度量空间与勒贝格积分

方欣华　张昌斌
王向东　关长铭

河南大学出版社

（豫）新登字 09 号

度量空间与勒贝格积分

方欣华　　张昌斌
王向东　　关长铭
责任编辑　王　慧

河南大学出版社出版
（开封市明伦街 85 号）
河南省新华书店发行
河南大学出版社电脑排版
郑州商城印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：8.75　字数：220 千字
1994 年 6 月第 1 版　　1994 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—1500　　定价：5.00 元

ISBN7—81041—061—X/O·80

编者的话

本书是根据编者过去的讲稿几经修改演变而成的。编写本书的目的有两个：一是为了适应部分高等院校数学及相近专业的教学需要，二是为需要度量空间与勒贝格(H. Lebesgue)积分知识的科技工作者提供一本较为简捷易懂的参考读物。

对于本书的取材、写法和使用，编者有如下一些考虑和说明：

一、本书对读者的要求是：掌握了数学分析与线性代数的基本知识，在此基础上勤奋的读者可以顺利地自学。考虑到自学者的困难，本书叙述比较详细并且尽可能地使有关内容相对独立。读者从目录后面所附的“全书逻辑关系图”中可以清楚地看出每一节逻辑上要利用到前面的哪些节——读者不一定要按照本书的顺序去学习，并且可以根据需要作适当取舍。例如，只需要掌握勒贝格积分(即通常所称的实变函数论)知识的读者就没有必要去阅读§2.3至§2.9与§3.9等节。每一节都配置了足够多的习题供读者练习之用，这些习题大多数都不太难，书后附有习题答案与提示供参考。

二、第一章基本上只叙述以后各章所必需的集论知识，很少涉及与本书的主旨关系不大的集论问题。在这一章里，我们专辟一节讲述等价关系的概念，目的是把度量空间的完备化与 L_p 空间的完备性讲得更清楚一些。

三、第二章讲述度量空间的基本理论。讲述这一章具有双重的目的：一是为了加深和拓广数学分析中的极限理论，二是为讲述勒贝格积分理论作准备。勒贝格测度所必需的拓扑知识(开集、闭集等)是在一般度量空间的观点下叙述的。教学实践表明，这种讲法完全能够为读者所顺利接受，退回到直线、平面上讨论开集、闭集等是不必要和不利于智力开发的。希望本章的讲法能收到事半

功倍的效果，为学习泛函分析与点集拓扑打一点基础。

四、第三章讲述勒贝格积分的基本理论。我们基本上采取了匈牙利数学家黎斯(F. Riesz)的方案，而没有按照勒贝格积分理论的创始人勒贝格的方案来叙述。我们之所以这样做主要是考虑到：按勒贝格方案来传授和学习勒贝格积分理论的难度较大，而从建立勒贝格积分理论的途径、方法上来看，本书中采用的方案较为简捷、平易、清晰，因而可以减轻学习的难度，进而使读者能够较快地认识到勒贝格积分的本质。

五、当用本书作为教材时，书中标有“*”号的节、段可以作为阅读材料。讲完本书正文约需72学时，可以按8、28、36来分配各章的讲授学时。作为教材，当然还可以根据需要和可能酌情增删。例如，当用本书作为勒贝格积分教材时，可以考虑删去§2.3至§2.9与§3.9等节。

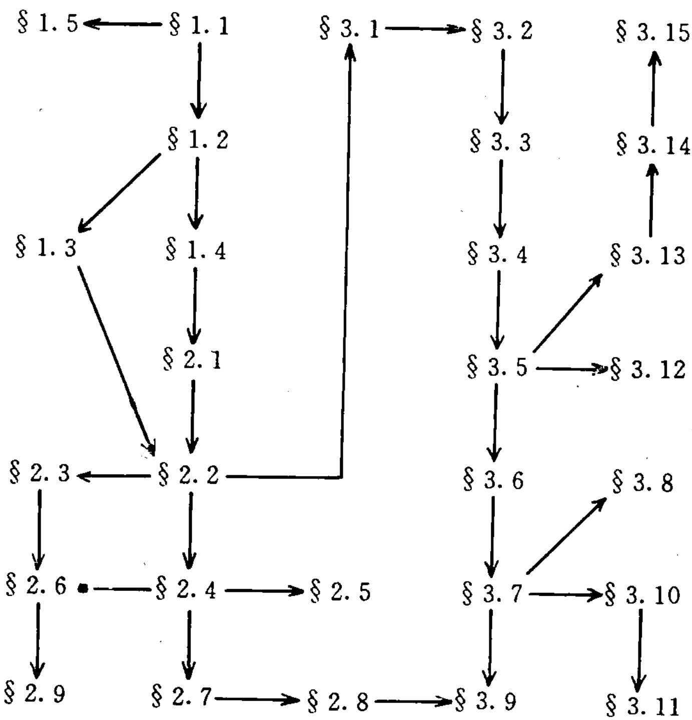
张昌斌先生曾多次用本书的初稿执教，使用效果良好，在提高教学质量、节省教学时数、减轻学生负担、激发学习兴趣诸方面都收到了较好的效果。

由于编者水平所限，本书恐有不少谬误之处，恳请大家批评指正。

在本书的编写过程中，郝钢新、吴卓人、孙锡铭等先生给予了热情的支持和鼓励，王仕永同志做了不少具体工作，谨此一并致谢。

1993.12.20

全书逻辑关系图


§ 1.5
§ 1.1
§ 1.2
§ 1.3
§ 1.4
§ 2.1
§ 2.2
§ 2.3
§ 2.4
§ 2.5
§ 2.6
§ 2.7
§ 2.8
§ 2.9
§ 3.1
§ 3.2
§ 3.3
§ 3.4
§ 3.5
§ 3.6
§ 3.7
§ 3.8
§ 3.9
§ 3.10
§ 3.11
§ 3.12
§ 3.13
§ 3.14
§ 3.15

目　录

第一章 朴素集论

这一章只准备叙述以后各章所必需的集论知识，而不打算讨论那些与本书的主旨关系不大的集论问题，因而我们采取“朴素的观点”.

§1.1 集及其运算

1. 集

无论是在数学中还是在日常生活中，我们随时随地都会遇到集这个概念. 例如，我们可以讨论教室里学生的集，自然数的集，直线上点的集，平面上三角形的集等等. 集的概念是如此地普遍，以致我们难以给它下一个定义而不涉及它的同义语——整体、全体等等. 在本书中，我们称一组无重复的个体作成的整体为集，每一个个体称为该集的元.

一般地，我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元. 记号 $a\in A$ 表示 a 是集 A 的元，$a\overline{\in} A$ 表示 a 不是集 A 的元. 如果集 A 的每一个元都是集 B 的元，而集 B 的每一个元也都是集 A 的元，则称集 A 与集 B 相等，记为 $A=B$. 记号 $A\subseteq B$ 表示集 A 的每一个元都是集 B 的元，这时称集 A 是集 B 的子集. 当 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$ 时，称集 A 是集 B 的真子集，记为 $A\subset B$. 由子集的定义知 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立.

有时，我们事先并不知道或难以知道某一集是否确实含有元. 例如，某方程的解的集，外星人的集等等. 因而有必要引进空集的概念. 空集就是不含任何元的集，用记号 $\varnothing$ 表示. 空集是每一个集

的子集.

如果集 A 只含有限个元，则称 A 为有限集. 我们约定空集是有限集. 一个集如果不是有限集，则称其为无限集.

集的给出有各种不同的方式，最简单的是指出集的所有元. 例如 $A=\{$甲,乙,丙$\}$, $B=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$. 另一种常用的方式是指出集的元的特征性质. 例如 $A=\{x\mid x$ 是复数, $x^2+1=0\}$，易知 $A=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，这里 i 是虚数单位；又如 $A=\{x\mid x$ 是整数$\}$，易知 $A=\{\cdots,-3,-2,0,1,2,3,\cdots\}$.

设 A 是集，我们称集 $2^A=\{B\mid B\subseteq A\}$ 为 A 的幂集. 换句话说，集 A 的幂集就是 A 的一切子集作成的集. 由幂集的定义知 $B\in 2^A$ 当且仅当 $B\subseteq A$.

为方便，有时我们称由集作成的集为集族或族.

给定 n 个集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，集

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的卡氏积. 当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，我们简记 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 为 A^n. 由卡氏积的定义知当 R 为数直线时，R^2 为平面，R^3 为常见的三维空间，而 R^n 为 n 维欧氏空间. 对于 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的元来说，

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

当且仅当 $a_i=b_i, i=1,2,\cdots,n$. 例如在 R^2 中，两个点(即元)相等当且仅当这两个点既有相等的横坐标又有相等的纵坐标.

2. 有关记号

为行文简便，节约篇幅，我们将采取一系列通用记号，如：

Z　　整数集

N　　自然数集

Q　　有理数集

R　　实数集

C　　复数集

$\Longrightarrow$　　蕴含、推出

$\Longleftrightarrow$　　当且仅当、充要条件

$\exists\, x$　　存在(至少)一个 x

$\exists |x$　　存在唯一的 x

$\forall\, x$　　对每一个 x、对任何一个 x

s.t.　　使得

$\vee$　　或者(逻辑或)

$\wedge$　　并且

$\square$　　证明完毕

等等. 其它通用记号将在第一次引用时指明其含义. 这些记号在本书中的含义是固定的,因而使用时不再加以说明.

3. 区间

设 $a,b\in \mathrm{R}$ 并且 $a<b$.

集 $[a,b]=\{x\mid x\in \mathrm{R}, a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为(以 a,b 为端点的)闭区间.

集 $(a,b)=\{x\mid x\in \mathrm{R}, a<x<b\}$ 称为(以 a,b 为端点的)开区间.

集 $[a,b)=\{x\mid x\in \mathrm{R}, a\leqslant x<b\}$ 与集 $(a,b]=\{x\mid x\in \mathrm{R}, a<x\leqslant b\}$ 都称为(以 a,b 为端点的)半开(或半闭,或半开半闭)区间.

当 $a=b$ 时,我们可以定义所谓退化区间. 它们是:独点集 $[a,a]=\{a\}$,空集 (a,a),$[a,a)$ 及 $(a,a]$. 在本书中,除了特别声明之外,凡说区间都是指非退化区间.

以上各种以 a,b 为端点的区间统称为有界区间. 以后我们用 I 表示各种有界区间,而用 $|I|$ 表示 I 的长度.

类似地,我们可以定义无界闭区间

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\in \mathrm{R}, x\geqslant a\}$$

与

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\in \mathrm{R}, x\leqslant b\}.$$

也可以定义无界开区间

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathrm{R}, x > a\}$$

与

$$(-\infty, b) = \{x \mid x \in \mathrm{R}, x < b\}.$$

最后，集$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathrm{R}\}=\mathrm{R}$ 可以称为无界闭区间又可以称为无界开区间.

对于各种无界区间，以后我们也用 I 来表示，并且约定 $|I|=+\infty$.

由定义可知：I 是退化区间当且仅当 $|I|=0$.

4. 集的运算

设 A,B 都是集，我们记集

$$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

为 $A\cup B$，而称其为集 A 与集 B 的并集. 记集

$$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

为 $A\cap B$，而称其为集 A 与集 B 的交集. 记集

$$\{x \mid x \in A \wedge x \overline{\in} B\}$$

为 $A-B$，而称其为集 A 与集 B 的差集. 特别当 $B\subseteq A$ 时称 $A-B$ 为集 B 对集 A 的余集.

通常，我们讨论的诸集都是某一个集 X 的子集，这时我们称 X 为宇宙集(或基本集、全集、论域). 例如，在平面几何中平面是宇宙集，而在一元微积分中实数集 R 是宇宙集. 设 X 是宇宙集，我们简记 $X-A$ 为 $\mathscr{C}A$ 而称其为 A 的余集.

关于余集，我们有一个显然但重要的事实：$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$.

关于集的并、交、差运算，我们有

定理 1 如果 A,B,C 都是宇宙集 X 的子集，则

1° $A\cup A=A$, $\quad A\cap A=A$. (幂等律)

2° $A\cup B=B\cup A$, $\quad A\cap B=B\cap A$. (交换律)

3° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$. (结合律)

4° $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.　　（分配律）

5°　$\mathscr{C}(A\cup B)=(\mathscr{C}A)\cap(\mathscr{C}B)$,

$\mathscr{C}(A\cap B)=(\mathscr{C}A)\cup(\mathscr{C}B)$.　　（德·摩根律）

证　今证 4°的第一式：

$$\begin{aligned}x\in(A\cup B)\cap C&\Longleftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in C\\&\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)\\&\Longleftrightarrow x\in A\cap C\vee x\in B\cap C\\&\Longleftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C).\end{aligned}$$

其余各式都可以类似地证明（习题 2）.　□

设 X 是宇宙集，$\{A_\alpha|\alpha\in J\}$ 是 X 的一族子集. 这里 J 是所谓的“指标集”，对于每一个 $\alpha\in J$，恰有一个确定的集 $A_\alpha\subseteq X$. 我们定义集族 $\{A_\alpha|\alpha\in J\}$ 的并集为

$$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x|\exists\ \alpha\in J,\text{s. t. }x\in A_\alpha\},$$

而定义集族 $\{A_\alpha|\alpha\in J\}$ 的交集为

$$\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x|\forall\ \alpha\in J,x\in A_\alpha\}.$$

在不致引起混淆的情况下，我们将分别简记 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$，$\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$ 为 $\bigcup A_\alpha$，$\bigcap A_\alpha$.

现在我们来证明一个以后要经常用到的定理，定理 1 中的 5° 只不过是它的特殊情形.

定理 2　如果 $\{A_\alpha|A\in J\}$ 是宇宙集 X 的一族子集，$A\subseteq X$，则

1°　$A-\bigcup A_\alpha=\bigcap(A-A_\alpha)$,　2°　$A-\bigcap A_\alpha=\bigcup(A-A_\alpha)$.

特别，　$\mathscr{C}(\bigcup A_\alpha)=\bigcap(\mathscr{C}A_\alpha)$,　$\mathscr{C}(\bigcap A_\alpha)=\bigcup(\mathscr{C}A_\alpha)$.

证　今证 1°：

$$\begin{aligned}x\in A-\bigcup A_\alpha&\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\overline{\in}\bigcup A_\alpha\\&\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\overline{\in}A_\alpha,\forall\ \alpha\in J\\&\Longleftrightarrow x\in A-A_\alpha,\forall\ \alpha\in J\\&\Longleftrightarrow x\in\bigcap(A-A_\alpha).\end{aligned}$$

2°：可以类似地证明(习题 3). □

习 题 1.1

1. 证明 $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A\Longleftrightarrow A\cup B=B$.

2. 证明定理 1 中未证的各式.

3. 证明定理 2 中的 2°.

4. 证明定理 1 中 4°的两个式子是等价的.

5. 证明定理 1 中 5°的两个式子是等价的.

6. 设集 A 有 n 个元,问集 2^A 有多少个元?

7. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$,$B=\{b_1,b_2\}$. 分别写出 $A\times B$ 与 $B\times A$ 的全部元.

8. 设 A,B 是集,定义

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A),$$

称为集 A 与集 B 的对称差. 证明

(1) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$,

(2) $A\triangle B=B\triangle A$,

(3) $A\triangle\varnothing=A$,

(4) $A\triangle A=\varnothing$,

(5) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.

§1.2 映射 对等 特征函数

1. 映射

定义 1 设 A,B 都是非空集. 如果通过一个确定的规则 f,$\forall\, a\in A$,$\exists\, b\in B$,s. t. a 与 b 对应,则称 f 是 A 到 B(中)的映射,记为

$$f:A\longrightarrow B.$$

A 称为映射 f 的定义域,b 称为 a 的(f)像,而 a 称为 b 的一个像

源，记为

$$f(a)=b \text{ 或 } a \longmapsto b.$$

注意 可能存在 $b\in B$，它不是任何 $a\in A$ 的像. 如果 $b\in B$ 是 $a\in A$的像，可能另外还存在 $a_1\in A$，b 也是 a_1 的像.

定义 2 设 $f:A\longrightarrow B$. 如果 $f(a_1)=f(a_2)\in B\Longrightarrow a_1=a_2\in A$，则称 f 为单射；如果$\forall\ b\in B,\exists\ a\in A$, s. t. $f(a)=b$，则称 f 为满射；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射，这时我们也称 f 为 A 到 B 上的一一对应.

易知恒等映射 $f:A\longrightarrow A, f(x)=x$ 是双射.

定义 3 设 $f:A\longrightarrow B$. $\forall\ A_1\subseteq A$，集

$$f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$$

称为 A_1 的像集. 特别，$f(A)$称为 f 的值域. $\forall\ B_1\subseteq B$，集

$$f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$$

称为 B_1 的完全像源.

设 $f:A\longrightarrow B$，易知 f 是满射当且仅当 $f(A)=B$.

设 $f:A\longrightarrow B$ 是单射，易知 $f_1:A\longrightarrow f(A)$，$a\longmapsto f(a)$是双射.

设 $f:A\longrightarrow B$ 是双射，则$\forall\ b\in B,\exists|a\in A$, s. t. $f(a)=b$. 这样便得到一个集 B 到集 A 的映射，称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}. 于是

$$f^{-1}:B\longrightarrow A,\quad f^{-1}(b)=a,\quad \text{当 } f(a)=b.$$

易知双射 f 的逆映射 f^{-1}仍是双射.

完全像源和逆映射都用同一记号 f^{-1}表示是不致引起混淆的. 事实上，设 $f:A\longrightarrow B$，$B_1\subseteq B$. 当 f 是双射时 $f^{-1}(B_1)$的两种含义是一致的；当 f 不是双射时，$f^{-1}(B_1)$只表示 B_1 的完全像源.

设 $f:A\longrightarrow B$，$g:B\longrightarrow C$. $\forall\ a\in A$，$f(a)\in B$，因而 $g[f(a)]\in C$. 由此知$\forall\ a\in A,\exists|c\in C$, s. t. a 与 c 对应. 这样便得到一个集 A 到集 C 的映射. 这个映射是由 $f:A\longrightarrow B$ 与 $g:B\longrightarrow C$ 所唯一确定的，称为 f 与 g 的复合（或合成），记为 gf. 于是

$$gf: A \to C, \qquad gf(a) = g[f(a)].$$

易知两个双射的复合仍是双射.

关于映射的性质,我们只介绍两个简单的定理.

定理 1 设 $f: A \to B$. 如果 $\{B_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 是 B 的一族子集,则

1° $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in J} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$,

2° $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in J} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$,

3° $f^{-1}(B_\alpha - B_\beta) = f^{-1}(B_\alpha) - f^{-1}(B_\beta)$. $\qquad \alpha, \beta \in J$

换句话说,映射的完全像源保持集的并、交、差运算.

证 1° $x \in f^{-1}(\bigcup B_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup B_\alpha$

$$\Leftrightarrow \exists\ \alpha, \text{s. t. } f(x) \in B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \alpha, \text{s. t. } x \in f^{-1}(B_\alpha)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup f^{-1}(B_\alpha).$$

3° $x \in f^{-1}(B_\alpha - B_\beta) \Leftrightarrow f(x) \in B_\alpha - B_\beta$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B_\alpha \wedge f(x) \overline{\in} B_\beta$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_\alpha) - f^{-1}(B_\beta).$$

2°的证明留作习题(习题 1). □

定理 2 设 $f: A \to B$. 如果 $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 是 A 的一族子集,则

1° $f(\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$,

2° $f(\bigcap\limits_{\alpha\in J} A_\alpha) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$.

证 我们只证 2°,1°的证明留给读者(习题 2).

$$\bigcap A_\alpha \subseteq A_\alpha, \forall\ \alpha \Rightarrow f(\bigcap A_\alpha) \subseteq f(A_\alpha), \forall\ \alpha$$

$$\Rightarrow f(\bigcap A_\alpha) \subseteq \bigcap f(A_\alpha). \qquad \square$$

2. 对等

对于两个有限集,我们只要数一数它们各有多少元便可以知道哪一个集含的元多些. 对于两个无限集,这一方法就无能为力了. 注意到对于两个有限集,我们还可以用另外的方法比较它们的元的多少. 例如,为了比较教室里学生的集与椅子的集哪一个含的

元多些，可以让每一个学生坐一个椅子，这样便立即知道哪一个集含的元多些. 把这个方法加以抽象，便有

定义 4 设 A,B 都是集. 如果存在 A 到 B 上的一一对应(即双射)f，则称 A 对等于 B，记为 $A\overset{f}{\sim}B$.

在不致引起混淆的情况下，我们将简记 $A\overset{f}{\sim}B$ 为 $A\sim B$.

由对等的定义容易知道对等具有以下性质(习题 5).

命题 1 设 A,B,C 都是集，则

1° $A\sim A$. (自反性)

2° $A\sim B\Rightarrow B\sim A$. (对称性)

3° $A\sim B,B\sim C\Rightarrow A\sim C$. (传递性)

例 1 整数集 Z 对等于偶数集. 这只要令

$$f:n\longmapsto 2n,\qquad \forall\, n\in \mathrm{Z}$$

便知.

从例 1 可以看出：一个集可以与它的某一个真子集对等. 当然，这情形对有限集是不可能出现的.

例 2 $[a,b]\sim[0,1]$(类似地，$(a,b)\sim(0,1)$，$[a,b)\sim[0,1)$，$(a,b]\sim(0,1]$). 它们之间的一一对应可以借助函数

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}$$

来实现.

例 3 $(0,1)\sim\mathrm{R}$. 它们之间的一一对应可以借助函数

$$f(x)=\mathrm{tg}\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi$$

来实现.

关于开区间(a,b)是否与闭区间$[c,d]$对等的问题，下述定理的特例给出了它的解答. §1.3 中我们将用另一种方法来回答这个问题.

定理 3(伯恩斯坦) 设 A,B 都是非空集. 如果存在 $A_o\subseteq A$，

$B_a \subseteq B$ 使 A 对等于 B_a，B 对等于 A_a，则 A 对等于 B.

证* 不妨设 $A \cap B = \varnothing$，$A \overset{f}{\sim} B_a$，$B \overset{g}{\sim} A_a$.

元 x 称为元 y 的一个祖先，如果轮流对 x 施行映射 f 与 g（或 g 与 f）可以得到 y. 例如 x 是 $f(x)$，$gf(x)$，$fgf(x)$，…（或 $g(x)$，$fg(x)$，$gfg(x)$，…）的祖先. 令

$$A_0 = \{a \mid a \in A, a \text{ 恰有偶数个祖先}\},$$
$$A_1 = \{a \mid a \in A, a \text{ 恰有奇数个祖先}\},$$
$$A_2 = \{a \mid a \in A, a \text{ 有无限个祖先}\},$$

则 A_0, A_1, A_2 两两不交，并且 $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. 类似地，令

$$B_0 = \{b \mid b \in B, b \text{ 恰有偶数个祖先}\},$$
$$B_1 = \{b \mid b \in B, b \text{ 恰有奇数个祖先}\},$$
$$B_2 = \{b \mid b \in B, b \text{ 有无限个祖先}\},$$

则 B_0, B_1, B_2 两两不交，并且 $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2$.

由 f 与 g 是双射易知

$$f_0 : A_0 \to B_1, \qquad f_0(a) = f(a),$$
$$f_1 : A_1 \to B_0, \qquad f_1(a) = g^{-1}(a),$$
$$f_2 : A_2 \to B_2, \qquad f_2(a) = f(a),$$

都是双射，于是

$$F : A \to B, \qquad F(a) = \begin{cases} f(a), & a \in A_0 \cup A_2 \\ g^{-1}(a), & a \in A_1 \end{cases}$$

是双射，所以 $A \overset{F}{\sim} B$. □

任给开区间 (a,b) 和闭区间 $[c,d]$. $(a,b) \sim (c,d)$，而对任意的 $[a_1,b_1] \subset (a,b)$ 都有 $[c,d] \sim [a_1,b_1]$. 由伯恩斯坦定理便知 $(a,b) \sim [c,d]$.

定义 5 集 A 与集 B 称为有相等的势，如果 A 对等于 B. 记 A 的势为 $\overline{A}$，记 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相等为 $\overline{A} = \overline{B}$. 如果存在 $B_1 \subseteq B$ 使 A 对等于 B_1，则称 $\overline{A}$ 不超过 $\overline{B}$，记为 $\overline{A} \leqslant \overline{B}$. 如果 $\overline{A} \leqslant \overline{B}$ 但 B 不与 A 的任