交流電路

吳鴻鈞編

龍門聯合書局出版

目　　錄

第一章　複數之演算與圖示

第二章　交流電之基本概念

第三章 初 級 電 路

第四章 共 振 電 路

第五章　非正弦波之分析

第六章　耦 合 電 路

第七章 瞬變分析

第八章 多相電路

第九章　多相制中之諧波

第十章　對稱及有關分量

第十一章 非直線性電路之分析

第十二章 機電耦合電路

第一章　複數之演算與圖示

本章重點：

1. 複數的觀念及算子 j 與算子 $Ae^{\pm j\alpha}$ 的運用。
2. 簡單複數函數的軌跡及其倒逆函數的軌跡。

要求：

1. 充分熟悉算子 j 及算子 $Ae^{\pm j\alpha}$ 的運用。
2. 對所給複數函數式能順熟地繪出其軌跡的圖形。
3. 注意軌跡的起點和終點及其連續變動的方向。

§1-1.　複數與複面

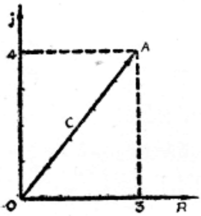
交流電路的數學運算部份，幾乎全部是複數的運算，故複數的觀念及演算，是學習交流電路的數學基礎。同時，在工程上、在很多情況下，電路的參數常須調節以求滿足實際的要求（例如第四章所述之共振電路），在此等電路參數調節的過程中，若欲理解電路內對應電流的變動狀況，則以複數的軌跡圖形示之最爲明確。因之，在學習交流電路之前，對複數的運算及複數函數軌跡的求法，實有預加申述的必要。本章卽以討論此等爲對象。

所謂複數，可視爲由實數及虛數之和或差所構成，故複數包括實數與虛數兩個部份。因任何虛數均可寫作 $b\sqrt{-1}$ 之形式（此處 b 爲一實數），若將 $\sqrt{-1}$ 以一符號 j 代替，jb 則卽可表任何虛數，因之複數的一般形式可以 $a\pm jb$ 表示之。此處 a 及 b 皆爲實數。

複數既包括實數與虛數兩部份，其本身原無價值可計，然在應用時，常用絕對值一詞以作兩複數大小之比較。一複數之絕對值爲一正實數，其值等於虛、實兩部份平方和之平方根。

複數既包括實數與虛數兩部份，倘吾人在空間取兩正交軸線爲坐

標軸(橫軸爲實軸,縱軸爲虛軸),而以複數之虛、實兩部份分別在對應軸上取得適當之點代表之,則此兩坐標軸所構成之平面上各點與各複數將有對應之關係存在,故任何複數可以在此平面(以後簡稱複面)上取得一對應點表示之。如是則一任何複數的性質,卽可以其在坐標面上所處的位置而完全表示之。例如設已知複數 $\bar{C}$ 爲 $\bar{C}=3+j4$,則吾人卽可取得一 A 點與之對應,如圖(1-1)所示。



第 1-1 圖

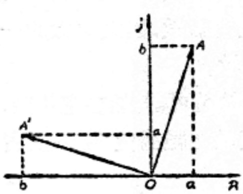
其次,倘吾人將複數的對應點與原點相連,則顯然可知此所成直線之長短,卽將等於此複數絕對值之大小(例如 $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$,是卽複數 $\bar{C}$ 之絕對值),因此,複數 $\bar{C}$ 又實可以向徑 OA 完全表示之。OA 亦常冠以箭號,表示以 O 爲基點,以 A 爲終點。OA 在外表的形態上,與一向量甚爲相似,因此在一般書上,遂將複數與向量混爲一談;唯複數與向量畢究有所不同,故本書只視爲複數而不視爲向量。

讀者須注意複數之用於電機工程純係一種"數學的"運算工具,其目的在使運算簡化,絕非交流電本身含有虛數成分。爲避免誤會計,以後實軸將改稱爲 R 軸,虛軸改稱爲 j 軸。一複數的虛、實兩部份,則視爲該複數的向徑分別在 j 軸及 R 軸上之投影。

§ 1-2. 算子 j 之意義

一任何複數,可用其向徑表示,前節已加說明。設一複數 $\bar{C}=a+jb$,如圖(1-2)中 OA 所示,今吾人若將此複數乘以 j,則其結果將爲

$$C'=j\bar{C}=j(a+jb)=-b+ja.$$



第 1-2 圖

顯然,$\bar{C}'$ 亦將爲一複數,此新複數如圖(1-2)中 OA' 所示;且由圖可知,$\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 間有下列之相互關係:

(a) $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 之長短相等,亦卽 $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 之絕對值相等。

(b) $\bar{C}'$ 與 $\bar{C}$ 互相垂直。若以逆時向爲正

向，則 $\bar{C}'$ 之位置在 $\bar{C}$ 前 $90°$；亦卽將 $\bar{C}$ 正向旋轉 $90°$ 度後卽得 $\bar{C}$ 之位置。

由是，吾人實可得出一結論：卽一任意複數乘以 j，其作用卽等於在複面上將該複數之向徑沿逆時向(以後簡稱正向)旋轉 $90°$；同理，凡一任意複數乘以($-j$)或除以 j，其作用卽等於該複數在複面上沿順時向(以後簡稱負向)旋轉 $90°$，其向徑絕對值之大小不變。由是言之，j 實可視爲一動作，或稱爲一算子，其性質與 $\sqrt{\ }$，log，÷，sin 等算子相同，皆代表一種運算過程。例如加 $\sqrt{\ }$ 符號於數字上，卽表示將此一數開方。現在加 j 於一複數前，卽表示在複面上將其向徑沿正向旋轉 $90°$

故 j 實爲一普通算子，其與他種算子不同處僅在其本身有一數值 ($\sqrt{-1}$) 而已。

§1-3. 複數之加減

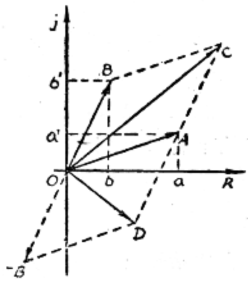
複數之加減，可籍代數法直接求得，卽實數部份與實數部份加減，含 j 部份與含 j 部份加減。例如圖(1-3)中 OA 及 OB 代表兩複數，令

$$OA=a+ja',\qquad OB=b+jb',$$

若以 OC 表示其和，則

$$OC=(a+ja')+(b+jb')=(a+b)+j(a'+b')。$$

用坐標法不難證明 OC 實爲以 OA 及 OB 爲兩邊之平行四邊形之對角線。同理，若令 OD 代表兩者之差，則 $OD=(a+ja')-(b+jb')=(a-b)+j(a'-b')$。吾人亦可證得 OD 又實爲以 OA 及 $-OB$ 爲兩邊之平行四邊形之對角線。由是可知，在複面上兩複數之加減可依平行四邊形法進行。換言之，複數之加減與一平面向量之加減法則相同，此爲一般書上稱交流電爲向量之另一理由。但交流電本身並無向量性質，讀者宜加以留意。



第 1-3 圖

例 1-1. 設已知

$$OA=8+j6,\qquad OB=-3+j5.2,$$

試求兩者之和。

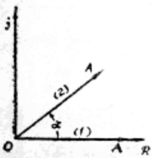
解 令其和爲 OC，則

$$OC=(8+j6)+(-3+j5.2)$$
$$=(8-3)+j(6+5.2)=5+j11.2;$$

其絕對值爲 $|OC|=\sqrt{5^2+11.2^2}=12.27$,

與 R 軸所成之角爲 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{11.2}{5}=65.95°$。

§1-4. 旋轉算子 $(\cos\alpha\pm j\sin\alpha)$



第 1-4 圖

設複數 V 之絕對值爲 A，其原始位置爲(1)，如圖(1-4)所示。若 V' 爲另一複數，其絕對值與 V 相同，但其位置在 V 前 $\alpha°$，則 V' 將可寫爲:

$$V'=A(\cos\alpha+j\sin\alpha)$$
$$=V(\cos\alpha+j\sin\alpha), \qquad (1\text{-}1)$$

故 V' 可視爲係將 V 沿正向旋轉 $\alpha°$ 而得者。

從(1-1)式可得一結論爲：凡一複數乘以 $(\cos\alpha+j\sin\alpha)$ 時，則此複數向徑被旋轉正向 $\alpha°$ 之角，其絕對值不變，見圖(1-4)。

照上述結論，若一複數 OA 在複面上先旋轉正向 $\alpha°$ 再旋轉 $\beta°$，則其結果將有下列兩種寫法:

$$V''=[A(\cos\alpha+j\sin\alpha)](\cos\beta+j\sin\alpha), \qquad (1\text{-}2)$$

及

$$V''=[A\cos(\alpha+\beta)+j\sin(\alpha+\beta)]. \qquad (1\text{-}3)$$

如上述結論爲正確，則(1-2)，(1-3)兩式應爲恆等，今且證之:

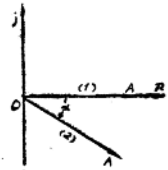
$$(\cos\alpha+j\sin\alpha)(\cos\beta+j\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+j(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+j\sin(\alpha+\beta).$$

由此可知上述結論不謬，且更可進而推至任何多次之旋轉，

$$(\cos\alpha_1+\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+j\sin\alpha_2)\cdots\cdots(\cos\alpha_n+j\sin\alpha_n)$$
$$=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha n)+j\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n), \qquad (1\text{-}4)$$

同樣，若複數向徑 V 見圖(1-5)，旋轉負向 $\alpha°$ 至 V' 時，則

$$V'=V[\cos(-\alpha)+j\sin(-\alpha)]$$
$$=(\cos\alpha-j\sin\alpha),$$



第 1-5 圖

因　　$\cos\alpha-j\sin\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha+j\sin\alpha}$,

故 V' 亦可寫作　　$V'=\dfrac{V}{(\cos\alpha+j\sin\alpha)}$.

由上式可知凡複數乘以 $\dfrac{1}{(\cos\alpha-j\sin\alpha)}$ 或除以$(\cos\alpha+j\sin\alpha)$時,則其向徑將被旋轉負向 α°。

綜上所述,可得下列結論:凡複數乘以$(\cos\alpha-j\sin\alpha)$或除以$(\cos\alpha+j\sin\alpha)$時,其向徑將旋轉負向 α°,其絕對值不變,故$(\cos\alpha\pm\sin\alpha)$亦可視爲一種演算符號,稱爲旋轉算子。亦可省寫作$\angle\pm\alpha$。

§1-5.　旋轉算子之指數式

按莫克勞林氏定理 $e^{j\theta}$ 可以下列無限級數表之:

$$e^{j\theta}=1+j\theta+\frac{(j\theta)^2}{\underline{|2}}+\frac{(j\theta)^3}{\underline{|3}}+\frac{(j\theta)^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$$
$$=1+j\theta-\frac{\theta^2}{\underline{|2}}-j\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^4}{\underline{|4}}+j\frac{\theta^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$
$$=1-\frac{\theta^2}{\underline{|2}}+\frac{\theta^4}{\underline{|4}}-\frac{\theta^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots j\left(\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}}-\frac{\theta^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots\right);$$

但 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之級數各爲

$$\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}}-\frac{\theta^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$$
$$1-\frac{\theta^2}{\underline{|2}}+\frac{\theta^4}{\underline{|4}}-\frac{\theta^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots;$$

故　　$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta;\tag{1-5}$$

同理　　$$e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta.\tag{1-6}$$

由(1-4)及(1-5)兩式可知 $e^{j\theta}$ 與 $\cos\theta+j\sin\theta$ 恆等,$e^{-j\theta}$ 與 $\cos\theta-j\sin\theta$ 恆等,故 $e^{\pm j\theta}$ 亦實爲一算子。凡一複數乘以 $e^{j\theta}$ 或除以 $e^{-j\theta}$ 時,

則其向徑將被旋轉正向 θ°。 若乘以 $e^{-j\theta}$ 或除以 $e^{j\theta}$ 時，則被順負向旋轉 θ°。

§1-6. 伸轉算子與複數乘除

$(\cos\alpha\pm\sin\alpha)$或 $e^{\pm j\alpha}$ 爲一旋轉算子，前節已經述明，其作用僅旋轉複數在複面上之向徑，而不改變其絕對值。 今若此算子前再冠以常數 A，則其作用將不僅爲旋轉複數之向徑，且將使向徑之絕對值增加 A 倍，故 $A(\cos\alpha\pm j\cos\alpha)$ 或 $Ae^{\pm j\alpha}$ 實爲一伸轉算子。 $Ae^{\pm j\alpha}$ 又可寫作 $e^{\phi\pm j\alpha}$，$\phi\pm j\alpha$ 爲一複角，故伸轉算子又可看作廣義旋轉算子，其作用爲旋轉一複數之向徑經過一複角 $\phi\pm j\alpha$，前者爲雙曲線角，後者爲圓角。

因任何複數 $a+jb$ 均可化爲 $A(\cos\alpha\pm j\sin\alpha)$形式，故任何複數皆可視爲一伸轉算子。 此可演化如下：

$$\begin{aligned}a\pm jb&=\sqrt{c^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm j\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\pm j\sin\alpha)\\&=A(\cos\alpha\pm j\sin\alpha),\end{aligned}\tag{1-7}$$

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\qquad \alpha=\tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

今任何複數既可化爲伸轉算子，則數複數之乘除即可視爲伸轉算子之乘除，故其積或商亦爲一伸轉算子；或在此數複數中，如以某複數爲主，則其他複數皆可視爲算子。 例如 $V_1, V_2, V_3\cdots\cdots$爲複數，且令 $V_1=A_1e^{j\alpha_1}$，$V_2=A_2e^{j\alpha_2}\cdots\cdots$，則其乘積

$$V=V_1V_2\cdots\cdots V_n=A_1A_2\cdots\cdots A_ne^{j(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n)}.\tag{1-8}$$

易言之，數複數乘積之絕對值爲各複數之絕對值之乘積，其與基線所成之角度爲各複數之角度之代數和。在(1-8)式中，若以 V_1 爲複數，V_2, $V_2\cdots\cdots$視爲算子，則 V 可作爲 V_1 經過伸轉後之複數，V_1 之絕對值爲 V 之絕對值乘以諸伸轉算子絕對值之積，所旋轉之角度爲諸伸轉算子之角度之代數和。

設 V 爲 V_1, V_2 之商，則

$$V=\frac{V_1}{V_2}=\frac{A_1 e^{j\alpha_1}}{A_2 e^{j\alpha_2}}=\frac{A_1}{A_2}e^{j(\alpha_1-\alpha_2)}. \tag{1-9}$$

由此式可知，兩複數之商之絕對值爲此兩複數之絕對值之商，其與基線所成之角度爲此兩複數之角度之差。 如以 V_1 爲複數，V_2 爲伸轉算子，則 V 可視爲 V_1 經過伸轉後之複數，其絕對值爲原複數之絕對值除以旋轉算子之絕對值，旋轉角度爲伸轉算子之角度之負值。

至此吾人可見複數在乘除時不能視爲向量，否則將無物理意義可言，僅能視爲算子之運算。 故倘將複數與向量混爲一談，在基本觀念上易生偏差，因此電流與電勢在某種運算中可視爲向量，但阻抗則必須視爲伸轉算子。

例 1-2. 已知 $A=1.532+j1.286$，　$B=-521+j2.954$，

求 AB 之乘積。

解　$A=1.532+j1.286=2(\cos 40°+j\sin 40°)=2e^{j40°}$；

$B=-521+j2.954=3(\cos 100°+j\sin 100°)=3e^{j100°}$；

故　$C=AB=2\times 3[\cos(140°)+j\sin 140°]=6e^{j140°}$

$=-4.597+j3.855$.

如不化爲極坐標，亦可相乘，唯手續較繁而已：

$C=A\cdot B=(1.532+j1.286)(-0.521+j2.954)$

$=-0.799+j4.525-j.67-3.798=-4.597+j3.855$.

§ 1-7.　複數之乘方與開方

如 V 爲算子 $A(\cos\theta\pm j\sin\theta)$ 自乘 n 次，則依 § 1-6 所述可知

$$V=A^n(\cos n\theta\pm j\sin n\theta), \tag{1-10}$$

同理若 n 爲 $\frac{1}{K}$；則

$$V=[A(\cos\theta\pm\sin\theta)]^{\frac{1}{K}}.$$

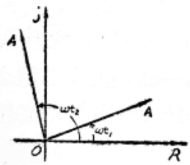
上式應有 K 個不同之根，今因如加 $2n\pi$ 於 θ，其正弦及餘弦之值將仍不變，故 V 可寫作：

$$\sqrt[n]{V}=\sqrt[n]{A}\left[\cos\frac{\theta+2n\pi}{K}\pm j\sin\frac{\theta+2n\pi}{K}\right], \tag{1-11}$$

n 之值可自 $0, 1, 2, \cdots\cdots (K-1)$，蓋 $n > (K-1)$ 時，$\sqrt[k]{V}$ 之值將重複。

§ 1-8. 等速旋轉向量及簡諧顫動向量

若 A 爲任何向量，其絕對值不變，僅變其方向；方向之變化係以原點爲中心以一定角速度 ω 繞 O 點而旋轉，設每秒鐘轉 f 次，每次所旋轉之角度爲 2π，故每秒所轉之角度爲 $2\pi f$，亦卽



第 1-6 圖

$$\omega = 2\pi f.$$

設 $t=0$ 時，A 與 R 軸相合；$t=t_1$ 時，$\theta=\omega t$；$t=t_2$ 時，$\theta=\omega t_2$（見圖 1-6）。當 t 增加時，A 沿正向以等速旋轉，故稱爲等速旋轉向量。此可寫作

$$\bar{A} = Ae^{j\omega t} = A(\cos\omega t + \sin\omega t).$$

若旋轉方向爲負向，則

$$\bar{A} = Ae^{-j\omega t} = A(\cos\omega t - j\sin\omega t). \qquad (1\text{-}12)$$

設另有一旋轉向量 $\bar{B}$ 在向量 $\bar{A}$ 之後 θ 弧度與 $\bar{A}$ 等速旋轉，依 $\bar{A}$ 爲準，則 $\bar{B}$ 可寫爲：

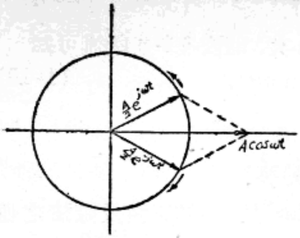
$$\bar{B} = Be^{j(\omega t-\theta)} = B[\cos(\omega t-\theta) + j\sin(\omega t-\theta)], \qquad (1\text{-}13)$$

故等速旋轉向量遂亦可以以複數表示之。

除等速旋轉向量以外，尚有簡諧顫動向量亦屬常見者，如：

$$\bar{A} = A\cos\omega t, \qquad (1\text{-}14)$$

此向量之方向爲固定僅其絕對值作簡諧變化。



第 1-7 圖

當 $t=0$ 時 $\bar{A}=A$；$\frac{\pi}{2\omega} > t > 0$ 時，$0 < V < A$，至 $\frac{\pi}{\omega} > t > \frac{\pi}{2\omega}$ 時，$-A < V < 0$，$t=\frac{\pi}{\omega}$ 時，$V=-A$ 故 $\bar{A}$ 僅沿 R 軸作簡諧運動。因 $\bar{A} = A\cos\omega t$ 可寫成：

$$\frac{A}{2}[\cos\omega t + j\sin\omega t] + \frac{A}{2}[\cos\omega t - j\sin\omega t]. \qquad (1\text{-}15)$$

上式右邊所表示者爲兩等速而反向之旋轉向量，故任何簡諧顫動向量可分解爲兩相反旋轉之等速旋轉向量，此旋轉向量之絕對值爲原來之簡諧顫動向量者之半，可由圖(1-7)見之。

§1-9. 複數之軌跡及倒逆

電路內之電流、電位降以及其他電量均爲電路常數(電路常數即電阻、電容等)之函數，故當此等常數變動時，電流等亦隨之而變。如欲求出電流等電量之變化情形，必須知其變動之軌跡。本節之目的，在使讀者對於複數之簡單軌跡能明瞭熟練，將來應用時俾能應付豁如。

凡兩複數之乘積爲一常數者，則此兩複數稱曰互爲倒逆，此常數稱爲倒逆常數。設 V_1, V_2 互爲倒逆，K 爲倒逆常數，則

$$V_1=\frac{K}{V_2}=\frac{K}{|V_2|e^{j\theta}}=\frac{K}{|V_2|}e^{-j\theta}.$$

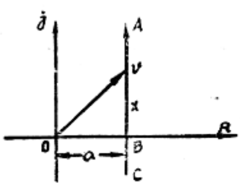
由上式可知，若兩複數互爲倒逆，必須適合下列兩條件：

(a) 兩複數之絕對值必互爲倒逆，即 $|V_1||V_2|=K$，(如兩複數僅適合此條件者，此兩複數稱曰互爲數值倒逆)；

(b) 兩複數在複面上之向徑與 R 軸所成之角度必須相等而符號相反。

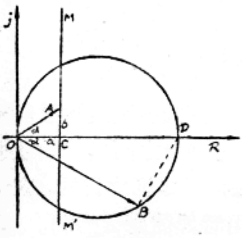
(A) 平行於坐標軸直線軌跡及其倒逆

設有一複數 $V=a+jx$，x 爲一變數，由 $-\infty$ 至 $+\infty$，則 V 在複面上對應點之軌跡當爲一平行於 j 軸之直線，其方向爲由 C 向 A 如圖 1-8 所示。若 x 由 0′ 變至 ∞，則軌跡僅存在於 R 軸之上部(如 BA)。若另有一複數 $V'=\frac{K}{V}=\frac{K}{a+jx}$，則 V' 爲 V 之倒逆。設 x 爲變數由 $-\infty$ 至 $+\infty$，則 V 在複面上對應點之軌跡爲以 $\frac{K}{a}$ 爲直徑，而圓心在 R 軸上經過 O 點之圓，O 點又稱爲倒逆點。



第 1-8 圖

［證明］ 設 MM' 爲 $V=a+jx$ 爲之軌跡，當 $x=x_1=b$ 時(b 爲任何數)，V 之向徑可以 OA 表之(圖 1-9)，OA 與 R 軸所成之角爲 α。



第 1-9 圖

今作　　$OB=\dfrac{K}{\sqrt{a^2+x_1{}^2}}=\dfrac{K}{\sqrt{a^2+b^2}}$

與 R 軸成 $-\alpha$ 角度，則

$$OB=\frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}}[\cos(-\alpha)+j\sin(-\alpha)]$$

$$=\frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}}[\cos\alpha-j\sin\alpha]$$

$$=\frac{K}{\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+j\sin\alpha)}=\frac{K}{a+jb}=\frac{K}{OA}.$$

故 OB 實爲 OA 之倒逆。

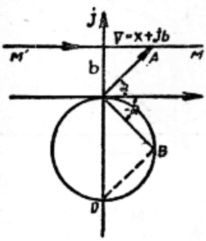
今更進而言之，若 $\dfrac{K}{a+jx}$ 之軌跡爲 OBD 圓，則 B 點是否在 OBD 圓周上?

今因在 $\triangle OAC$ 內，　　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

在 $\triangle OBD$ 內，$\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{K/\sqrt{a^2+b^2}}{K/a}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$，

因　　　$\angle BOD=|\alpha|$，　則　$\cos\angle BOD=\dfrac{OB}{OD}$，

故 $\angle B=90°$，卽 B 必在以 OD 爲直徑之圓周上。 復因 b 乃假定爲 x 之任何値，而 V 之倒逆又已證明在 OBD 圓周上，則 OBD 圓周必爲 $\dfrac{K}{a+jx}$ 之軌跡。若 x 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$，MM' 之進行方向爲由 M' 至 M 則 ODB 圓之進行方向爲順時向明矣，因 $a+jx$ 及 $\dfrac{K}{a+jx}$ 與 R 軸所成之角必須相等而互爲負數故也。



第 1-10 圖

同理 $V=x+jb$ 之軌跡爲一平行於 R 軸之直線，其倒逆 $\dfrac{K}{x+jb}$ 爲經過倒逆點以 $\dfrac{K}{b}$ 爲直徑，