

全國測繪科學技術經驗交流會議

資料選編

平面控制三角點加密

建築工程出版社

出版說明

一九五九年二月在武汉召开的全国測繪科学技术經驗交流會議，广泛地交流了測繪科学技术各方面的先进經驗和技术革新成就。今由大会秘書处組成編輯委员会将有关資料按專業編选汇集，予以出版，以供全国測繪工作者学习参考。

为加快出書時間，本資料选編由測繪、建筑工程、水利电力、煤炭工业等四个出版社協作出版。

本冊为第四卷（地形測量）第一章（平面控制）第三节，共分为两部分：第一部分介紹联接三个以上已知点的綫形網方法、測角内分点法及其应用的推广、图根三角鎖一次作业和使用高三脚架施測图根点的經驗。第二部分包括綫形鎖的討論、綫形鎖精度的試驗、綫形網平差、綫形鎖簡易和严密平差及精度估算等。

目 录

第一部分 方法与經驗

- 一、联接三个以上已知点的綫形網長江流域规划办公室 (1)
- 二、在二等三角点內直接插入四等导綫的体会
.....河北省水利厅勘测設計院 (15)
- 三、測角內分点法及其应用武汉黑色冶金設計院勘察公司 (26)
- 四、平板仪图解交会法測定平面控制点的若干經驗
.....綜合編写 (49)
- 五、森林地区水庫測量中加密測图控制的經驗
.....水利电力部东北勘测設計院 (56)
- 六、使用高三脚架施測图根点的經驗松辽石油勘探局 (59)

第二部分 綫形網和綫形鎖

七、精度估算

- (一)綫形鎖的討論中国人民解放军測繪学院 (61)
- (二)关于綫形鎖精度的試驗
.....水利电力部东北勘测設計院 (85)

八、平差計算

- (一)綫形網严密平差的运用云南省水利电力局 (88)
- (二)綫形鎖的簡易平差長江流域规划办公室
安徽省地質局測繪大队 (95)
- (三)綫形鎖的严密平差及精度計算武汉測繪学院 (106)
- (四)測角图根左侧平差計算用表
.....四川石油管理局地質調查处 (119)

第一部分 方法与經驗

一、联接三个以上已知点的綫形網

长江流域规划办公室

按照国家規定大地測量布点方案，是在二等網內陸續插入三、四等網，而我們施測地形时，还要补充解析图根——五等網。

當我們布置某区的三、四等網时，发现高标的比重仍然很大，不但需要巨額的建标經費，而且材料困难。我們是怎样克服这种困难的呢？

我們測图既然还要五等網，是不是我們直接在二等網內布置五等呢？这样做，不但減少了层次，而且有可能避免高标，毋須高精度仪器；問題是：会不会降低精度，我們認為質量是可以保証的。由此減少了高标，节省了精密仪器，大大地節約了国家的資金。

（一）綫形網的类型和觀測方法

（1）綫形網系許多綫形鎖組成的網形，是用五等三角直接联系到二等，取消了三、四等，其图形的种类如图1～6。

（2）綫形網的边長、角度和造标埋石的規定：

綫形網的边長如为滿足1/1万或1/5千測图用，其边長为2—5公里。特別情况下边長亦可达10公里，但以接近等边三角形为原則。

綫形網，屬五等三角点，只埋設一层混凝土标石，在标石上用鉛絲树立旗竿，旗竿并涂以紅白漆，直接觀測旗竿。如为保持

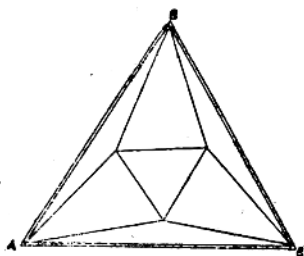


图 1

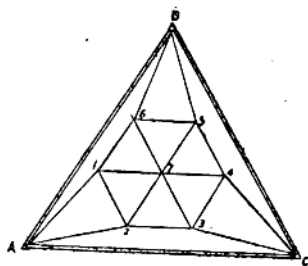


图 2

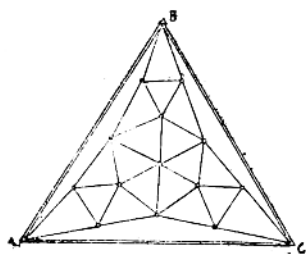


图 3

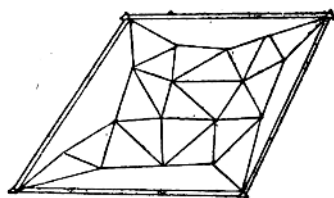


图 4

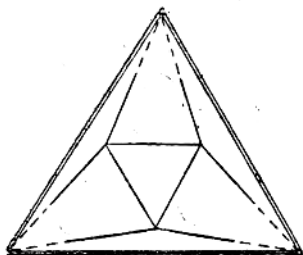


图 5

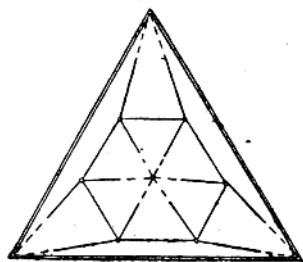


图 6

永久，亦可堅立簡單三脚錐形標，或建造獨脚觇標。

如遇困难地区，亦可采用交会綫形網，亦即網中有一部分点用前方交会法，交会綫形網图形如图 5 及图 6。

交会綫形網的优点是：在困难地区可以堅立高竿，用前方交会法，减少选点通視的困难，并可节省观测工作量；但它的缺点是沒有图形条件，其縱向誤差和橫向誤差較大，故只在困难地区方可以采用。

(3) 观测方法：

綫形網均无须直接观测高級边作为連結边，这样可避免观测長边。这种观测方法叫做不定向的綫形網。

綫形網如为滿足 1/5 千測图需要，可用 T_2 型仪器观测 3 測回，归零差，測回差，两倍照准差变动范围 15"，三角形閉塞差 12"，測角中誤差 5"。

(二) 精度 計 論

綫形鎖和綫形網推算边長都不是用直接起算边，而是将边長投影到已知边上，这个投影边長和已知边長的差数，就是边的改正数，如图 7 綫形鎖 $A-a-b-c-d-e-B$ ，按單鎖图形平差（即只加角方程式的平差）的縱向誤差（即 $\overline{A b} + \overline{b d} + \overline{d B}$ 的綫長誤差）为

$$\left(\frac{m}{S}\right)^2 \cdot \frac{4n+3}{9} \quad (1)$$

（上式原理見克 拉 索 夫 斯 基 著
“大地測量学”上卷和契巴塔廖夫著
“測量学”下卷第二分冊）

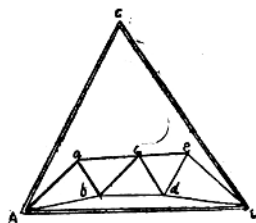


图 7

因綫形鎖起算边首先是假設的，起算的誤差可認為沒有誤差，故上式沒有考慮起算边的誤差，但是綫形鎖的边的改正值系由 $AB (\overline{A b} + \overline{b d} + \overline{d B})$ 求得。設二等三角 AB 边長誤差为 m_{AB} ，綫形鎖 $\overline{A b} + \overline{b d} + \overline{d B}$ 的縱向誤差为 m'_{AB} ，則得綫形

鎖邊長誤差: $m_l^2 = m_{AB}^2 + m'_{AB}{}^2$,

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \left(\frac{m_l}{AB}\right)^2 &= \frac{(m_{AB})^2}{(AB)^2} + \frac{(m'_{AB})^2}{(AB)^2} \\ &= \left(\frac{m_{AB}}{AB}\right)^2 + \left(\frac{m}{S}\right)^2 \frac{4n+3}{9}. \end{aligned} \quad (2)$$

如按綫形網进行平差, 其权数应增加 2 倍, 則得边長估算公式为:

$$\frac{(m_l)^2}{(AB)^2} = \frac{(m_{AB})^2}{(AB)^2} + \left(\frac{m}{S}\right)^2 \cdot \frac{4n+3}{18} \quad (3)$$

式中 m 为測角中誤差, n 为間隔边, $S = 206265$ 。

設二等三角边長相对中誤差为 $1/100000$, 五等三角測角中誤差为 $10''$, 如图 1, $n = 2$, $m = 10''$, 代入 (3) 式得綫形網边長相对誤差为:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_l}{AB}\right)^2 &= \left(\frac{1}{100000}\right)^2 + \left(\frac{10}{206265}\right)^2 \cdot \frac{4 \times 2 + 3}{18} \\ \frac{m_l}{AB} &\approx \frac{1}{22000}^\circ. \end{aligned}$$

如图 2, 綫形網边長相对誤差为 (即 $n = 3$):

$$\frac{m_l}{AB} \approx \frac{1}{22000}^\circ.$$

如图 3, 綫形網边長相对誤差为 (即 $n = 4$):

$$\frac{m_l}{AB} \approx \frac{1}{20000}^\circ.$$

若測角中誤差为 $5''$, 則得图 1 边長相对中誤差为 $\frac{m_l}{AB} \approx$

$\frac{1}{44000}$; 图 2 边長相对中誤差为 $\frac{m_l}{AB} \approx \frac{1}{44000}$; 图 3 边長相对中

誤差为 $\frac{m_l}{AB} \approx \frac{1}{40000}^\circ$.

从上面精度的論証，当五等三角測角中誤差为 $10''$ ，由图 1—3 綫形網边長精度可达 $1/20000$ 。通常我們由三、四等三角加插的五等三角只要求 $1/8000$ ，显然用五等網直接加插于二等三角內，其精度很高，不仅可滿足 $1/10000$ 測圖用，还可以滿足 $1/5000$ 測圖用。如五等測角中誤差为 $5''$ ，則可达 $1/40000$ 以上，更可以滿足 $1/2000$ 大比例尺測圖用。

(三) 綫形網計算

我們現在以实例介紹綫形網計算方法，其中分概略坐标計算及平差計算。目的是想把各种結果比較一下，看看精度情况。这种概略坐标計算，或以角度为对象的坐标平差計算，在节省時間与精度方面，并不是理想的。我們还想用条件平差以及其他方法作进一步的比較，希望在实践中繼續加以研究和改进。

这个例子是1958年12月觀測的，用威特 T_2 儀器測三測回，觀測精度不高，測角中誤差为 $\pm 5''.4$ ，三角形最大的闭合差为 $24''$ 。

計算步驟，已分別在每一張計算圖上說明了。下面仅将这次实例采用的四种方法不同之处，簡述一下：

第一二两种方法，为概略計算，不平差。其步驟在图 8 上計算近似边長及归心改正数，在图 9 上計算近似坐标及曲率改正数，在图 10 或图 11 上計算坐标。

这两种方法，在图 10 或图 11 上計算概略坐标，略有不同。第一种方法在图 10 上进行，以 $G-F$ 为結边（即起始边），按平面角推算各边長，从三已知边方位角推算結边之方位角，并取中数，按各推算路綫之差数分別改正各边之方位角。边長亦向三已知边投影，求出平均改正系数，以改正各边長。然后以改正后方位角及边長，从三已知点推算座标，以 G 为結点，取权中数，作为最后值，以分別改正各推算路綫之坐标。

第二种在图 11 上按三根导綫計算各点之坐标。方位角由一已知边閉塞到另一已知边，并分配其閉塞差，按改正后方位角及以 $G-F$ 为起始边推得之平面边，計算各点之概略增值，将推算路

点 名	縱 座 標				X Y	高 斯 平 面 觀 測 值	角 度 改 正 數 (V)				備 注
	第一 种 方 法	第二 种 方 法	第三 种 方 法	第四 种 方 法			第一 法	第二 法	第三 法	第四 法	
F	3,261,688.65	3,261,688.62	3,261,688.68	3,261,688.68	44 51 07	+6	+14	+2.9	+2.8		
J	417,694.04	417,693.98	417,694.00	417,693.99	54 23 44	-2	+9	-2.3	-2.1		
I					80 45 10	-5	-24	-1.7	-1.7		
W					+1						
F	3,258,394.75	3,258,394.71	3,258,394.78	3,258,394.77	44 05 47	+11	+16	+6.0	+5.9		
K	419,736.99	419,736.98	419,736.96	419,736.96	79 53 19	-11	-12	+4.4	+4.5		
J					56 00 41	+13	+9	+2.6	+2.6		
W					-13						
K	3,259,152.49	3,259,152.35	3,259,152.71	3,259,152.71	59 25 40	+2	+7	-1.7	-1.8		
L	423,495.63	423,495.59	423,495.50	423,495.49	43 01 08	+3	+4	-3.8	-3.7		
J					77 33 22	-15	-21	-4.5	-4.5		
W					+10						

續表

G	3,266,113.47 415,019.04	3,266,113.42 415,018.86	3,266,113.42 415,019.24	3,266,113.42 415,019.24	52 38 17	+10	+46	+6.2	+6.3
H					72 17 59	+7	-14	+0.8	+0.9
M					55 03 36	-9	-24	+1.0	+0.8
W					-8				
M					67 16 15	0	+5	-0.7	-0.8
H	3,262,467.75 414,006.69	3,262,467.59 414,006.68	3,262,467.43 414,006.85	3,262,467.44 414,006.83	65 34 21	-13	-35	-1.8	-1.6
N					47 09 31	+6	-23	-4.6	-4.6
W					+7				
Q					35 43 23	-14	-14	-11.0	-11.1
M					90 28 31	-7	+7	-6.2	-6.3
N					53 48 30	-3	-17	-6.8	-6.6
W					+24				
(VV)						3946	13064	558.35	560.45

綫的增值之代数和与两已知点縱橫坐标差，求增值改正系数，分別改正增值，依次得出各点縱橫坐标。若仍与已知点縱橫坐标小有不符，按点配賦之。

概略坐标計算方法，第一种精度較高，在投影計算，方位角計算，坐标計算，都是从三个高級点，由三条不同路綫推算結果取中数，并将其不符值加以配賦。惟因計算較繁，是其缺点。

第二种計算簡便，但精度稍遜，因分三条导綫推算只与两已知点坐标发生联系。

第三、四种方法为平差計算。化至标石中心和高斯平面計算与概略計算相同。即近似边長归心改正数計算（如图8）及近似座标曲率改正数計算（如图9）等工序。

第三种方法，即以近似坐标反解各边的坐标方位角，与化算至中心的平面角度及近似边長，进行系数及自由項計算，从而作出誤差方程式并解算得出坐标及角度改正数。

第四种方法与第三种方法所不同的地方，是反解方位角所用的坐标为概略坐标（即用第一种方法由图3求得之概略坐标），而不是近似坐标，其他各項計算是一样的。

上面四种結果比較如上表。

由上表可以看出，第三、四两种平差方法所得結果基本是一致的。坐标差数最大为 ± 0.03 公尺，角度改正数 V 最大差为 $\pm 0''.2$ ，而我們計算的要求，坐标为公寸，角度为 $1''$ 。两种平差方法所求得的平差后測角中誤差及点位中誤差是一样的，即： $m = \pm 6''.1$ ， $m_x = \pm 0.14$ 公尺， $m_y = \pm 0.17$ 公尺， $m_z = \pm 0.22$ 公尺，因此平差所用的近似坐标，可随使用什么方法推算。虽說“这些坐标希望具有这样的精度，使平差后坐标改正数不超过一公尺”（H. A. 烏尔馬耶夫“三角測量計算手冊”第129頁莫斯科編輯局1932年版），但是我們的坐标只計算到公分。而且綫形網有高級点控制，近似坐标的誤差不会过大。即使坐标改正数大于一公尺，根据我們这次試算的結果，并无影响。

另外，第一种概略坐标与第四种平差后坐标比較，座标最大

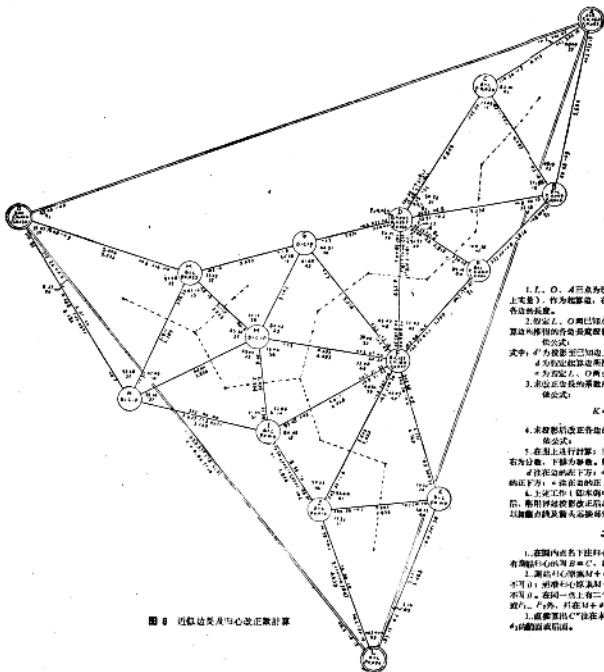


图 8 近似边长及归心改正数计算

说 明

一 近似边长计算

1. L, O, A 三点为已知点；假定 L, J 二点距离为 5000 公尺（按图上丈量），作为起算边，在图上射影点线投影 L, O 所成边长同三角原边长的比值为 K 。

2. 假定 L, O 两已知点的方位角为 0° （即正指正北方向），将假定边长边所得的各边长投影至 $L-O$ 边上。

按公式：

$$d' = d \cos \alpha$$

式中： d' 为投影至已知边上的边长。

d 为假定边长所得之各边长。

α 为假定 L, O 两点为正指正北时所得各边的方位角。

3. 求改正边长的乘数 K ：

按公式：

$$K = \frac{S}{L-O} \quad (S \text{ 为 } L-O \text{ 已知边长})$$

4. 求投影改正各边的边长 D ：

按公式：

$$D = K d$$

5. 在图上边行计算：三角形内角平分所注法，上一边左为角度数，右为边数，下标为边数。如： $45^\circ 01' 18''$ 为 45.021 。

6. 注在边的下方： d' 注在边的右下方，并加括号表示之； D 注在边的正下方： $=$ 在边的正下方。

7. 求改正边长（即本图中三角形中点以边长及箭头通数）按公式，求得修正边长及箭头通数（本图中三角形中点以边长及箭头通数）。

二 归心改正数计算

1. 在图内点各下注归心改正数，并冠以 B, P, R 表明之。没有归心改正数 $B=C$ ，没有归心改正数 $B=C=P$ ，没有归心改正数。

2. 求归心改正数 B ：写在相应方向线的上面（如果没有归心改正数 B ）：归心改正数 B ，写在相应方向线的下面（如果没有归心改正数 B ）。在同一点上有二个归心改正数，则在图内点各下注到边 B_1, B_2 或 P_1, P_2 ，并冠以 B 或 P 之下加注 B_1, B_2 或 P_1, P_2 。

3. 求修正边长 C ：注在未知边 M 的后面或前面，算出“修正边长” C 或 C_1 的数值或边长。

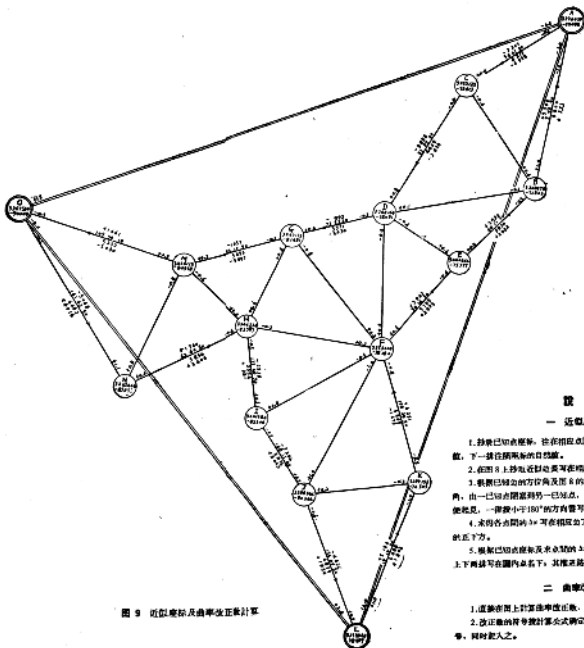


图 9 近似座标及曲率改正数计算

说 明

一 近似座标计算

1. 抄录已知点座标，注在相应点圈内点名下，上一排注后视点的数值，下一排注前视点的自然数。
2. 在图 8 上抄取近似距离可在相应点的正下方。
3. 根据已知边的方位角及图 8 的测角角，虚线在图上展线推算方位角，由一已知点推算到另一已知点，写在相应点的正上方；注距方向为方位角，一律按小于 180° 的方向书写。
4. 求得各点间的 Δx 可在相应方位角的正上方， Δy 可在相应方位角的正下方。
5. 根据已知点座标及求点间的 Δx 、 Δy 求得各点的概算座标，同时分上下两排写在圈内点名下；其推算路线与方位角一致，所以箭头表示之。

二 曲率改正数计算

1. 直接由图上计算曲率改正数，注在相应方位角端点的上方。
2. 改正数的符号按计算公式确定，在一个方向线上，可有两端之符号，同时記入之。

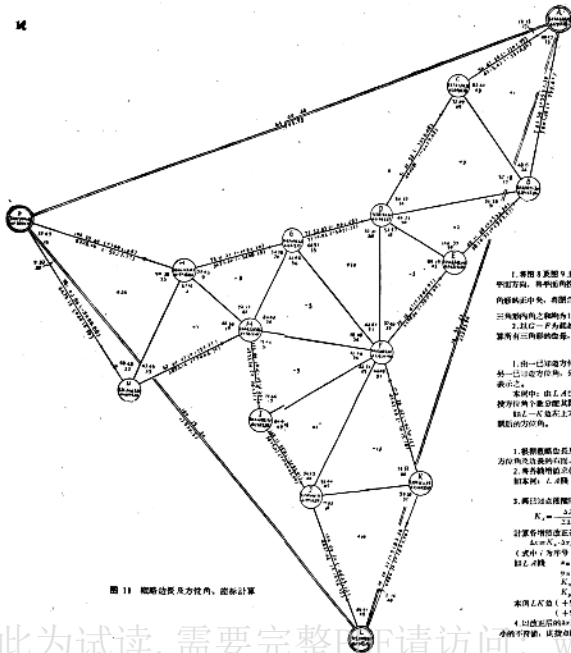


图 11 附略边长及方位角、面积计算

附 录

一 概略边长计算

1. 将图 8 及图 9 上的圆心及由中点位置，在附略图上化算至每石中心的平面位置，将平面内移入本图的相应角内，各三角形影射在图上在各三角形影射中央，角影射正接 $\frac{1}{3}$ 分度，用红笔改正各三角形角内角，使各三角形角内角之和均为 180° 。
2. 以 $G = P$ 为起边（由图 8 内抄得边长是 5010 公尺），在图上计算所有各三角形的边长，写在相应角内下方。

二 方位角计算

1. 由一已知方位角，以附略图上的角度，推算各边之方位角，附略图外一已知方位角，分写写在相应角的左上方；其推算路线在图上以箭头表示之。
2. 本例中：由 $L A$ 已知方位角起算，自 L 到 K 、 F 、 E 、 B 推算至 $A O$ ，按方位角个数分度其推算。
3. 如 $L A$ 是正上方角 $0^\circ 10' 23''$ 为推算路线方位角， $19^\circ 10' 22''$ 为推算路线的方位角。

三 面积计算

1. 将附略图由尺量测得各边的方位角，推算各边的面积，写在原有方位角及边长的右侧，并加标注。
 2. 将各边面积的代数数和：
 3. 将已加标注的面积按正负号或按面积增量的代数数和，按公式：
- $$K_x = \frac{\sum X}{\sum Y} - 1 \quad K_y = \frac{\sum Y}{\sum X} - 1$$
- 计算各边长度的系数，然后计算公式：
- $$\Delta C = K_x \cdot \sum Y \quad \sum Y = K_y \cdot \sum X$$
- （式中 $\sum$ 为平方），计算面积增量，分列用红笔标注之。
- 附 $L A$ 线 $\Delta C = K_x \cdot \sum Y = 20455.55$
 $\Delta C = K_y \cdot \sum X = 6217.35$
 $K_x = 1.0001872$
 $K_y = 1.0002114$
- 本例 $L A$ 边 $(+5782.35)$ 及 $(+1302.54)$ 为改正的附略边长：
 $(+5782.35)$ 及 $(+1302.36)$ 为改正后的边长。
4. 以改正后的边长 ΔC 乘各边之面积，一般可完全与面积相等，若有小的不平衡，从按面积改正。