x)$ 的图象法表示，就是直角坐标 x 和 y 满足关系式 $y=f(x)$ 的点的轨迹. 例如，图 1－1 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图象.

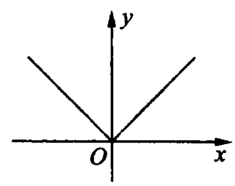

图 1－1

例 5　河道的一个横断面如图 1－2 所示，在横断面 Oxy 上，离岸边距离为 x 处的深度为 y. x,y 之间的函数关系由图 1－2 表示，函数的定义域为 $[a,b]$.

函数的图象法表示的优点是直观. 由图象可较为清楚地看出因变量是如何依赖于自变量的变化而变化的. 用图象表示函数的缺点是不能由此获得准确的函数值和进行精确的理论分析.

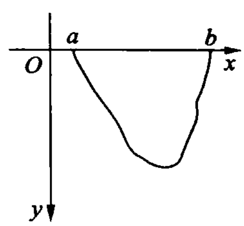

图 1－2

3. *解析法（也称公式法）*

用数学式子来表示因变量与自变量的对应关系，这种表示函数的方法称为解析法（或公式法）. 例 1，例 2，例 3，例 4 中的函数都是用解

析法表示的.解析法是对函数的精确描述,其优点是便于理论分析和研究,缺点是不够直观,并且有些实际问题(如例5)中遇到的函数关系,很难甚至不能用公式法表示.

函数的三种表示法各有优点和缺点,针对不同的问题可以采用不同的表示法,有时为了把函数关系表达得清楚,往往同时使用两种以上的表示法.本书一般采用公式法表示函数,为了直观,经常辅之以图象法(即画出函数的图象).

用公式法表示函数,通常用一个公式就可以,如 $y=\sin x$,$y=x^2+3x-5$,$y=\ln\cos x$ 等.但有一些函数,当自变量在不同的范围内取值时,对应的法则不能用同一个式子表达,要用两个或两个以上的式子来表示的函数叫做**分段函数**(如例2).

分段函数是用若干个式子来表示的一个函数,而不是表示几个函数.求分段函数时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.如例2中的行驶公里数不同,计算出租车载客收费数的对应法则也不同.$F(2.6)=6$,$F(17.5)=6+1.2\times[17.5-3]=24$.

例6 旅客携带行李乘飞机旅行时,行李的重量不超过20千克时不收费用,若超过20千克,每超过1千克收运费 a 元,试建立运费 y 与行李重量 a 的函数关系.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,运费 $y=0$;

当 $x>20$ 时,只有超过的部分 $x-20$ 按每千克收运费 a 元,此时,运费为:

$$y=a(x-20).$$

因此,函数 y 可以写成:

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ a(x-20) & x>20.\end{cases}$$

这样便建立了行李运费 y 与行李重量 x 之间的函数关系.

1.1.3 反函数

在研究函数的同时,有时函数和自变量的地位会相互转换,于是就出现了反函数的概念.例如,物体作匀速直线运动的位移 s 是时间 t 的函数,即

$$s=vt,$$

其中速度 v 是常量.反过来,也可以由位移 s 和速度 v(常量)确定物体作匀速直线运动的时间,即

$$t=\frac{s}{v},$$

这时,位移 s 是自变量,时间 t 是位移 s 的函数.在这种情况下,我们就说 $t=\frac{s}{v}$ 是函数 $s=vt$ 的反函数.

又例如,在函数 $y=2x+6\ (x\in\mathrm{R})$ 中,y 是自变量 x 的函数.按照 x 和 y 的对应关系,任意给出 $y\in\mathrm{R}$ 都有唯一确定的 $x=\frac{1}{2}y-3$ 与之对应.我们说 $x=\frac{1}{2}y-3$ 是 $y=2x+6$ 的反函数.

一般地,设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D,值域为 M.如果对于 M 中的每一个 y 值,都有唯一确定的值与之对应,这样就确定一个以 y 为自变量的函数 x,该函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函

数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 显然，该函数的定义域为 M，值域为 D.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，故常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个平面直角坐标系内，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

因此，函数 $x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$ 是 $y=2x+3$ 的反函数. 将函数改为 y，自变量改为 x，则函数 $y=2x+3$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$（如图 1－3）.

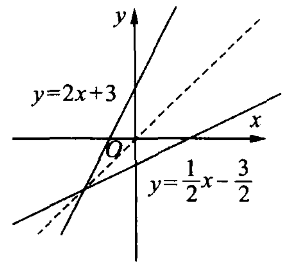

图 1－3

例 7　求函数 $y=x^2+1(x\in \mathbf{R}^-)$ 的反函数.

解　由 $y=x^2+1(x\in \mathbf{R}^-)$，得

$$x=-\sqrt{y-1},$$

所以，函数 $y=x^2+1(x\in \mathbf{R}^-)$ 的反函数是

$$y=-\sqrt{x-1}(x>1).$$

1.1.4　函数的几种性质

1. 奇偶性

函数 $f(x)=x^2$ 有这样的特点：$f(-x)=f(x)$，在几何上这个特性体现为 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的图以 y 轴为对称轴，类似地，函数 $y=x^4$，$y=\cos x$ 等都具有这样的特点.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是**偶函数**.

函数 $f(x)=x^3$ 有这样的特点：$f(-x)=-f(x)$，在几何上这个特性体现为 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的图形以原点 O 为中心对称，类似地，函数 $y=\sin x$，$y=\arcsin x$ 等都具有这样的特点.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是**奇函数**.

类似于函数 $y=x+1$，$y=e^x$ 等既不是奇函数也不是偶函数，则称此类函数为**非奇非偶函数**.

奇函数的图象关于原点对称，如图 1－4.

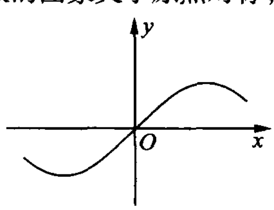

图 1－4

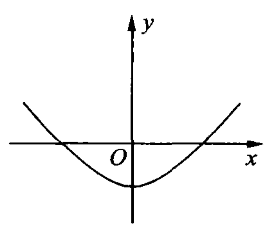

图 1－5

偶函数的图象关于 y 轴对称，如图 1－5.

研究函数的奇偶性的好处在于，如果知道一个函数是奇函数或偶函数，则知其一半就可知其全貌.

例 8 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=2x+\frac{1}{x}$； (2)$g(x)=x^2\cos x$； (3)$h(x)=|x|-5\tan x$.

解 (1)$f(x)=2x+\frac{1}{x}$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

$$f(-x)=2(-x)+\frac{1}{-x}=-\left(2x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以$f(x)=2x+\frac{1}{x}$是奇函数.

(2) $g(x)=x^2\cos x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，且

$$g(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=g(x),$$

所以 $g(x)=x^2\cos x$ 是偶函数.

(3) $h(x)=|x|-5\tan x$ 的定义域是$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，且

$$h(-x)=|-x|-5\tan(-x)=|x|+5\tan x,$$

所以 $h(x)=|x|-5\tan x$ 是非奇非偶函数.

2. 单调性

考察图 1－6 所示的函数，其图形自左向右逐渐上升，也就是说自变量的值越大，相对应的函数值 y 也越大. 一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果当任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$成立，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加的**，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的**单调增加区间**.

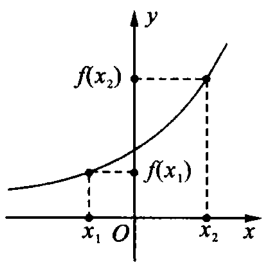

图 1－6

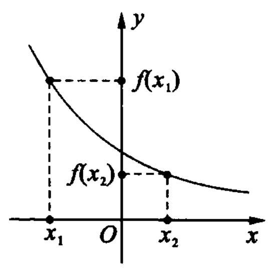

图 1－7

考察图 1－7 的函数，其图形自左向右逐渐下降，也就是说自变量 x 的值越大，相对应的函数值 y 反而越小. 一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果当任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 时，恒有$f(x_1)>f(x_2)$成立，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调减少的**，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的**单调减少区间**.

显然，**单调增加函数的图象沿 x 轴正向是逐渐上升的；单调减少函数的图象是沿 x 轴正向是逐渐下降的**.

例如，对数函数 $y=\ln x$ 在其定义域$(0,+\infty)$内是单调增加的. 而幂函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少的，在$(0,+\infty)$内是单调增加的，但在其定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

例 9　讨论函数 $f(x)=x^2-3$ 的单调性.

解　函数 $f(x)=x^2-3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，有

$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2-3)-(x_1^2-3)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$，

若 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，$\therefore x_2+x_1<0, x_2-x_1>0$，则有

$$f(x_2)-f(x_1)<0，即 f(x_1)>f(x_2)，$$

因此 $f(x)=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少.

若 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$\therefore x_2+x_1>0, x_2-x_1>0$，则有

$$f(x_2)-f(x_1)>0，即 f(x_1)<f(x_2)，$$

因此 $f(x)=x^2-3$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

由以上讨论可知，$f(x)=x^2-3$ 在其定义域上不是单调函数，但在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内分别是单调的.

3. 周期性

我们在中学时已知道 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 及 $y=\tan x$ 都是周期函数. 一般地，对于函数 $y=f(x)$，定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于任意 $x\in D$，$x+T\in D$ 恒有

$$f(x+T)=f(x)，$$

成立，则称 $y=f(x)$ 是周期函数，T 为该函数的周期.

显然，如果 T 是 $y=f(x)$ 的周期，则 nT（n 是整数）均为其周期. 一般提到的周期均指最小正周期（如图 1－8）.

我们常见的三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以为 2π 周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

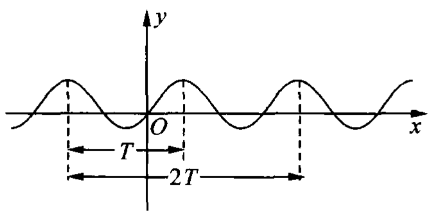

图 1－8

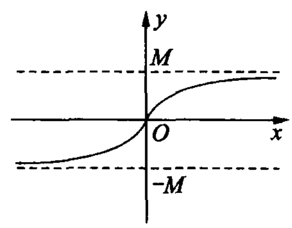

图 1－9

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in D$ 恒有

$$|f(x)|\leqslant M，$$

成立，则称 $y=f(x)$ 在区间 D 内有界；如果不存在这样的常数 M，$y=f(x)$ 则称在区间 D 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 存在正数 $M=1$，使得对于任意的 $x\in\mathrm{R}$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在其定义域 R 内是有界的.

从图形上来看，函数的有界性是指该函数在所给的区间上的图形介于两条水平直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间（如图 1－9）.