李 捷 刘明杰 孙疆明 吴小丹●编著

经济类院校基础课程本科系列教材辅导书

概率论与数理统计习题解答

Gailülun yu Shuli Tongji Xiti Jieda

西南财经大学出版社

李　捷　刘明杰　孙疆明　吴小丹●编著

经济类院校基础课程本科系列教材辅导书

概率论与数理统计习题解答

Gailülun yu Shuli Tongji Xiti Jieda

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题解答/李捷等编著.—成都:西南财经大学出版社,
2009.9
ISBN 978-7-81138-517-5

Ⅰ.概… Ⅱ.李… Ⅲ.①概率论—高等学校—解题②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第156231号

概率论与数理统计习题解答

李捷　刘明杰　孙疆明　吴小丹　编著

责任编辑:李霞湘
封面设计:大　涛
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	11.5
字　　数	190千字
版　　次	2009年9月第1版
印　　次	2009年9月第1次印刷
印　　数	1—5000册
书　　号	ISBN 978-7-81138-517-5
定　　价	22.00元

目　　录

第一章 随机事件与概率

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 Ω 及指定的事件:

(1)袋中有3个红球和2个白球,现从袋中任取一个球,观察其颜色;

(2)掷一次硬币,设 H 表示"出现正面",T 表示"出现反面". 现将一枚硬币连掷两次,观察出现正、反面的情况,并用样本点表示事件 A ="恰有一次出现正面";

(3)对某一目标进行射击,直到击中目标为止,观察其射击次数,并用样本点表示事件 A ="射击次数不超过5次";

(4)生产某产品直到5件正品为止,观察记录生产该产品的总件数;

(5)从编号为 a,b,c,d 的四人中,随机抽取正式和列席代表各一人去参加一个会议,观察抽取结果,并用样本点表示事件 A ="编号为 a 的人抽中".

解 (1) $\Omega=\{\omega_{红1},\omega_{红2},\omega_{红3},\omega_{白1},\omega_{白2}\}$.

(2) $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$, $A=\{(H,T),(T,H)\}$.

(3) $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$.

(4) $\Omega=\{5,6,7,\cdots\}$.

(5) $\Omega=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d),(b,a),(c,a),(d,a),(c,b),(d,b),(d,c)\}$,其中$(*,\oplus)$表示"$*$"为正式代表、"$\oplus$"为列席代表;$A=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,a),(c,a),(d,a)\}$.

2. 某射手射击目标4次,记事件 A ="4次射击中至少有一次击中";B ="4次射击中击中次数大于2". 试用文字描述事件 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$.

解 $\bar{A}$ ="4次射击中一次都未击中"; $\bar{B}$ ="4次射击中击中次数不超过2

次”.

3. 设A,B,C为三个事件,试用事件的运算表示下列事件:(1)A,B,C都发生;(2)A,B,C都不发生;(3)A,B,C中至少有一个发生;(4)A,B,C中最多有一个发生;(5)A,B,C中至少有两个发生;(6)A,B,C中最多有两个发生.

解　(1)“A,B,C都发生”可表示为:

$$ABC;$$

(2)“A,B,C都不发生”即“$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$都发生”可表示为:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}(\text{或}\overline{A\cup B\cup C});$$

(3)“A,B,C至少有一个发生”=“A,B,C只发生一个或恰有两个发生或三个都发生”可表示:

$$(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC\cup A\bar{B}C)\cup AB\bar{C}\cup ABC\text{ 或 }A\cup B\cup C;$$

(4)“A,B,C中最多有一个发生”=“A,B,C都不发生发生或只发生一个”可表示为:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\text{ 或 }\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C};$$

(5)“A,B,C至少有两个发生”=“A,B,C恰有两个发生或三个都发生”可表示为:

$$(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)\cup ABC\text{ 或 }AB\cup BC\cup AC;$$

(6)“A,B,C最多有两个发生”=“A,B,C都不发生或只发生一个或恰有两个发生”

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C})\cup(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)\text{ 或 }\overline{ABC}.$$

4. 在一段时间内,某电话交换台接到呼唤的次数可能是0次,1次,2次,….记事件A_n=“接到的呼唤次数小于n”($n=1,2,\cdots$),试用事件的运算表示下列事件:(1)呼唤次数大于2;(2)呼唤次数在5到10次范围内;(3)呼唤次数与8的偏差的绝对值大于2.

解　(1)“呼唤次数大于2”$=\bar{A}_3$;

(2)“呼唤次数在5到10次范围内”$=A_{11}-A_5$;

(3)“呼唤次数与8的偏差大于2”$=A_6\cup\bar{A}_{11}$.

5. 证明:

(1) $AB\cup(A-B)\cup\bar{A}=\Omega$;

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=AB.$

证明: (1) $AB\cup(A-B)\cup\bar{A}=(AB\cup A\bar{B})\cup\bar{A}=A\cup\bar{A}=\Omega.$

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$

$$
\begin{aligned}
&=A(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)\cup B(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)\\
&=(AA\cup A\bar{B})(\bar{A}\cup B)\cup(BA\cup B\bar{B})(\bar{A}\cup B)\\
&=A(\bar{A}\cup B)\cup A\bar{B}(\bar{A}\cup B)\cup BA(\bar{A}\cup B)\cup\varnothing(\bar{A}\cup B)\\
&=A\bar{A}\cup AB\cup A\bar{B}\bar{A}\cup A\bar{B}B\cup BA\bar{A}\cup BAB\cup\varnothing\\
&=\varnothing\cup AB\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup AB\\
&=AB
\end{aligned}
$$

习题 1.2

1. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A, B, C 三个事件至少有一个发生的概率.

解 由 $P(AB)=0$,有 $P(ABC)=0$,根据广义加法公式得 A、B、C 中至少有一个发生的概率

$$
\begin{aligned}
&P(A+B+C)\\
&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.
\end{aligned}
$$

2. 设 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(A\cup B)=0.7$,求 $P(A-B)$ 及 $P(B-A)$.

解 因 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.5-0.7=0.2$,

故

$$
P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.2=0.2,
$$
$$
P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.2=0.3.
$$

3. 某市有 A, B, C 三种报纸发行.已知该市某一年龄段的市民中,有 45% 的人喜欢读 A 报,34% 的人喜欢读 B 报,20% 的人喜欢读 C 报,10% 的人同时喜欢读 A 报和 B 报,6% 的人同时喜欢读 A 报和 C 报,4% 的人同时喜欢读 B 报和

C 报，1% 的人 A,B,C 三种报纸都喜欢读．从该市这一年龄段的市民中任选一人，求下列事件的概率：(1) 至少喜欢读一种报纸；(2) 三种报纸都不喜欢读；(3) 只喜欢读 A 报；(4) 只喜欢读一种报纸．

解　用 A,B,C 分别表示任选的一位该年龄段的市民喜欢读 A 报、B 报、C 报，依题设有

$$P(A)=0.45,P(B)=0.34,P(C)=0.20,$$

$$P(AB)=0.10,P(AC)=0.06,$$

$$P(BC)=0.04,P(ABC)=0.01.$$

(1) 任选的一位该年龄段的市民至少喜欢读一种报纸的概率

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.34+0.20-0.10-0.06-0.04+0.01=0.80.\end{aligned}$$

(2) 任选的一位该年龄段的市民三种报纸都不喜欢读的概率

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-0.80=0.20.\end{aligned}$$

(3) 任选的一位该年龄段的市民只喜欢读 A 报的概率

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P(A\bar{B})-P(A\bar{B}C)\\&=P(A)-P(AB)-[P(AC)-P(ABC)]\\&=0.45-0.10-0.06+0.01=0.30.\end{aligned}$$

(4) 同理可以求得：任选的一位该年龄段的市民只喜欢读 B 报的概率

$$\begin{aligned}P(\bar{A}B\bar{C})&=P(\bar{A}B)-P(\bar{A}BC)\\&=P(B)-P(AB)-[P(BC)-P(ABC)]\\&=0.34-0.10-0.04+0.01=0.21\end{aligned}$$

任选的一位该年龄段的市民只喜欢读 C 报的概率

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}C)&=P(\bar{A}C)-P(\bar{A}BC)\\&=P(C)-P(AC)-[P(BC)-P(ABC)]\\&=0.20-0.06-0.04+0.01=0.11\end{aligned}$$

故任选的一位该年龄段的市民只喜欢读一种报纸的概率

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)&=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)\\&=0.30+0.21+0.11=0.62\end{aligned}$$

4. 连续抛掷一枚硬币3次,求既有正面又有反面出现的概率.

解 用A表示既有正面又有反面,抛掷一枚硬币3次,有$n=2^3$种不同的结果,其中只出现正面或只出现反面各有一种情形,即$n_{\bar{A}}=2$,故

$$P(\bar{A})=\frac{n_{\bar{A}}}{n}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

5. 在分别写有2,4,6,7,8,11,12,13的8张卡片中任取两张,把卡片上的两个数字组成一个分数,求所得分数为既约分数的概率.

解 从分别写有2,4,6,7,8,11,12,13的8张卡片中任取两张组成一个分数,共可组成$n=8\times7$个分数.要使取出卡片组成的分数为既约分数,如一张卡片为2,4,6,8,12之一,另一张只能为7,11,13之一(5×3种);如一张为7,11,13之一,则另一张可以是剩下的7张之一(3×7种).如用A表示所得分数为既约分数,则A包含$n_A=5\times3+3\times7=36$个样本点,故

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}.$$

6. 一部5卷文集任意地排列在书架上,卷号自左向右或自右向左恰好为1,2,3,4,5顺序的概率等于多少?

解 一部5卷文集任意排列在书架上,共有$n=5!$种排法.用A表示卷号自左向右或自右向左恰好为1,2,3,4,5卷的顺序,则A包含的样本点数为$n_A=2$,故

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}.$$

7. 10把钥匙中有3把能打开某一门锁,今任取两把,求能打开该门锁的概率.

解 从10把钥匙种任取两把,共有$n=C_{10}^2$种取法.用A表示任取的两把钥匙能打开门锁,则取出的两把钥匙中应至少有1把来自于能打开门锁的3把钥匙,即A含有$n_A=C_3^1C_7^1+C_3^2$个样本点,所以

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{(C_3^2+C_3^1C_7^1)}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

8. 一副扑克牌有 52 张，进行不放回抽样，每次一张，连续抽取 4 张，计算下列事件的概率：(1) 四张花色各异；(2) 四张中只有两种花色．

解　从 52 张扑克牌中不放回地连续抽取 4 张，共有

$$n = 52 \times 51 \times 50 \times 49$$

种抽法．

(1) 用 A 表示四张花色各异．事件 A 发生，可考虑第一张是从 52 张花色中抽取的，第二张是从余下的三种花色共 39 张中抽取的，第三张是从余下的两种花色共 26 张中抽取的，第四张是从最后一种花色共 13 张中抽取的，故 A 包含

$$n_A = C_{52}^1 C_{39}^1 C_{26}^1 C_{13}^1$$

个样本点，故

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4! \times 13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = 0.1\,055.$$

(2) 用 B 表示四张中只有两种花色．事件 B 发生，可考虑先从 4 种花色中抽 2 种，再从抽中的两种花色中要么各任取 2 张，要么任选一种花色从中任取 1 张、另一种花色抽 3 张．即 B 包含的样本点数为

$$n_B = C_4^2 (C_2^1 C_{13}^1 C_{13}^3 + C_{13}^2 C_{13}^2) 4!,$$

利用古典概率的计算公式有：

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{C_4^2 (C_2^1 C_{13}^1 C_{13}^3 + C_{13}^2 C_{13}^2) 4!}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{1\,248}{4\,165} = 0.299\,6.$$

9. 口袋内装有 2 个伍分、3 个贰分、5 个壹分的硬币共 10 枚，从中任取 5 枚，求总值超过壹角的概率．

解　用 A 表示任取的 5 枚硬币其总值超过壹角．从 10 枚硬币中任取 5 枚，有 $n = C_{10}^5$ 种取法，事件 A 发生有下列几种情形：2 枚 5 分币，从剩余的 8 枚中任取都行；1 枚 5 分币，必须至少有 2 枚分币．故 A 包含的样本点数为

$$n_A = C_2^2 C_8^3 + C_2^1 (C_3^3 C_5^1 + C_3^2 C_5^2),$$

利用古典概率的计算公式有：

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{[C_2^2 C_8^3 + C_2^1 (C_3^3 C_5^1 + C_3^2 C_5^2)]}{C_{10}^5} = \frac{126}{252} = 0.5.$$

10. 在 10 个数字 0,1,2,…,9 中任取 4 个(不重复)排成一排，求其恰构成一个 4 位偶数的概率是多少．

解 从0,1,…,9这10个数字任取4个,能排成$n=10\times9\times8\times7$个数,其中:个位数为0的4位偶数$9\times8\times7$个,个位数不为0的4位偶数$C_4^1\times8\times8\times7$个. 用$A$表示任取的4个数字能排成一个4位偶数,则$A$包含的样本点数

$$n_A=9\times8\times7+C_4^1\times8\times8\times7,$$

故

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{(9\times8\times7+C_4^1\times8\times8\times7)}{10\times9\times8\times7}=\frac{41}{90}.$$

11. 一个教室中有100名学生,求其中至少有一人的生日是在元旦的概率(设一年以365天计算).

解 用A表示至少有一个人的生日在元旦这一事件,则$\bar{A}$表示每个人的生日都不在元旦. 故

$$P(\bar{A})=\frac{364^{100}}{365^{100}}=0.760\,1,$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{364^{100}}{365^{100}}=0.239\,9.$$

12. 在[0,1]区间内任取两个数,求两数乘积小于$\frac{1}{4}$的概率.

解 设任取的两个数为x和y,用A表示两数的乘积小于$\frac{1}{4}$这一事件. 样本空间$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$,事件$A$可表示为

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,xy<\frac{1}{4},0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\right\}.$$

显然Ω的面积$S_\Omega=1$,容易求得A的面积

$$S_A=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{4x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1+\ln4}{4}=0.596\,6.$$

利用几何概率的计算公式有

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=0.596\,6.$$

习题 1.3

1. 一只盒子有3只坏晶体管和7只好晶体管,在其中取两次,每次随机地

取一只，作不放回抽样，发现第一只是好的，问另一只也是好的概率是多少？

解　用 A_i 表示第 i 次抽取的晶体管是一只好的，$i=1,2$. 根据古典概率的计算公式：如发现第一只是好的，另一只也是好的的概率

$$P(\bar{A}_2|A_1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

2. 某商场从生产同类产品的甲、乙两厂分别进货 100 件、150 件，其中：甲厂的 100 件中有次品 4 件，乙厂的 150 件中有次品 1 件．现从这 250 件产品中任取一件，经检验为次品，求它是甲厂生产的概率．

解　用 A 表示从 250 件产品中任取的一件产品是甲厂生产的，用 B 表示从 250 件产品中任取的一件产品是次品. 它是甲厂生产的概率为

$$P(A|B)=\frac{4}{5}=0.80.$$

3. 根据抽样调查资料，2000 年某地城市职工家庭和农村居民家庭按人均收入划分的户数如下：

户数	6 000 以下	6 000 ~ 12 000 元	12 000 元以上	合计
城市职工	25	125	50	200
农村居民	120	132	48	300
合计	145	257	98	500

现从被调查的家庭中任选一户，已知其人均收入在 6 000 元以下，试问这是一个城市职工家庭的概率是多少？

解　用 A 表示任选的一个家庭其人均收入在6 000元以下，用 B 表示任选的一个家庭为城市职工家庭. 根据贝叶斯公式，所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{\frac{200}{500}\times\frac{25}{200}}{\frac{200}{500}\times\frac{25}{200}+\frac{300}{500}\times\frac{120}{300}}=\frac{25}{145}=0.172\,4.$$

4. 某单位有 92% 的职工订阅报纸，93% 的职工订阅杂志，在不订阅报纸的职工中仍有 85% 的职工订阅杂志，从单位中任找一名职工，求下列事件的概率：

(1)该职工至少订阅报纸或杂志中的一种;(2)该职工不订阅杂志,但是订阅报纸.

解 用A表示职工订阅报纸,B表示订阅杂志. 由题设

$$P(A)=0.92, P(B)=0.93,$$

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.85,$$

故

$$P(AB)=0.862.$$

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=0.92+0.93-0.862=0.988.$

(2) $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

$=0.92-0.862=0.058.$

5. 某工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,各个车间的产量分别占全厂产量的25%,35%,40%,各车间产品的次品率分别为5%,4%,2%. (1)求全厂产品的次品率;(2)如果从全厂产品中抽取的一件产品恰好是次品,问这件次品是甲、乙、丙车间生产的概率分别是多少.

解 A_1,A_2,A_3分别表示任取一件产品是甲、乙、丙车间生产的,用B表示任取一件产品为次品,已知

$$P(A_1)=0.25, P(A_2)=0.35, P(A_3)=0.40,$$

$$P(B|A_1)=0.05, P(B|A_2)=0.04, P(B|A_3)=0.02.$$

(1) A_1,A_2,A_3是一完备事件组,根据全概率公式有全厂产品的次品率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02=0.0345.$$

(2)如任取的一件产品是次品,它是甲、乙、丙车间生产的概率分别依次为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times0.05}{0.0345}=36.23\%,$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.35\times0.04}{0.0345}=40.58\%,$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.40\times0.02}{0.0345}=23.19\%.$$

6. 有三个形状相同的罐,在第一个罐中有两个白球和一个黑球,在第二个罐中有三个白球和一个黑球,在第三个罐中有两个白球和两个黑球. 某人随机地取一罐,再从该罐中任取一球,问取出白球的概率是多少.

解　用 A_i 表示取出的球来自第 i 罐,$i=1,2,3$;用 B 表示取出的球是白球. 依题设

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},P(B|A_1)=\frac{2}{3},$$

$$P(B|A_2)=\frac{3}{4},P(B|A_3)=\frac{2}{4},$$

A_1,A_2,A_3 是一完备事件组,依全概率公式得取出的球是白球的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=0.638\,9.$$

7. 三部自动机器生产同样的汽车零件,其中机器 A 生产的占 40%,机器 B 生产的占 25%,机器 C 生产的占 35%,平均说来,机器 A 生产的零件有 10% 不合格,对于机器 B 和 C,相应的百分数分别为 5% 和 1%. 如果从总产品中随机地抽取一个零件,发现为不合格,问:(1)它是由机器 A 生产出来的概率是多少?(2)它是由哪一部机器生产的可能性最大?

解　用 A_1,A_2,A_3 分别表示从总产品中随机抽取的一个零件是机器 A、机器 B、机器 C 生产的,用 B 表示零件为不合格品. 依题设 A_1,A_2,A_3 是一完备事件组,且

$$P(A_1)=0.40,$$

$$P(A_2)=0.25,$$

$$P(A_3)=0.35,$$

$$P(B|A_1)=0.10,$$

$$P(B|A_2)=0.05,$$

$$P(B|A_3)=0.01.$$

(1)如发现随机抽取的一个零件为不合格品,则它是机器 A 生产的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{0.4\times0.1}{0.4\times0.1+0.25\times0.05+0.35\times0.01}$$

$$=\frac{0.04}{0.056}=0.7143.$$

(2)又由于 $P(A_1|B)+P(A_2|B)+P(A_3|B)=1$,由此可以看出,该不合格品为机器 A 生产的可能性最大.

8. 设 $P(A)>0$,试证:$P(B|A)\geqslant1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}$.

证明 因 $P(A+B)\leqslant1$,所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A+B)}{P(A)}$$

$$\geqslant1+\frac{P(B)-1}{P(A)}=1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}.$$

习题 1.4

1. 一个工人看管三台机床,在一小时内机床不需要工人看管的概率分别为 0.9,0.8,0.7,求在一小时内 3 台机床中最多有一台需要工人看管的概率.

解 用 A_i 表示第 i 台机床在一小时内需要工人看管,$i=1,2,3$. 依题设 A_1,A_2,A_3 相互独立且

$$P(A_1)=0.1,P(A_2)=0.2,P(A_3)=0.3.$$

故在一小时内 3 台机床中最多有一台需要工人看管的概率

$$\begin{aligned}P&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\\&=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+\\&\quad P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)\\&=0.9\times0.8\times0.7+0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3\\&=0.902.\end{aligned}$$

2. 电路由电池 A 与两个并联的电池 B 及 C 串联而成,设电池 A,B,C 损坏的概率分别是 0.3,0.2,0.2,求电路发生断电的概率.

解 用 A,B,C 分别表示电池 A、电池 B、电池 C 损坏,用 D 表示电路发生断电. 由题设 A,B,C 相互独立,$D=A\cup BC$,且

$$P(A)=0.3,P(B)=0.2,P(C)=0.2.$$

故

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A\cup BC)=P(A)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(A)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\&=0.3+0.2\times0.2-0.3\times0.2\times0.2=0.328.\end{aligned}$$

3. 加工某一零件需经过四道工序．设第一、二、三、四道工序的次品率分别为2%，3%，5%，3%，假定各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率．

解　用A_i表示第i道工序出次品($i=1,2,3,4$)，用B表示加工的零件为次品，则

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\bar{B})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)\\&=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)\\&=1-0.98\times0.97\times0.95\times0.97=0.124.\end{aligned}$$

4. 抛掷一枚质地不均匀的硬币8次，设正面出现的概率为0.6，求下列事件的概率：(1)正好出现3次正面；(2)至多出现2次正面；(3)至少出现2次正面．

解　这是伯努利概型问题，其中$n=8,p=0.6$.

(1) 正好出现3次正面的概率

$$P_8(3)=C_8^3\times0.6^3\times0.4^5=0.1239.$$

(2) 至多出现2次正面的概率

$$\begin{aligned}P_1&=P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)\\&=C_8^0\times0.6^0\times0.4^8+C_8^1\times0.6^1\times0.4^7+C_8^2\times0.6^2\times0.4^6\\&=0.0498.\end{aligned}$$

(3) 至少出现2次正面的概率

$$\begin{aligned}P_2&=1-[P_8(0)+P_8(1)]\\&=1-(C_8^0\times0.6^0\times0.4^8+C_8^1\times0.6^1\times0.4^7)\\&=0.9915.\end{aligned}$$

5. 设每次射击时命中率为0.2，问至少必须进行多少次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于0.9.