经典数学的综合教材

H.B. GRIFFITHS
P.J. HILTON 著

第四册

贵阳师范学院数学系
一九八三年十月

A13

肖荣圭赠

0/13
50
=1-4

0/13
50
=4

22/14

第四册　目录

第七部份

微　积　分

5.120

第七部份(续)

微积分的补充课题

第八部份
基础

其它三册简目

第一册

第二册

IV
目

第七部份　微积分

人类思想的一个伟大发明就是微分和积分的计算（为简略起见，叫做'微积分'）．微积分的起源要追溯到希腊人，但是，直到十八世纪它的发展结果由牛顿（Newton）、莱布尼兹（Leibniz）和其它人完成之后才成为公认的数学分支．虽然这一学科开始的逻辑基础靠不住，但是先驱者们还是取得了巨大的进展，并且由他们在十九世纪的继承者们艰苦努力地构成了这个稳固的基础．他们精密而详尽的研究本身便成为现在称为分析学的数学分支，而这个分支侧重于微积分的理论研究而不侧重于实用．分析已成为British大学的数学课程的重要组成部份，尤其是在G·H·Hardy的书[52]的影响下，而这本书在当时是很新的．可惜，这门学科是困难的；常常用它作为使大学生继续学习更深的数学标准，同时这门学科也很难教，以致使许多学生由于不能学好分析而被迫放弃数学．在大学里对分析的安排虽然非常强调，但是对学生以后到中学中去教微积分，在方法上几乎没有影响．由于大学生来自中学，又只掌握十八世纪的微积分精神（以后它的优点和缺点），因此他们必须在方法上产生一个飞跃，跃进到分析讲课所需要的完全不同的方法上去．好在一些大学教师对这些学生的困难是同情的，并且他们将针对这些情况作某些改进．

本书的这一部份，我们努力阐述在某种意义上的初等微积分，我们希望对于学生来说作为一个中途站，即在先'直观'而后'严格'的方法之间（如像他们专门描述过一样）．于

是，我们用集论的术语精确地叙述所有的基本定理，但是，我们省略我们认为是困难的并且属于分析的那些证明。例如，我们有时借用第二十五章中的结果，而不要求它们的证明，完全可以给出这些留下来的证明，即这些证明可以从一些'严格的'结果推出来（常常是纯代数形式的推导）当学生熟练时它们并不需要证明（更坏的情况，可以忘记已学过的知识）；仅仅当他们的精力和好奇心使他看标准的解释是足够有力时，这些'严格的'定理才需要证明。喜爱研究分析的人常认为每进行一步都应证明，而非常忽视他们自己采用各种结果（例如，数理逻辑的结果），如果需要的话，他们总要证明这些结果。我们采用这种观点：始终存在间隙；清楚地认出它们是重要的；微积分的训练应该包含学会检验定理的前提条件在应用中是满足的。实际上，在他们从事的专业中要求大多数大学毕业生能够应用定理而不要求其证明。

在这一部份的后面一些章节中，我们打算首先考虑极限和它们的代数（因为微积分总基于极限的概念）；然后再考虑连续函数和可微函数的代数；积分和微积分基本定理；'初等函数'和多实变量函数。我们也指出：如何把这一学科分开成一些分支以及这些分支的发展趋向，我们的一些讨论对于具有作为传统介绍的'中学'微积分知识的人来说是更有趣味的，即使这样的知识不是基本的。

开始值得注意的是，我们的论述显然依赖于实数集IR是一全序域这一事实，我们不必提到IR的完备性（看24．6），因为这个性质仅对证明（而不是对叙述）我们省略证明的定理是必要的．一致性和完备性的问题仅在微积分

的第二估计（当学生知道某一有价值的估计并且关心它时）才被引出来（除非有人可以改进教这些概念的一般方法）.

第二十六章 $\mathbb{R}^1$上代数

26.1 区间

我们将要涉及到函数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$，这里 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一类特殊的子集，叫做<u>区间</u>，其形式是

26.1.1 $\{x \mid a < x < b\}$， $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

或者

$\{x \mid a \leqslant x < b\}$， $\{x \mid a < x \leqslant b\}$.

第一个形式叫做<u>开的</u>，第二个形式叫做<u>闭的</u>，其余的叫做<u>半开的</u>；相应地将它们分别表为 $I = \langle a, b \rangle$， $I = \langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$， $I = \langle\!\langle a, b \rangle$， $I = \langle a, b \rangle\!\rangle$. [许多作者分别用记号 (a, b)，$[a, b]$ 来代替，并且其它一些记号也是通用的]

这样的区间叫做是<u>有限的</u>或<u>有界的</u>，有時我们必须考虑'无限的'或'无界的'区间 J，例如，下面的形式

26.1.2 $\langle -\infty, b \rangle = \{x \mid x < b\}$

$\langle\!\langle a, \infty \rangle = \{x \mid x \geqslant a\}$

I 的'端点'在 26.1.1 中是 a，b，但 b，a 分别是 26.1.2 中两个区间的唯一端点；'∞'不是端点.

26.2 代数运算

为了理论讨论，考虑一切可能的函数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$（I 固定）的集是方便的，设 f，g：$I \longrightarrow \mathbb{R}$ 为任何函数而 $\lambda \in \mathbb{R}$，则对于每个 $x \in I$，由

IV

$$
26.2.1 \quad \begin{cases} (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) \\ (\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x) \end{cases}
$$

定义了三个函数 $I \longrightarrow \mathbb{R}$，分别记为 $f+g$，$f\cdot g$，$\lambda\cdot f$．法则 26·2·1 常常被描述为点法则（pointwise），因为它们是由它们在每一点的值确定的．

应用最初的记号，我们把这个函数集表为

$$26.2.2 \qquad \mathbb{R}^I .$$

但我们强调指出，我们把它不'恰好'考虑为一个集，而考虑为一个代数．在这个代数中有（在闭合的情况下）加法、乘法以及 $\mathbb{R}$ 中的数乘的运算 26·2·1，更确切地说，我们由例 19·1 2（iii）中看出 $\mathbb{R}^I$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，且由例 9·2·8 看出 $\mathbb{R}^I$ 是带有单位元的可交换环；此外，数量乘法和环乘法同时被如下容易验证的法则所约束：

$$26.2.3 \qquad (\lambda\cdot f)\cdot g = \lambda\cdot(f\cdot g) \qquad (\lambda\in\mathbb{R},\ f,\ g\in\mathbb{R}^I)$$

于是，$\mathbb{R}^I$ 叫做'关于 $\mathbb{R}$ 或实代数'的可交换代数．在微积分中我们对 $\mathbb{R}^I$ 的'子代数'更感兴趣：

26·2·4 定义．设 $X \subseteq \mathbb{R}^I$．若（i）X 是 $\mathbb{R}^I$ 的向量子空间，（ii）X 是 $\mathbb{R}^I$ 的子环．则称 X 为 $\mathbb{R}^I$ 的子代数．

（条件 26·2·3 是自然满足的，因此按上述定义，X 是一个代数．）　除 $\mathbb{R}^I$ 自身外，$\mathbb{R}^I$ 的子代数的两个简单而重要的例子是 $\mathbb{R}$ 和 I 上的实多项式之集 $\mathbb{P}(I)$．常函数 1 位于 $\mathbb{R}^I$ 中，因而每个 $k\in\mathbb{R}$ 也位于 $\mathbb{R}^I$，因为 $k = k\cdot 1$；于是，$\mathbb{R}$ 自然嵌入在 $\mathbb{R}^I$ 中作为子集．并且现在容易验证这个子集实际上是子代数。又，I 上的恒等函数（这里用 $\phi: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 表示）在 $\mathbb{R}^I$ 之中，所

从每一个幂（利用 26·2·1 归纳地定义，但，实际上 $\phi^n(x) = x^n$）也在 $\mathbb{R}^I$ 之中，所以，关于项数用归纳法得知 $\mathbb{R}^I$ 包含有如下形式的多项式：

$$p = \sum_{r=0}^{n} c_r \phi^r \qquad (c_r \in \mathbb{R} \quad 0 \leq r \leq n) \tag{26·2·5}$$

我们立刻可以不限制术语并且不管问题的范围如何均可以归结于'多项式'

$$p = \sum_{r=0}^{n} c_r \phi^r ,$$

而现在，由于多项式的和，积与数乘也是多项式，因而满足条件 26·2·4，所以 $\mathbb{P}(I)$ 为 $\mathbb{R}^I$ 的子代数（它是同时含有 1 和 ϕ 的最小子代数）．引进实代数概念的目的是为了帮助我们简明地叙述一些定理和尽可能地提出一些问题，我们当然不详细研究代数，但首先给读者介绍参考的是［12］中关于 Wedderburn 的 Bell 附注，他在代数结构上的先驱工作对数学是非常重要的。

练习 1

(i) 证明 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^I$ 的最小子代数，即 $\mathbb{R}$ 位于 $\mathbb{R}^I$ 的每个子代数之中．

(ii) 详细验证 $\mathbb{R}^I$ 满足它作为实代数所必须的每一条件，你能求出含于 $\mathbb{P}(I)$ 内的 $\mathbb{R}^I$ 的任一有意义的子代数吗？在 $\mathbb{P}(I)$ 的外部呢？

(iii) 证明：若 A 为任一集，B 为具有单位元的任一可交换环，则在所有函数 $A \longrightarrow B$ 组成的集 B^A 中可以定义类似于 26·2·1 中的那些运算，验证在 B^A 中满足向

量空间和环的所有公理，只要用‘$\lambda \in B$’代替‘$\lambda \in \mathbb{R}$’．于是，根据定义，B^A 是关于B的代数，其结构是由B的结构诱导的；并且 B^A 含有用类似于 $\mathbb{R}^I$ 含有 $\mathbb{R}$ 的那种方法所嵌入的B的复制。

(iv) 关于域F的代数定义为任一集X，而X同是环（不必是可交换的）和关于F的向量空间，且X还满足26·2·3．证明所有实的 $n\times n$ 矩阵之集，在矩阵乘法和加法的运算下，组成关于 $\mathbb{R}$ 的代数．若V具有维数n和基 $e_1,\cdots,e_n$．证明一旦知道V中的乘法，就知道所有乘积 e_ie_j 的‘乘法表’．当V为 $\mathbb{C}$，e_1 为1，e_2 为 i 时，这个乘法表是什么？

(v) (iv)中关于F的代数如果没有零因子（即，如果 $xy=0 \Rightarrow x=0$ 或 $y=0$），则称它为可除代数．证明实代数 $\mathbb{R}^I$ 不是可除代数，$n\times n$ 实矩阵的矩阵代数当 $n>1$ 也不是可除代数．[见24·9]

(vi) 如果函数 $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$，对 $u, v\in I$，当 $u<v$ 时，$f(u)<f(v)$，则称f为严格增的；如果当 $u<v$ 时，$f(u)>f(v)$，则称f为严格减的；严格增和严格减统称为严格单调．证明严格单调函数是一对一的．问严格单调函数构成 $\mathbb{R}^I$ 的子代数吗？

(vii) 使26·2·4的论点定形如下，定义函数 $\theta: \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^I$ 为：对每个 $a\in \mathbb{R}$，$\theta(a)$ 为常函数，它的值永远为 a，证明：θ 为单射；θ 为 $\mathbb{R}$ 到向量空间 $\mathbb{R}^I$ 的线性变换；θ 为 $\mathbb{R}$ 到环 $\mathbb{R}^I$ 的同态．（如此，称 θ 为代数的同态．）当我们‘把 $\mathbb{R}$ 当作 $\mathbb{R}^I$ 的子代数’时，我们内心认为 a 与 $\theta(a)$ 一致并且我们只说‘函数2’而不说‘函数 $\theta(2)$’．没有多义性出现，因为 θ 是 1——1 的，且 $\theta(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 的适合

复制，因为θ为同态．

(viii) 设 $J \supseteq I$ 为一个区间．定义函数 $\rho: \mathbb{R}^J \longrightarrow \mathbb{R}^I$ 为：对每个 $f \in \mathbb{R}^J$，指定它的限制 $f|I$（见2.6.4）与之对应。证明：ρ 是代数的同态；ρ 是在上的；但 ρ 不是1—1的。

26.3 多项式

虽然我们不可能希望在这本书中说明多项式，但是，$\mathbb{R}^I$ 中所有多项式的子代数 $\mathbb{P}(I)$ 在微积分中呈现出最重要的价值，这是因为有维尔斯特拉斯（Weierstrass）定理，这个定理告诉我们：若 I 为闭的和有限的，则 $\mathbb{R}^I$ 中的每个连续函数可以用 $\mathbb{P}(I)$ 中的多项式来任意接近．现在在称为泛函分析的数学分支里有几个应用实代数的优美证明；由此引起的抽象化使此定理能够推广到不同于 $\mathbb{P}(I)$ 的函数类．经典理论应用了数学物理的‘热方程’的解，并且由此可知，在一些实际计算问题的启发下，鉴于维尔斯特拉斯定理多少抽象纯数学便产生了．

练习2

(i) 证明 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(I)$ 中的偶次多项式构成 $\mathbb{P}$ 的子代数．对于有零常数项的多项式有同样的结论．证明带有有理系数多项式不构成 $\mathbb{P}$ 的实子代数，即使它们构成一个子环。

(ii) 证明 $\mathbb{P}$ 为可除代数．{应用‘非零多项式只有有限多个根’这一事实来证明仅零多项式表示 $\mathbb{R}^I$ 中的0.}

(iii) 用如下等式定义一实函数 $D: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$：

$$D\left(\sum_{r=0}^{n} c_r \phi^r\right) = \sum_{r=1}^{n} r c_r \phi^{r-1}.$$

证明D为线性变换，但不是环同态．试问D的象是什么？证明D不是单射．证明：若在$\mathbb{P}$中$Df=Dg$，则$f-g$为常号．试问用什么来代替（错误的）陈述$D(fg)=D(f)D(g)$？

(iv) 在练习1(viii)中，证明函数ρ把$\mathbb{P}(J)$映射成$\mathbb{P}(I)$，并且ρ为实代数的同态．应用代数基本定理（22·5·2）来证明$\rho'=\rho|\mathbb{P}(J)$为1—1的，证明ρ'是在上的（我们把它称为代数的同构）．

(v) 证明：若n、$m\in N$，则$\phi^n\cdot\phi^m=\phi^{n+m}$且$\phi^n\circ\phi^m=\phi^{nm}$.

26.4 倒数

假设区间I不含有原点$0\in\mathbb{R}$．那么在$\mathbb{R}^I$中存在函数使得对每个$x\in I$它指定一个数$x^{-1}\in\mathbb{R}$．我们将这函数表为

26·4·1 $\quad 1/\phi: I\longrightarrow\mathbb{R} \qquad (1/\phi)x=x^{-1}$

（没有标准记号，但我们避免用记号ϕ^{-1}，这是因为它与反函数（2·9·7）的记号混淆）．当然，'$y=x^{-1}$'的最大（实数）定义域是$\mathbb{R}-\{0\}$，且26·4·1中的函数是互反函数

26·4·2 $\quad 1/\phi: \mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$

在I上的限制．当然，我们可以把$1/\phi$限制在$\mathbb{R}-\{0\}$的任何子集上，即不必是一个区间．在这用术语（见2·6·2）