

交流電路

吳鴻鈞編

龍門聯合書局出版

PDG

目 錄

第一章 複數之演算與圖示

§ 1-1. 複數與複面	1
§ 1-2. 算子 j 之意義	2
§ 1-3. 複數之加減	3
§ 1-4. 旋轉算子 $(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$	4
§ 1-5. 旋轉算子之指數式	5
§ 1-6. 伸轉算子與複數乘除	6
§ 1-7. 複數之乘方與開方	7
§ 1-8. 等速旋轉向量及簡諧顫動向量	8
§ 1-9. 複數之軌跡及倒逆	9
(A) 平行於坐標軸直線軌跡及其倒逆	9
(B) 任意直線之軌跡及其倒逆	11
(C) 任意圓之軌跡及其倒逆	12

第二章 交流電之基本概念

§ 2-1. 定義	16
§ 2-2. 工業用電採用正弦波之理由	17
§ 2-3. 相位角與相相差	18
§ 2-4. 正弦波之複數表示法	19
§ 2-5. 正弦電勢波之產生	21
§ 2-6. 均方根值或有效值	22
§ 2-7. 功率之產生與消耗	24
§ 2-8. 功率之瞬時值與平均值	25
§ 2-9. 功率因數、總伏安及電抗伏安	26

第三章 初 級 電 路

§ 3-1. 電阻抗	30
(A) 純電阻電路	30
(B) 純電感電路及自感抗觀念之建立	31
(C) 純電容電路及電容抗觀念之建立	33
§ 3-2. 串聯電路	35
§ 3-3. 並聯電路及導納	37
§ 3-4. 等值電路與對稱電路	41
§ 3-5. Kirchhoff 定理及複雜電路的一般解答	48
§ 3-6. 疊加定理	49
§ 3-7. Maxwell 氏網目電流法	51
§ 3-8. 對換定理	55
§ 3-9. Thevenin 氏定理	56
§ 3-10. Millman 氏定理	58

第四章 共 振 電 路

§ 4-1. 共振電路之意義	62
§ 4-2. 串聯共振電路之特性	63
§ 4-3. 共振點臨近 V_L 與 V_C 之變化情形	65
(A) 調節 L 而得之串聯共振	66
(B) 調節 C 而得之串聯共振	68
(C) 調節 f 而得之串聯共振	69
§ 4-4. R 在串聯共振電路中之效應及電路之選擇性能	71
(A) $I(f)$ 共振曲線銳度之計算	72
(B) $I(c)$ 共振曲線銳度之計算	73
§ 4-5. 並聯共振電路之特性	73
§ 4-6. 並聯共振電路之調節	76
(A) 由調節 L 而得之並聯共振	77
(B) 由調節 C 而得之並聯共振	78

(C) 由調節 R_L 而得之並聯共振	79
(D) 由調節 f 而得之並聯共振	81
§ 4-7. 反共振電路及並聯阻抗之極大值	81
(A) 由調節 C 而得之反共振	82
(B) 由調節 L 而得之反共振	83
(C) 由調節 R 而得之反共振	83
(D) 由調節 f 而得之反共振	84
§ 4-8. “恆並聯共振”電路	85

第五章 非正弦波之分析

§ 5-1. 非正弦波之由來	89
§ 5-2. 週期波形之級數表示法——Fouries 級數	91
(A) 波形對稱於原點之展開級數	92
(B) 波形對稱於 y 軸之展開級數	92
(C) 半週對稱波之展開級數	93
(D) 波形之對稱性兼合乎 (A) 及 (C) 者	93
(E) 波形之對稱兼合乎 (B) 及 (C) 者	94
§ 5-3. Fouries 級數係數之計算	94
§ 5-4. 圖解法	99
§ 5-5. 表格法	101
§ 5-6. 24 點及 48 點表格法	106
§ 5-7. 電路中之諧波電勢與電流	111
§ 5-8. 非正弦波之有效值	114
§ 5-9. 功率及功率因數	115
§ 5-10. 等值正弦波	117
§ 5-11. 拍波與調幅波	118

第六章 耦合電路

§ 6-1. 耦合電路之意義	123
§ 6-2. 互為耦合兩電路間之相互影響	125

§ 6-3. 耦合因子之計求法及複耦合電路之簡化	128
§ 6-4. 電阻耦合電路之分析	131
(A) 可調節之副電路	131
(B) 原副電路可同時調節	132
§ 6-5. 電抗耦合電路之分析	133
(A) 副電路可調節而原電路不可調節者	134
(B) 原副電路可同時調節者	134
§ 6-6. 互感阻抗之物理觀念及其值之正負性	140
§ 6-7. 變壓器原理	143

第七章 瞬變分析

§ 7-1. 瞬時電流之由來及其決定因素	147
§ 7-2. 串聯 $R-L$ 電路之瞬變分析	149
§ 7-3. 初時效應	151
§ 7-4. 串聯 $R-C$ 電路	152
§ 7-5. 串聯 $R-L-C$ 電路	155
§ 7-6. (各種自然頻率下之電流波形) 振盪電路	160
§ 7-7. 數種特殊臨界情形	164
(A) 外加電勢之突然改變	165
(B) 電路參數之突然改變	166
(C) 外加電勢爲一非週期波形	168
§ 7-8. 並聯電路之瞬變分析	170
§ 7-9. 耦合電路之瞬變分析	171

第八章 多相電路

§ 8-1. 三相電勢與電流之產生	176
§ 8-2. 發電機各相電勢之連接法	178
(A) Y連接法之線電勢與線電流	178
(B) Δ 連接法之線電勢與線電流	179
§ 8-3. 負載連接法	180

(A) Y形接法電路與 Millman 氏定理	180
(B) Δ 形接法電路	183
§ 8-4. 多相制中之電路定律	184
§ 8-5. 三相功率之計算	186
§ 8-6. 三相功率之量度	188
§ 8-7. 三相電抗伏安之量測	193
§ 8-8. 三相電路之優點	194
§ 8-9. 他種多相制電路	195
(A) 四相制及半四相制	195
(B) 六相制及半六相制	196

第九章 多相制中之諧波

§ 9-1. 多相制中之諧波相序及其有效值	201
§ 9-2. 平衡三相電勢之諧波相序	202
§ 9-3. Y接法之線電勢及線電流中之各級諧波	204
§ 9-4. Δ 接法之線電勢及線電流中之各級諧波	206
§ 9-5. 平衡六相電勢之諧波相序	210
§ 9-6. 平衡六相星形連接各線電勢及線電流中之諧波	211
§ 9-7. 平衡六相環形連接各線電勢及線電流中之諧波	212
§ 9-8. 平衡四相制中之諧波	214

第十章 對稱及有關分量

§ 10-1. 對稱分量之意義	219
§ 10-2. 對稱分量之求法	221
§ 10-3. Y, Δ 之電勢與電流之關係	223
§ 10-4. 功率	226
§ 10-5. 相序阻抗、相序自阻抗及相序互感阻抗	227
§ 10-6. 一般不平衡之靜止電路	229
§ 10-7. 正負和正負差分量	231
§ 10-8. $\alpha, \beta, 0$ 分量	233

§ 10-9. $\alpha, \beta, 0$ 阻抗	234
§ 10-10. 用 α, β 分量表示功率法	237

第十一章 非直線性電路之分析

§ 11-1. 非直線電路	241
§ 11-2. 圖解法	241
§ 11-3. 直線近似法	243
§ 11-4. 佛氏方程式法	244
§ 11-5. 定差法	245
§ 11-6. 微分機之原理	247

第十二章 機電耦合電路

§ 12-1. 電路之對偶性	253
§ 12-2. 勒格蘭氏方程式	254
§ 12-3. 建立對偶電路之程序	257
§ 12-4. 電路常數之確定	259
§ 12-5. 電容耦合系統——電容器式微音器	261
§ 12-6. 電磁耦合系統——簡單電話聽筒	263
§ 12-7. 普通電話聽筒之分析	265

第一章 複數之演算與圖示

本章重點：

1. 複數的觀念及算子 j 與算子 $Ae^{\pm j\omega}$ 的運用。
2. 簡單複數函數的軌跡及其倒逆函數的軌跡。

要求：

1. 充分熟悉算子 j 及算子 $Ae^{\pm j\omega}$ 的運用。
2. 對所給複數函數式能順熟地繪出其軌跡的圖形。
3. 注意軌跡的起點和終點及其連續變動的方向。

§ 1-1. 複數與複面

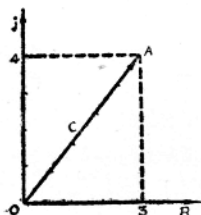
交流電路的數學運算部份，幾乎全部是複數的運算，故複數的觀念及演算，是學習交流電路的數學基礎。同時，在工程上、在很多情況下，電路的參數常須調節以求滿足實際的要求（例如第四章所述之共振電路），在此等電路參數調節的過程中，若欲理解電路內對應電流的變動狀況，則以複數的軌跡圖形示之最為明確。因之，在學習交流電路之前，對複數的運算及複數函數軌跡的求法，實有預加申述的必要。本章即以討論此等為對象。

所謂複數，可視為由實數及虛數之和或差所構成，故複數包括實數與虛數兩個部份。因任何虛數均可寫作 $b\sqrt{-1}$ 之形式（此處 b 為一實數），若將 $\sqrt{-1}$ 以一符號 j 代替， jb 則即可表任何虛數，因之複數的一般形式可以 $a \pm jb$ 表示之。此處 a 及 b 皆為實數。

複數既包括實數與虛數兩部份，其本身原無價值可計，然在應用時，常用絕對值一詞以作兩複數大小之比較。一複數之絕對值為一正實數，其值等於虛、實兩部份平方和之平方根。

複數既包括實數與虛數兩部份，倘吾人在空間取兩正交軸線為坐

標軸（橫軸為實軸，縱軸為虛軸），而以複數之虛、實兩部份分別在對應軸上取得適當之點代表之，則此兩坐標軸所構成之平面上各點與各複數將有對應之關係存在，故任何複數可以在此平面（以後簡稱複面）上取得一對應點表示之。如是則一任何複數的性質，即可以在坐標面上所處的位置而完全表示之。例如設已知複數 $\bar{C}$ 為 $\bar{C}=3+j4$ ，則吾



第 1-1 圖

人即可取得一 A 點與之對應，如圖(1-1)所示。其次，倘吾人將複數的對應點與原點相連，則顯然可知此所成直線之長短，即將等於此複數絕對值之大小（例如 $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，是即複數 $\bar{C}$ 之絕對值），因此，複數 $\bar{C}$ 又實可以向徑 OA 完全表示之。 OA 亦常冠以箭號，表示以 O 為基點，以 A 為終點。 OA 在外表的形態上，與一

向量甚為相似，因此在一般書上，遂將複數與向量混為一談；唯複數與向量畢竟有所不同，故本書只視為複數而不視為向量。

讀者須注意複數之用於電機工程純係一種“數學的”運算工具，其目的在使運算簡化，絕非交流電本身含有虛數成分。為避免誤會計，以後實軸將改稱為 R 軸，虛軸改稱為 j 軸。一複數的虛、實兩部份，則視為該複數的向徑分別在 j 軸及 R 軸上之投影。

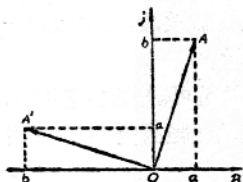
§ 1-2. 算子 j 之意義

一任何複數，可用其向徑表示，前節已加說明。設一複數 $\bar{C}=a+jb$ ，如圖(1-2)中 OA 所示，今吾人若將此複數乘以 j ，則其結果將為

$$C' = j\bar{C} = j(a+jb) = -b + ja.$$

顯然， $\bar{C}'$ 亦將為一複數，此新複數如圖(1-2)中 OA' 所示；且由圖可知， $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 間有下列之相互關係：

- (a) $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 之長短相等，亦即 $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 之絕對值相等。
- (b) $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 互相垂直。若以逆時向為正



第 1-2 圖

向，則 $\bar{C}'$ 之位置在 $\bar{C}$ 前 90° ；亦即將 $\bar{C}$ 正向旋轉 90° 度後即得 $\bar{C}$ 之位置。

由是，吾人實可得出結論：即一任意複數乘以 j ，其作用即等於在複面上將該複數之向徑沿逆時向（以後簡稱正向）旋轉 90° ；同理，凡一任意複數乘以 $(-j)$ 或除以 j ，其作用即等於該複數在複面上沿順時向（以後簡稱負向）旋轉 90° ，其向徑絕對值之大小不變。由是言之， j 實可視為一動作，或稱為一算子，其性質與 $\sqrt{-1}$, $\log$, $\div$, $\sin$ 等算子相同，皆代表一種運算過程。例如加 $\sqrt{-1}$ 符號於數字上，即表示將此一數開方。現在加 j 於一複數前，即表示在複面上將其向徑沿正向旋轉 90° 。

故 j 實為一普通算子，其與他種算子不同處僅在其本身有一數值 $(\sqrt{-1})$ 而已。

§ 1-3. 複數之加減

複數之加減，可藉代數法直接求得，即實數部份與實數部份加減，含 j 部份與含 j 部份加減。例如圖(1-3)中 OA 及 OB 代表兩複數，令

$$OA = a + ja', \quad OB = b + jb',$$

若以 OC 表示其和，則

$$OC = (a + ja') + (b + jb') = (a + b) + j(a' + b').$$

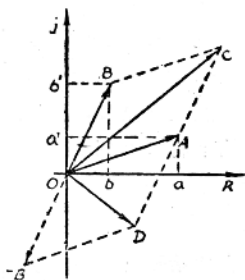
用坐標法不難證明 OC 實為以 OA 及 OB 為兩邊之平行四邊形之對角線。同理，若令 OD 代表兩者之差，則

$$OD = (a + ja') - (b + jb') = (a - b) + j(a' - b').$$

吾人亦可證得 OD 又實為以 OA 及 $-OB$ 為兩邊之平行四邊形之對角線。由是可知，在複面上兩複數之加減可依平行四邊形法進行。換言之，複數之加減與一平面向量之加減法則相同，此為一般書上稱交流電為向量之另一理由。但交流電本身並無向量性質，讀者宜加以留意。

例 1-1. 設已知

$$OA = 8 + j3, \quad OB = -3 + j5.2,$$



第 1-3 圖

試求兩者之和。

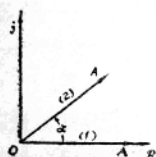
解 令其和爲 OC ，則

$$\begin{aligned} OC &= (8+j6) + (-3+j5.2) \\ &= (8-3) + j(6+5.2) = 5+j11.2; \end{aligned}$$

其絕對值爲 $|OC| = \sqrt{5^2 + 11.2^2} = 12.27$,

與 R 軸所成之角爲 $\theta = \tan^{-1} \frac{11.2}{5} = 65.95^\circ$ 。

§ 1-4. 旋轉算子 $(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$



第 1-4 圖

設複數 V 之絕對值爲 A ，其原始位置爲 (1) ，如圖 $(1-4)$ 所示。若 V' 爲另一複數，其絕對值與 V 相同，但其位置在 V 前 α° ，則 V' 將可寫爲：

$$\begin{aligned} V' &= A(\cos \alpha + j \sin \alpha) \\ &= V(\cos \alpha + j \sin \alpha), \end{aligned} \quad (1-1)$$

故 V' 可視爲係將 V 沿正向旋轉 α° 而得者。

從 $(1-1)$ 式可得一結論爲：凡一複數乘以 $(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ 時，則此複數向徑被旋轉正向 α° 之角，其絕對值不變，見圖 $(1-4)$ 。

照上述結論，若一複數 OA 在複面上先旋轉正向 α° 再旋轉 β° ，則其結果將有下列兩種寫法：

$$V'' = [A(\cos \alpha + j \sin \alpha)](\cos \beta + j \sin \beta), \quad (1-2)$$

$$\text{及} \quad V'' = [A \cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta)]. \quad (1-3)$$

如上述結論爲正確，則 $(1-2)$ ， $(1-3)$ 兩式應爲恆等，今且證之：

$$\begin{aligned} &(\cos \alpha + j \sin \alpha)(\cos \beta + j \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + j(\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

由此可知上述結論不謬，且更可進而推至任何多次之旋轉，

$$\begin{aligned} &(\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2) \cdots (\cos \alpha_n + j \sin \alpha_n) \\ &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + j \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n), \end{aligned} \quad (1-4)$$

同樣，若複數向徑 V 見圖 $(1-5)$ ，旋轉負向 α° 至 V' 時，則

$$\begin{aligned} V' &= V[\cos(-\alpha) + j \sin(-\alpha)] \\ &= (\cos \alpha - j \sin \alpha), \end{aligned}$$

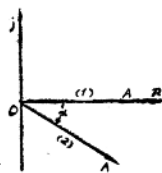
因 $\cos \alpha - j \sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha + j \sin \alpha},$

故 V' 亦可寫作 $V' = \frac{V}{(\cos \alpha + j \sin \alpha)}.$

由上式可知凡複數乘以 $\frac{1}{(\cos \alpha - j \sin \alpha)}$ 或

除以 $(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ 時，則其向徑將被旋轉負向 α° 。

綜上所述，可得下列結論：凡複數乘以 $(\cos \alpha - j \sin \alpha)$ 或除以 $(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ 時，其向徑將旋轉負向 α° ，其絕對值不變，故 $(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$ 亦可視為一種演算符號，稱為旋轉算子。亦可省寫作 $\angle \pm \alpha$ 。



第 1-5 圖

§ 1-5. 旋轉算子之指數式

按莫克勞林氏定理 $e^{j\theta}$ 可以下列無限級數表之：

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2} + \frac{(j\theta)^3}{3} + \frac{(j\theta)^4}{4} + \dots \\ &= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2} - j\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^4}{4} + j\frac{\theta^5}{5} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6} + \dots + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \dots\right); \end{aligned}$$

但 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 之級數各為

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \dots \\ \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6} + \dots; \end{aligned}$$

故 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta; \quad (1-5)$

同理 $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta. \quad (1-6)$

由 (1-4) 及 (1-5) 兩式可知 $e^{j\theta}$ 與 $\cos \theta + j \sin \theta$ 恆等， $e^{-j\theta}$ 與 $\cos \theta - j \sin \theta$ 恆等，故 $e^{\pm j\theta}$ 亦實為一算子。凡一複數乘以 $e^{j\theta}$ 或除以 $e^{-j\theta}$ 時，

則其向徑將被旋轉正向 θ° 。若乘以 $e^{-j\theta}$ 或除以 $e^{j\theta}$ 時，則被順負向旋轉 θ° 。

§ 1-6. 伸轉算子與複數乘除

$(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$ 或 $e^{\pm j\alpha}$ 為一旋轉算子，前節已經述明，其作用僅旋轉複數在複面上之向徑，而不改變其絕對值。今若此算子前再冠以常數 A ，則其作用將不僅為旋轉複數之向徑，且將使向徑之絕對值增加 A 倍，故 $A(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$ 或 $Ae^{\pm j\alpha}$ 實為一伸轉算子。 $Ae^{\pm j\alpha}$ 又可寫作 $e^{\phi \pm j\alpha}$ ， $\phi \pm j\alpha$ 為一複角，故伸轉算子又可看作廣義旋轉算子，其作用為旋轉一複數之向徑經過一複角 $\phi \pm j\alpha$ ，前者為雙曲線角，後者為圓角。

因任何複數 $a + jb$ 均可化為 $A(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$ 形式，故任何複數皆可視為一伸轉算子。此可演化如下：

$$\begin{aligned} a + jb &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm j \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \pm j \sin \alpha) \\ &= A(\cos \alpha \pm j \sin \alpha), \\ A &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (1-7)$$

今任何複數既可化為伸轉算子，則數複數之乘除即可視為伸轉算子之乘除，故其積或商亦為一伸轉算子；或在此數複數中，如以某複數為主，則其他複數皆可視為算子。例如 $V_1, V_2, V_3, \dots$ 為複數，且令 $V_1 = A_1 e^{j\alpha_1}$, $V_2 = A_2 e^{j\alpha_2}, \dots$ ，則其乘積

$$V = V_1 V_2 \dots V_n = A_1 A_2 \dots A_n e^{j(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}. \quad (1-8)$$

易言之，數複數乘積之絕對值為各複數之絕對值之乘積，其與基線所成之角度為各複數之角度之代數和。在(1-8)式中，若以 V_1 為複數， $V_2, V_3, \dots$ 視為算子，則 V 可作為 V_1 經過伸轉後之複數， V_1 之絕對值為 V 之絕對值乘以諸伸轉算子絕對值之積，所旋轉之角度為諸伸轉算子之角度之代數和。

設 V 為 V_1, V_2 之商，則

$$V = \frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1 e^{j\alpha_1}}{A_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (1-9)$$

由此式可知，兩複數之商之絕對值為此兩複數之絕對值之商，其與基線所成之角度為此兩複數之角度之差。如以 V_1 為複數， V_2 為伸轉算子，則 V 可視為 V_1 經過伸轉後之複數，其絕對值為原複數之絕對值除以旋轉算子之絕對值，旋轉角度為伸轉算子之角度之負值。

至此吾人可見複數在乘除時不能視為向量，否則將無物理意義可言，僅能視為算子之運算。故倘將複數與向量混為一談，在基本觀念上易生偏差，因此電流與電勢在某種運算中可視為向量，但阻抗則必須視為伸轉算子。

例 1-2. 已知 $A = 1.532 + j1.286$, $B = -521 + j2.954$,
求 AB 之乘積。

解 $A = 1.532 + j1.286 = 2(\cos 40^\circ + j \sin 40^\circ) = 2e^{j40^\circ};$
 $B = -521 + j2.954 = 3(\cos 100^\circ + j \sin 100^\circ) = 3e^{j100^\circ};$
 故 $C = AB = 2 \times 3[\cos(140^\circ) + j \sin 140^\circ] = 6e^{j140^\circ}$
 $= -4.597 + j3.855.$

如不化為極坐標，亦可相乘，唯手續較繁而已：

$$C = A \cdot B = (1.532 + j1.286)(-0.521 + j2.954)$$

$$= -0.799 + j4.525 - j.67 - 3.798 = -4.597 + j3.855.$$

§ 1-7. 複數之乘方與開方

如 V 為算子 $A(\cos \theta \pm j \sin \theta)$ 自乘 n 次，則依 § 1-6 所述可知

$$V = A^n (\cos n\theta \pm j \sin n\theta), \quad (1-10)$$

同理若 n 為 $\frac{1}{K}$ ；則

$$V = [A(\cos \theta \pm j \sin \theta)]^{\frac{1}{K}}.$$

上式應有 K 個不同之根，今因如加 $2n\pi$ 於 θ ，其正弦及餘弦之值將仍不變，故 V 可寫作：

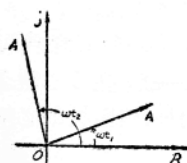
$$\sqrt[n]{V} = \sqrt[n]{A} \left[\cos \frac{\theta + 2n\pi}{K} \pm j \sin \frac{\theta + 2n\pi}{K} \right], \quad (1-11)$$

n 之值可自 $0, 1, 2, \dots, (K-1)$, 蓋 $n > (K-1)$ 時, $\sqrt[n]{V}$ 之值將重複。

§ 1-8. 等速旋转向量及簡諧顫動向量

若 A 為任何向量, 其絕對值不變, 僅變其方向; 方向之變化係以原點為中心以一定角速度 ω 繞 O 點而旋轉, 設每秒鐘轉 f 次, 每次所旋轉之角度為 2π , 故每秒所轉之角度為 $2\pi f$, 亦即

$$\omega = 2\pi f.$$



第 1-6 圖

設 $t=0$ 時, A 與 R 軸相合; $t=t_1$ 時, $\theta = \omega t_1$; $t=t_2$ 時, $\theta = \omega t_2$ (見圖 1-6)。當 t 增加時, A 沿正向以等速旋轉, 故稱為等速旋转向量。此可寫作

$$\bar{A} = A e^{j\omega t} = A(\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

若旋轉方向為負向, 則

$$\bar{A} = A e^{-j\omega t} = A(\cos \omega t - j \sin \omega t). \quad (1-12)$$

設另有一旋转向量 $\bar{B}$ 在向量 $\bar{A}$ 之後 θ 弧度與 $\bar{A}$ 等速旋轉, 依 $\bar{A}$ 為準, 則 $\bar{B}$ 可寫為:

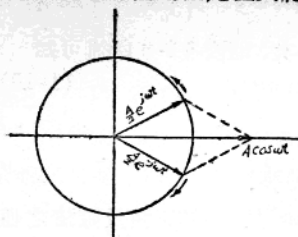
$$\bar{B} = B e^{j(\omega t - \theta)} = B[\cos(\omega t - \theta) + j \sin(\omega t - \theta)], \quad (1-13)$$

故等速旋转向量遂亦可以以複數表示之。

除等速旋转向量以外, 尚有簡諧顫動向量亦屬常見者, 如:

$$\bar{A} = A \cos \omega t, \quad (1-14)$$

此向量之方向為固定僅其絕對值作簡諧變化。



第 1-7 圖

當 $t=0$ 時 $\bar{A} = A$; $\frac{\pi}{2\omega} > t > 0$ 時,

$0 < V < A$, 至 $\frac{\pi}{\omega} > t > \frac{\pi}{2\omega}$ 時,

$-A < V < 0$, $t = \frac{\pi}{\omega}$ 時, $V = -A$ 故 $\bar{A}$ 僅

沿 R 軸作簡諧運動。因 $\bar{A} = A \cos \omega t$ 可寫成:

$$\frac{A}{2} [\cos \omega t + j \sin \omega t] + \frac{A}{2} [\cos \omega t - j \sin \omega t]. \quad (1-15)$$

上式右邊所表示者為兩等速而反向之旋轉向量，故任何簡諧顫動向量可分解為兩相反旋轉之等速旋轉向量，此旋轉向量之絕對值為原來之簡諧顫動向量者之半，可由圖(1-7)見之。

§ 1-9. 複數之軌跡及倒逆

電路內之電流、電位降以及其他電量均為電路常數(電路常數即電阻、電容等)之函數，故當此等常數變動時，電流等亦隨之而變。如欲求出電流等電量之變化情形，必須知其變動之軌跡。本節之目的，在使讀者對於複數之簡單軌跡能明瞭熟練，將來應用時俾能應付裕如。

凡兩複數之乘積為一常數者，則此兩複數稱曰互為倒逆，此常數稱為倒逆常數。設 V_1, V_2 互為倒逆， K 為倒逆常數，則

$$V_1 = \frac{K}{V_2} = \frac{K}{|V_2| e^{j\theta}} = \frac{K}{|V_2|} e^{-j\theta}.$$

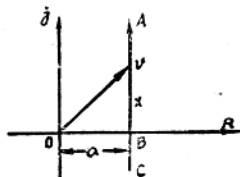
由上式可知，若兩複數互為倒逆，必須適合下列兩條件：

- 兩複數之絕對值必互為倒逆，即 $|V_1| |V_2| = K$ ，(如兩複數僅適合此條件者，此兩複數稱曰互為數值倒逆)；
- 兩複數在複面上之向徑與 R 軸所成之角度必須相等而符號相反。

(A) 平行於坐標軸直線軌跡及其倒逆

設有一複數 $V = a + jx$ ， x 為一變數，由 $-\infty$ 至 $+\infty$ ，則 V 在複面上對應點之軌跡當為一平行於 j 軸之直線，其方向為由 C 向 A 如圖 1-8 所示。若 x 由 $0'$ 變至 ∞ ，則軌跡僅存在於 R 軸之上部(如 BA)。

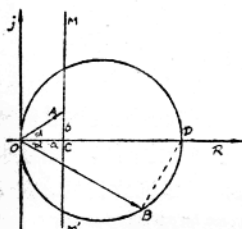
若另有一複數 $V' = \frac{K}{V} = \frac{K}{a + jx}$ ，則 V' 為 V 之倒逆。設 x 為變數由 $-\infty$ 至 $+\infty$ ，則 V' 在複面上對應點之軌跡為以 $\frac{K}{a}$ 為直徑，而圓心



第 1-8 圖

在 R 軸上經過 O 點之圓， O 點又稱為倒逆點。

[證明] 設 MM' 爲 $V=a+jx$ 爲之軌跡, 當 $x=x_1=b$ 時 (b 爲任何數), V 之向徑可以 OA 表之 (圖 1-9), OA 與 R 軸所成之角爲 α 。



第 1-9 圖

$$\text{今作 } OB = \frac{K}{\sqrt{a^2+x_1^2}} = \frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

與 R 軸成 $-\alpha$ 角度, 則

$$OB = \frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}} [\cos(-\alpha) + j \sin(-\alpha)]$$

$$= \frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}} [\cos \alpha - j \sin \alpha]$$

$$= \frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}(\cos \alpha + j \sin \alpha)} = \frac{K}{a+jb} = \frac{K}{OA}$$

故 OB 實爲 OA 之倒逆。

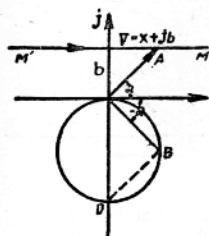
今更進而言之, 若 $\frac{K}{a+jx}$ 之軌跡爲 OBD 圓, 則 B 點是否在 OBD 圓周上?

$$\text{今因在 } \triangle OAC \text{ 內, } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\text{在 } \triangle OBD \text{ 內, } \frac{OB}{OD} = \frac{K/\sqrt{a^2+b^2}}{K/a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha,$$

$$\text{因 } \angle BOD = |\alpha|, \text{ 則 } \cos \angle BOD = \frac{OB}{OD},$$

故 $\angle B = 90^\circ$, 即 B 必在以 OD 爲直徑之圓周上。復因 b 乃假定爲 x 之任何值, 而 V 之倒逆又已證明在 OBD 圓周上, 則 OBD 圓



第 1-10 圖

周必爲 $\frac{K}{a+jx}$ 之軌跡。若 x 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$, MM' 之進行方向爲由 M' 至 M 則 OBD 圓之進行方向爲順時向明矣, 因 $a+jx$ 及 $\frac{K}{a+jx}$ 與 R 軸所成之角必須相等而互爲負數故也。

同理 $V=x+jb$ 之軌跡爲一平行於 R 軸之直線, 其倒逆 $\frac{K}{x+jb}$ 爲經過倒逆點以 $\frac{K}{b}$ 爲直徑。