数学难题解难

一元五次方程破解

$x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0\ (e_5\neq 0)$

3

石泉 郑良飞 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

数学难题解难

一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0(e_5\neq 0)$ 破解

石泉 郑良飞 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0(e_5\neq0)$ 破解 / 石泉，郑良飞著. —北京：国防工业出版社，2009.7

ISBN 978-7-118-06322-6

Ⅰ.一... Ⅱ.①石...②郑... Ⅲ.一元方程-方程解 Ⅳ.0122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 064844 号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11¼ 字数 255 千字

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 24.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

本书主要介绍一元五次方程的解法。对于一般的一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0(e_5\neq0)$ 可归结为一元五次方程(1)～(16)(任意实系数、实系数≤1、复系数),其中有一般的、有结构的、有缺项的等16种类型方程,以及包括性质1～性质17的各种方程,这是一元五次方程全部方程。

数学史业已查明,1824年、1829年,阿贝尔(挪威)、伽罗瓦(法国)都证明了五次以上的代数方程不能用根式解的文章公布于世已有100多年的历史了,这是国内外数学界人士所共认的,至今还是无人问津。

作者却不以为然,为了给祖国争光,攀登科学高峰,破除迷信,解放思想,经过多年的研究,终于给出了解开一元五次方程的核心内容——附录1～附录8。

据此,则把一元五次方程的16种类型方程(任意实系数、实系数≤1、复系数)以及包括性质1～性质17的各种方程全部解开了。

本书第1章阐述一元五次方程破解的根据及其结论。第2章为例题。一元五次方程(1)～(16)(任意实系数、实系数≤1、复系数)及其包括性质1～性质17的方程,都有具体例题,分别予以推演,其推演过程和结论,都是经过逐一检验①——这是确定所求每一方程的五个根(实根和复根)的正确与否的可靠保证。

因此,我们这里解开所有一元五次方程成立与否及其每个例题都是经过检验确定其正确与否,这就等同对此审核其对、错成为定局,不存在什么偏、差、错、漏问题,也不存在什么权威问题。

这些例题,所求的步骤和结论,更加具体地说明了,一般的一元五次方程,没有解不开的问题,换句话说,没有任一的一元五次方程解不了。伽罗瓦(法国)曾经特地提出的并且加以证明了:一元五次方程,如 $x^5-x+1=0$ 不能用根式解在内,但作者却把它解开了,因为该题只需采用近似值计算法便可(如附录6中的解法5所述)。

如果能够了解解开一元五次方程的核心内容——附录1～附录8,再按解题思路、解题步骤的要求,采用解法1～解法8,则求一般的一元五次方程(任一的)的实根和复根也就迎刃而解了。

本书备有各种类型的一元五次方程的习题,读者方便时,不妨可以试一试,来共享

---

① 检验:有关数学计算的过程及其结论的对、错看法:对就对,错就错,就如同教师在给学生改正数学习题中,若题做对了,就打个对号,如"√";否则,错了,就打个错误符号,如"×",这里不存在什么权威问题——丁石孙语。

其乐。

本书承蒙全国人大常委会副委员长孙起孟的关怀和支持，本书内容承蒙中央教育科学研究所李铁安教授，与作者同时（2007 年 10 月）参加数学史国际学术会议学术委员会的一位委员印度 Gurukula Kangri University S. L. Singh 教授，美国 Alabama University Xi-dong Zheng 博士，曹海春，刘芬芬分别审核认可，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。联系电话：86－010－84256193。

本书可供大中专院校师生、中学教师、工程技术人员和广大数学爱好者阅读、参考。

中国数学会会员　石泉　郑良飞

2009 年 4 月

目　录

第1章 一般的一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0(e_5\neq 0)$ 破解

1.1 一元五次方程破解的根据

若一般的一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0(e_5\neq 0)$ 破解成立，则下列一元五次方程必须破解成立：

1. 结构方程——满项方程：设其五个根是 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5

$x^5+(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)x^4+\{[x_3(x_1+x_2)+x_1x_2]+(x_4+x_5)(x_1+x_2+x_3)+x_4x_5\}x^3+\{(x_4+x_5)[x_3(x_1+x_2)+x_1x_2]+x_4x_5(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2x_3\}x^2+\{x_4x_5[x_3(x_1+x_2)+x_1x_2]+(x_4+x_5)x_1x_2x_3\}x+x_1x_2x_3x_4x_5=0$ 　　+ + + + + + 　　(1)

2. 缺项方程——缺一项方程

$x^5+\ 0\ +b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_0=0$	+ 0 + + + +	(2)
$x^5+a_5x^4+\ 0\ +c_5x^2+d_5x+e_5=0$	+ + 0 + + +	(3)
$x^5+a_5x^4+b_5x^3+\ 0\ +d_5x+e_5=0$	+ + + 0 + +	(4)
$x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+\ 0\ +e_5=0$	+ + + + 0 +	(5)

3. 缺二项方程

$x^5+a_5x^4+b_5x^3+\ 0\ +\ 0\ +e_5=0$	+ + + 0 0 +	(6)
$x^5+\ 0\ +\ 0\ +c_5x^2+d_5x+e_5=0$	+ 0 0 + + +	(7)
$x^5+a_5x^4+\ 0\ +\ 0\ +d_5x+e_5=0$	+ + 0 0 + +	(8)
$x^5+\ 0\ +b_5x^3+\ 0\ +d_5x+e_5=0$	+ 0 + 0 + +	(9)
$x^5+a_5x^4+\ 0\ +c_5x^2+\ 0\ +e_5=0$	+ + 0 + 0 +	(10)
$x^5+\ 0\ +b_5x^3+c_5x^2+\ 0\ +e_5=0$	+ 0 + + 0 +	(11)

4. 缺三项方程

$x^5+a_5x^4+\ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +e_5=0$	+ + 0 0 0 +	(12)
$x^5+\ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +d_5x+e_5=0$	+ 0 0 0 + +	(13)
$x^5+\ 0\ +b_5x^3+\ 0\ +\ 0\ +e_5=0$	+ 0 + 0 0 +	(14)
$x^5+\ 0\ +\ 0\ +c_5x^2+\ 0\ +e_5=0$	+ 0 0 + 0 +	(15)

5. 缺四项方程

$x^5+0+0+0+0+e_5=0$ $+0000+$ (16)

（首项系数 $=1$、任意实系数、实系数 $\leqslant 1$、复系数、$e_5 \neq 0$）

解题思路：

方程(1)～(16)只需要首先求得其一个根 x_1 成立就可以了，因为这时原方程就可以化为一元四次方程 $x^4+a_4x^3+b_4x^2+c_4x+e_4=0(e_4\neq 0)$ 了。其解题思路可以简述如下：

一般的一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=0(e_5\neq 0)$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-x_1=0 & (x_1\text{：实根或复根}) \\ x^4+a_4x^3+b_4x^2+c_4x+e_4=0(e_4\neq 0) \end{cases}$$

那么又如何可以求得一个根 x_1 能够成立呢？主要是分别以其实系数、复系数、通过附录6解法1～解法8，就可以获得了。

1.2 实根

1. 任意实系数

方程(1)～(16)，通过解法1～解法8，则方程至少有一个实根 x_1 成立（附录6）。

2. 实系数 $\leqslant 1$

方程(1)～(16)，通过解法1～解法2，即近似值计算法和分解因式法，则方程有根 $\pm a$，或根在 $0\sim\pm a$，或根在 $\pm a\sim\pm b$ 之间成立（附录6）。

1.3 复根

1. 复系数

1）方程 $(1)_{1\sim 8}$、$(2)_{1\sim 4}$、$(3)_{1\sim 2}$、(4)、(5)、(6)、$(7)_{1\sim 2}$、(16)的公式，通过多项式综合除法，则方程至少有一对共轭复根成立（附录3）。

2）方程(8)～(15)虽无复系数，但有任意实系数或实系数 $\leqslant 1$，通过解法1～8，则方程不仅有一个实根 x_1 成立，且还有它的一对共轭复根成立（附录6）。

2. 任意实系数

方程(1)～(16)，通过解法1～8，则方程至少有一个实根 x_1 成立（附录6），也有复根。

3. 实系数 $\leqslant 1$

方程(1)～(16)，通过解法1～2，即近似值计算法和分解因式法，则方程有根 $\pm a$，或根在 $0\sim\pm a$，或根在 $\pm a\sim\pm b$ 之间成立（附录6），也有复根。

1.4 结论

由上述的1.2节、1.3节所述，则方程(1)～(16)破解成立，即一般的一元五次方程 $x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x+e_5=5(e_5\neq 0)$ 破解了。

第 2 章

例　题

对于一般的一元五次方程,解题步骤如下:

1. $a_5 \gtreqless 0$,判定方程正根的和 $\lesseqgtr$ |负根的和|(附录 2)

2. 方程的各项运算符号1 ~17,判定方程 m 个正根的和 $\gtreqless$ |n 个负根的和|(附录 2)($m+n=5$)

3. 分解系数、常数项(e_5)为素因数之积

① $e_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n = \dfrac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_i\cdots\beta_n}$

② 把 $e_5 = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n = \dfrac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_i\cdots\beta_n}$返回表示是

$$= \frac{\alpha_1\cdots\alpha_i}{\beta_1\cdots\beta_i} \times \frac{\alpha_2\cdots\alpha_j}{\beta_2\cdots\beta_j} \times \frac{\alpha_3\cdots\alpha_k}{\beta_3\cdots\beta_k} \times \frac{\alpha_4\cdots\alpha_m}{\beta_4\cdots\beta_m} \times \frac{\alpha_5-\alpha_n}{\beta_5\cdots\beta_n} = \frac{p_1}{q_1} \times \frac{p_2}{q_2} \times \frac{p_3}{q_3} \times \frac{p_4}{q_4} \times \frac{p_5}{q_5}$$

$= \cdots\cdots = x_1x_2x_3x_4x_5$(附录 7,附录 4、5)

4. $\sqrt[5]{|e_5|} \gtreqless 1$,判定方程:真分数根(或纯小数根)、假分数根(或混小数根)、整数根(附录 8、附录 4)

5. 设根 x_1,从常数项(e_5)的素因数积 $=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n$ 里选取 $x_1=\alpha_1$,或 $x_1=\alpha_i\cdots\alpha_k\cdots$(附录 7)

6. 根的范围:

① $x_1 \leqslant \sqrt[5]{|e_5|}$或 $x_1 > \sqrt[5]{|e_5|}$(附录 8)

② $x_1 \leqslant (|a_5| \div 5)$或 $x_1 > (|a_5| \div 5)$

③ $x_1 \leqslant \{\pm\sqrt[5]{|e_5|} \pm [|a_5| \div n(n=2,3,4,\cdots)]\}$或 $x_1 > \{\pm\sqrt[5]{|e_5|} \pm [|a_5| \div n(n=2,3,4,\cdots)]\}$

7. 确定 x_1 的值:多项式综合除法(附录 6)

方程 $\div x_1$(含 $-x_1$)

① 试除后,若余式$\neq 0$,则 x_1 不是方程的一个根(舍去);

② 重新组成 $x_1=\alpha_i\cdots\alpha_k$,直到试除后,余式 $=0$,则 x_1 是方程的一个根,从而一元五次方程就可以求解了。

8. 检验1 ~3:代入法、定理 1、多项式综合除法,三者任一即可(附录 1)

9. 复根的求解:① 复系数:有其公式;② 实系数:先求实根后求复根(附录 3)

2.1 实根

2.1.1 任意实系数

以下例题的序号与第1章的方程(1～16)序号相对应。

例1 $x^5-285x^4+30925x^3-1571355x^2+36080674x-271591320=0$ (1)

解：1. $-a_5=-285<0$，判定方程(1)正根之和>|负根之和|(附录2)

2. 方程的各项运算符号：+ − + − + −，判定方程(1)全是正根(附录2性质1)

3. 分解各项系数、常数项(e_5)各为素因数之积

$-a_5=-285=-\check{3}\times5\times\check{19}$；$-e_5=-271591320=-2\times2\times2\times\check{3}\times5\times7\times7\times11\times13\times17\times\check{19}$(附录5、7)(✓：表示系数与常数项有公因数)

4. $\sqrt[5]{|-e_5|}=\sqrt[5]{|-271591320|}\approx48.6164425\approx49$；$|-a_5|\div5=|-285|\div5=57$(附录4)

5. 根的范围：设一个根为x_1，则$57\leqslant x_1$或$x_1<57$(附录8)

6. $x_1=\check{3}\times\check{19}=57=57$($-a_5$与$-e_5$的公因数，或常数项($e_5$)法，或四次项系数($a_5$)法)

7. 确定x_1的值，试除：方程(1)÷(−57)(多项式综合除法法则)(附录6)

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -285 & +30925 & -1571355 & +36080674 & -271591320 & -57 \\
 & -57 & +12996 & -1021953 & +31315914 & -271591320 & \\
\hline
1 & -228 & +17929 & -549402 & +4764760 & -0 &
\end{array}
$$

所以57是方程(1)的一个正根 (2)

$$x^4-228x^3+17929x^2-549402x+4764760=0 \quad (3)$$

8. 解方程(3)，得14、55、68、91 (4)

9. 由(2)、(4)得五个根：14、55、57、68、91 (5)

10. 检验：定理1，① 五个根之和相反数$=-(14+55+57+68+91)=-285=-a_5$=四次项系数

② 五个根之积相反数$=-14\times55\times57\times68\times91=-271591320=-e_5$=常数项(附录1)

所以14、55、57(主)、68、91是方程(1)的五个正根(整数根)(主：表示$x_1=57$是方程首先要求的一个根)

例2 $x^5+\dfrac{\overset{\check{3}\times53}{159}}{100}x^4+\dfrac{823}{1000}x^3+\dfrac{\overset{\check{3}\times3\times151}{1359}}{10000}x^2-\dfrac{617}{100000}x-\dfrac{2310}{1000000}=0$ (1)

解：1. $a_5=\dfrac{159}{100}>0$，判定方程(1)|负根之和|>正根之和(附录2)

2. 方程的各项运算符号：+ + + + − −，判定方程(1)|四个负根之和|>一个正根(附录2)

3. $\sqrt[5]{|-e_5|}=\sqrt[5]{\left|-\dfrac{2310}{10^6}\right|}=\sqrt[5]{0.00231}$(附录4)$\approx0.296975\approx0.3<1$，判定方程(1)

是真分数根(或纯小数根)(附录4)

4. 根的范围：设一个根 x_1，则 $x_1 \leqslant 0.3$，或 $x_1 > 0.3$(附录8)

5. 分解常数项(e_5)为素因数之积

$$-e_5 = -\frac{2310}{10^6} = -\frac{2\times3\times5\times7\times11}{10^6} = -\frac{2}{10}\times\frac{\overset{\checkmark}{3}}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{11}{100} \quad (\text{附录7})$$

6. 素数法(定理3)：$-\frac{2}{10}$、$-\frac{3}{10}$、$-\frac{5}{10}$、$-\frac{7}{10}$、$\frac{11}{100}$是方程(1)的五个素数根(附录1)

7. 常数项(e_5)法：$x_1 = \left|\frac{-3}{10}\right| = |-0.3| = 0.3$(附录8)

8. 公因数法：$x_1 = -\frac{\overset{\checkmark}{3}}{10} = -0.3$($a_5$、$c_5$ 与 $-e_5$ 的公因数)(附录8)

9. 检验1：① 五个根之和相反数 $-\left[-\frac{2}{10}-\frac{3}{10}-\frac{5}{10}-\frac{7}{10}+\frac{11}{100}\right] = -\left[-\frac{17}{10}+\frac{11}{100}\right] = -\left[-\frac{159}{100}\right] = \frac{159}{100} = a_5 =$ 四次项系数$\left(\text{且}\left|-\frac{117}{10}\right| > \frac{11}{100}\right)$

② 五个根之积相反数 $= -\left(-\frac{2}{10}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)\left(-\frac{5}{10}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)\left(\frac{11}{100}\right) = -\frac{2310}{10^6} = -e_5 =$ 常数项(附录1)

检验2：多项式综合除法(附录8)

$$\begin{array}{l|l}
1+\frac{159}{100}+\frac{823}{1000}+\frac{1359}{10000}-\frac{617}{100000}-\frac{2310}{10^6} & \frac{2}{10} \\
-)\quad +\frac{20}{100}+\frac{278}{1000}+\frac{1090}{10000}+\frac{538}{100000}-\frac{2310}{10^6} & \\
\hline
1+\frac{139}{100}+\frac{545}{1000}+\frac{269}{10000}-\frac{1155}{100000}-0 & \frac{3}{10} \\
\quad +\frac{30}{100}+\frac{327}{1000}+\frac{654}{10000}-\frac{1155}{100000} & \\
\hline
1+\frac{109}{100}+\frac{218}{1000}-\frac{385}{10000}-0 & \frac{5}{10} \\
\quad +\frac{50}{100}+\frac{295}{1000}-\frac{385}{10000} & \\
\hline
1+\frac{59}{100}-\frac{77}{1000}-0 & \frac{7}{10} \\
\quad +\frac{70}{100}-\frac{77}{1000} & \\
\hline
1-\frac{11}{100}-0 & -\frac{11}{100} \\
\quad -\frac{11}{100} & \\
\hline
1-0 &
\end{array}$$

所以 $-\frac{2}{10}$、$-\frac{3}{10}$、$-\frac{5}{10}$、$-\frac{7}{10}$、$\frac{11}{100}$是方程(1)的五个真分数根，或 -0.2、-0.3、-0.5、

-0.7、0.11 是方程(1)的五个纯小数根。

例 3 $x^5-32.5x^4+382.95x^3-2047.855x^2+5002.5544x-4461.8574=0$ (1)

解：1. $-a_5=-32.5<0$，判定方程(1)正根之和 > |负根之和|

2. 各项运算符号：+ − + − + −，判定方程(1)全是正根

3. 分解常数项(e_5)为素因数之积

$$-e_5=-4461.8574=-\frac{446185740}{10^5}=-\frac{2\times2\times3\times\overset{\checkmark}{5}\times7\times11\times13\times\overset{\checkmark}{17}\times19\times23}{10^5}$$

4. 四次项系数法(a_5)：$|-a_5|\div5=|-32.5|\div5=6.5$；$|-32.5|\div4=8.125$

5. 根的范围：设 x_1 是方程(1)的一个根，则 $x_1\leqslant8.125$，或 $x_1>8.125$

6. $x_1=\dfrac{5\times17}{10}=8.5>8.125$

7. 确定 x_1 的值，试除：方程(1) ÷ (−8.5)

$$\begin{array}{rl|l}
 & 1-32.5+382.95-2047.855+5002.5544-4461.8574 & \underline{-8.5} \\
-) & \underline{\quad-\ 8.5+204\quad-1521.075+4477.63\quad-4461.8574} & \\
 & 1-24\quad+178.95-\ 526.78\ +\ 524.9244-0 &
\end{array}$$

所以 8.5 是方程(1)的一个混小数根 (2)

$$x^4-24x^3+178.95x^2-526.78x+524.9244=0 \qquad (3)$$

8. 解方程(3)，得 2.2、3.9、4.6、13.3 (4)

9. 由(2)、(4)得五个根：2.2、3.9、4.6、8.5、13.3 (5)

10. 检验：定理 1

① 五个根之和相反数 $=-(2.2+3.9+4.6+8.5+13.3)=-32.5=-a_5$
　　　　　　　　　= 四次项系数

② 五个根之积相反数 $=-(2.2\times3.9\times4.6\times8.5\times13.3)$
　　　　　　　　　$=-4461.8574=-e_5=$ 常数项

所以 2.2、3.9、4.6、8.5、13.3 是方程(1)的五个混小数根，或 $2\frac{2}{10}$、$3\frac{9}{10}$、$4\frac{6}{10}$、$8\frac{5}{10}$(主)、$13\frac{3}{10}$ 是方程(1)的五个假分数根(或称带分数根)。

例 4 $x^5-(2+\sqrt3)x^4-(30-2\sqrt3)x^3+(1+30\sqrt3)x^2+(6-\sqrt3)x-6\sqrt3=0$ (1)

解： 1. 方程(1)各项(除首项 = 1 外)都含有“$\sqrt3$”

2. 方程(1) ÷ $(-\sqrt3)$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 1-(2+\sqrt3)-(30-2\sqrt3)+(1+30\sqrt3)+(6-\sqrt3)-6\sqrt3 & \underline{-\sqrt3} \\
-) & \underline{\quad-(\quad+\sqrt3)-(\quad-2\sqrt3)+(\quad+30\sqrt3)+(\quad-\sqrt3)-6\sqrt3} & \\
 & 1-2\qquad-30\qquad+1\qquad+6\qquad-0 &
\end{array}$$

所以 $\sqrt3$ 是方程(1)的无理数根 (2)

$$x^4-2x^3-30x^2+x+6=0 \qquad (3)$$

3. 解方程(3)，得 $\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$、$\dfrac{7\pm\sqrt{37}}{2}$ (4)

4. 由(2)、(4)得五个根：$\sqrt{3}$、$\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$、$\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$(无理数根)

5. 检验适合题意(略)(定理 1)。

下面根据根的类型分别举例说明具体的解法。

一、整数根

(一) 属于整数根、四个正根之和 > |一个负根|的情况

例 5 $-a_5 = -103, -b_5 = -4383, c_5 = 843967, -d_5 = -30111634, e_5 = 271591320$ (1)

解：1. $-a_5 = -103 < 0$，判定方程(1)正根之和 > |负根之和|

2. 各项运算符号：$+ - - + - +$，判定方程(1)四个正根之和 > |一个负根|

3. 分解常数项为素因数之积

$e_5 = 271591320 = 2 \times \check{2} \times \check{2} \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13 \times \check{17} \times 19$

4. $|-a_5| \div 5 = |-103| \div 5 = 20.6$

5. $\sqrt[5]{e_5} = \sqrt[5]{2715\,91320} \approx 48.6$

6. $\sqrt[5]{e_5} + (|-a_5| \div 5) = 48.6 + 20.6 = 69.2$

7. 根的范围：设所求一个根为 x_1，则 $69.2 \leqslant x_1$ 或 $x_1 < 69.2$

8. $x_1 = 2 \times 2 \times 17 = 68 < 69.2$(常数项($e_5$)法)

9. 确定 x_1 的值，试除：方程(1) ÷ (-68)

$$\begin{array}{r|l} 1 - 103 - 4383 + 843967 - 3011\,1634 + 2715\,91320 & -68 \\ -)\quad -\ 68 + 2380 + 459884 - 2611\,7644 + 2715\,91320 & \\ \hline 1 -\ 35 - 6763 + 384083 -\ 3993990 + 0 & \end{array}$$

所以 68 是方程(1)的一个正根 (2)

$$x^4 - 35x^3 - 6763x^2 + 384083x - 3993990 = 0 \quad (3)$$

10. 解方程(3)，得 14、55、57、-91 (4)

11. 由(2)、(4)得五个根：14、55、57、68、-91

12. 检验：① 五个根之和相反数 $= -(14 + 55 + 57 + 68 - 91) = -103 = -a_5$

$=$ 四次项系数

② 五个根之积相反数 $= -14 \times 55 \times 57 \times 68(-91) = 2715\,91320$

$= e_5 =$ 常数项

所以 14(公)、55、57、68(主)、-91 是方程(1)的五个根，且$(14 + 55 + 57 + 68) > |-91|$，即 $194 > |-91|$(公：表示分数与常数项是公因数根)。

(二) 属于整数根、四个正根之和 < |一个负根|的情况

例 6 $a_5 = 7, -b_5 = -10183, c_5 = 580697, -d_5 = -1195\,7274, e_5 = 8072\,0640$ (1)

解：1. $a_5 = 7 > 0$，判定方程(1)|负根之和| > 正根之和

2. 方程(1)的各项运算符号：$+ + - + - +$，判定方程(1)四个正根之和 < |一个负根|

3. 分解常数项为素因数的积

$e_5 = 8072\,0640 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times \check{3} \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times \check{13}$

4. $\sqrt[5]{e_5} = \sqrt[5]{8072\,0640} = 38 > 1$

5. $a_5 \div 5 = 7 \div 5 = 1.4, a_5 \div 4 = 7 \div 4 = 1.75, \sqrt[5]{e_5} + (a_5 \div 4) = 38 + 1.75 = 39.75$

6. 根的范围：设所求一个根为 x_1，则

$$39.75 \leqslant x_1，或 x_1 < 39.75$$

7. $x_1 = \check{3} \times 1\check{3} = 39 < 39.75$（常数项法）

8. 试除，确定 x_1 的值：方程(1) ÷ (−39)

$$\begin{array}{r|l} 1 + \ 7 - 10183 + 580697 - 1195\,7274 + 8072\,0640 & -39 \\ -)\quad -39 - \ 1794 + 327171 - \ 988\,7514 + 8072\,0640 & \\ \hline 1 + 46 - \ 8389 + 253526 - \ 2069760 \ + 0 & \end{array}$$

所以 39 是方程(1)的一个正根 (2)

$$x^4 + 46x^3 - 8389x^2 + 25\,3526x - 2069760 = 0 \qquad (3)$$

9. 解方程(3)，得 14、35、33、−128（略） (4)

10. 由(2)、(4)得五个根：14、33、35、39（主）、−128

11. 检验：① 五个根之积相反数 $= -(14 + 33 + 35 + 39 - 128) = 7 = a_5$

$$= 四次项系数$$

② 五个根之积相反数 $= -14 \times 33 \times 35 \times 39 \times (-128)$

$$= 8072\,0640 = 常数项$$

所以 14（公）、33、35、39（主）、−128 是方程(1)的五个根，且 $(14 + 33 + 35 + 39) < |-128|$，即 $121 < |-128|$。

（三）属于整数根、四个正根之和 = |一个负根|的情况

例 7 $a_5 = 0, -b_5 = -9336, c_5 = 543562, -d_5 = -1126\,8873, e_5 = 7630\,6230$ (1)

解：1. $a_5 = 0$，判定方程(1)正根之和 = |负根之和|

2. 方程(1)的各项运算符号：+0 − + − +，判定方程(1)四个正根之和 = |一个负根|

3. 分解常数项为素因数之积

$$e_5 = 7630\,6230 = 2 \times 3 \times 3 \times \check{5} \times \check{7} \times 7 \times 11 \times 11 \times 11 \times 13$$

4. $\sqrt[5]{e_5} = \sqrt[5]{7630\,6230} \approx 37.714\cdots$

5. 根的范围：设所求一个根为 x_1，则

$$37 \leqslant x_1，或 x_1 < 37$$

6. $x_1 = \check{5} \times \check{7} = 35 < 37$（常数项法）

7. 试除，确定 x_1 的值：方程(1) ÷ (−35)

$$\begin{array}{r|l} 1 + \ 0 - 9336 + 5435\,62 - 1126\,8873 + 7630\,6230 & -35 \\ -)\quad -35 - 1225 + 2838\,85 - \ 908\,8695 + 7630\,6230 & \\ \hline 1 + 35 - 8111 + 259677 - \ 218\,0178 + 0 & \end{array}$$

所以 35 是方程(1)的一个正根 (2)

$$x^4 + 35x^3 - 8111x^2 + 259677x - 2180178 = 0 \qquad (3)$$

（略） (4)

8. 解方程(3)，得 14、33、39、−121

9. 检验：① 五个根之和相反数 $= -(14 + 33 + 35 + 39 - 121) = 0$

$$= a_5 = 四次项系数$$

② 五个根之积相反数 $= -14 \times 33 \times 35 \times 39 \times (-121)$

$$=7630\ 6230=e_5=\text{常数项}$$

所以 14、33(公)、35、39、−121 是方程(1)的五个根,且(14 + 33 + 35(主) + 39) = |−121|,即 121 = |−121|。

当方程的 $a_5=0$,且 $\sqrt[5]{|e_5|}$的值与所求根的值的差数较大,甚至很大时,则采用近似值计算法来解。例如:

第一步:根据根的范围,若判定方程的根 x_1 在 $10<x_1<20$ 或 $100<x_1<200,\cdots$,则

(1) 方程 ÷10

(2) 剩余各项 ÷ 个位数,若余式 =0,则 $x_1=10+$ 个位数是原方程的一个实根成立。

第二步:检验

方程 $\div x_1$(含 $-x_1$),若余式 =0,则 x_1 是原方程的一个实根成立。

同理:

第一步:① 方程 ÷100

② 剩余各项 ÷2 位数,若余式 =0,则 $x_1=100+2$ 位数是方程的一个实根成立。

第二步:检验。方程 $\div x_1$(含 $-x_1$),若余式 =0,则 x_1 是原方程的一个实根成立。类似者,如此类推(略)。

下面有例题。

1. $x^5+0-133x^3+776x^2-1428x+784=0$ (1)

解:1. $a_5=0$,判定方程(1)正根和 = |负根和|

2. 各项运算符号 +0 − + − +,判定四个正根和 = |一个负根|

3. 分解常数项(e_5)表示为素因数积

$$e_5=784=2\times2\times2\times2\times7\times7\times1$$

4. $\sqrt[5]{e_5}=\sqrt[5]{784}\approx3.79\cdots\approx4$

5. 分析:从 e_5 的素因数积发现:有 7 个素因数,其中至少有一个根 x_1 是由两个素因数积来组成,如 $x_1=2\times2=4$,或 $2\times7=14=x_1$,但它们的差数为 10,则可以采用近似值计算法来求解,例如:

第一步:

$$\begin{array}{r l|l}
 & 1+\ 0-133+\ 776-\ 1428+\ \ 784 & \ 10 \\
-) & +10-100-\ 330+11060-124880 & \\
\hline
 & 1-10-\ 33+1106-12488+125664 & \\
 & +10-200+1670-\ 5640 & \\
\hline
 & 1-20+167-\ 564-\ 6848 & \\
 & +10-300+4670 & \\
\hline
 & 1-30+467-5234 & \\
 & +10-400 & \\
\hline
 & 1-40+867 & \\
 & +10 & \\
\hline
 & 1-50+\ 867-5234-\ 6848+125664 & \ 4 \\
 & +\ 4-\ 216+4332-38264+125664 & \\
\hline
 & 1-54+1083-9566+31416+0 &
\end{array}$$

$x_1=-(10+4)=-14$

第二步：检验

$$
\begin{array}{rl}
 & 1+\ 0-133+776-1428+784 \quad \lfloor\ 14 \\
-) & +14-196+882-1484+784 \\
\hline
 & 1-14+\ 63-106+\ \ 56+0
\end{array}
$$

所以 $x_1=-14$ 是方程(1)的一个负根成立。

余者得根：1、2、4、7（略）。

2. $x^5+0-1238133x^3+232976468x^2-11082816000x+4068\ 2880\ 000=0$ (1)

解：1. $a_5=0$，判定方程(1)正根和 = |负根和|

2. 各项运算符号：+0 − + − +，判定方程四个正根和 = |一个负根|

3. 分解常数项(e_5)表示为素因数积

$e_5=4068\ 2880\ 000$

$=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5\times5\times5\times7\times1009$

（计有18个素因数）

4. $\sqrt[5]{e_5}=\sqrt[5]{4068\ 2880\ 000}\approx132.3\cdots$

5. $132.3\div6=22.05$，$132.3\div7=18.8$

6. $\sqrt[5]{e_5}-(132.3\div6)=132.3-22.05=110.25$

$\sqrt[5]{e_5}-(132.3\div7)=132.3-18.8=113.5$

7. 根的范围

$$x_1\leqslant132.3 \quad 或 \quad x_1>132.3$$

$$110.25<x_2<113.5$$

8. 试除

第一步：

$$
\begin{array}{rl}
 & 1+\ \ 0-1238\ 133+2329\ 7646\ 8-1108\ 2816\ 000+4068\ 2880\ 000 \quad \lfloor -100 \\
-) & -100-\ \ 1000\ 0+1228\ 1330\ 0-1101\ 6316\ 800+\ 64\ 9920\ 000 \\
\hline
 & 1+100-1228\ 133+1101\ 6316\ 8-\ \ 6649\ 9200+3403\ 2960\ 000 \\
 & -100-\ \ 2000\ 0+1208\ 1330\ 0+\ 1065\ 0132\ 00 \\
\hline
 & 1+200-1208\ 133-\ \ 1065\ 0132-\ 1131\ 5124\ 00 \\
 & -100-\ \ 3000\ 0+1178\ 1330\ 0 \\
\hline
 & 1+300-1178\ 133-1284\ 6343\ 2 \\
 & -100-\ \ 4000\ 0 \\
\hline
 & 1+400-1138\ 133 \\
 & -100 \\
\hline
 & 1+500-1138\ 133-1284\ 6343\ 2-1131\ 5124\ 00+3403\ 2960\ 000 \quad \lfloor -12 \\
 & -\ 12-\ \ 6144+\ \ 1358\ 3868+1704\ 5676\ 00+3403\ 2960\ 000 \\
\hline
 & 1+512-1131\ 989-1420\ 4730\ 0-2836\ 0800\ 00+0
\end{array}
$$

所以 $x_1=100+12=112$ 是方程(1)的一个实根成立。

第二步：检验

$$
\begin{array}{rl}
 & 1+\ \ 0-1238\ 133+2329\ 7646\ 8-1108\ 2816\ 000+4068\ 2880\ 000 \quad \lfloor -112 \\
-) & -112-\ \ 1254\ 4+1372\ 6596\ 8-1071\ 9576\ 000+4068\ 2880\ 000 \\
\hline
 & 1+112-1225\ 589+\ \ 9571\ 0500-\ \ 3632\ 4000\ 0+\ \ 0
\end{array}
$$

所以 $x_1=112$ 是方程(1)的一个实根成立。

余者得根:4、75、1009、-1200(略)

且 $4+75+112+1009-1200=0=a_5=$ 四次项系数

$-[4\times75\times112\times1009\times(-1200)]=4068\ 2880\ 000=e_5=$ 常数项

所以 4、75、112、1009、-1200 是方程(1)的五个根。

3. $x^5-6x^4-86x^3+864x^2-2507x+2310=0$ (1)

解:1. $-a_5=-6<0$,判定方程正根和 > |负根和|

2. 各项运算符号:+ − − + − +,判定方程四个正根和 > |一个负根|

3. 分解常数项 e_5 表示为素因数积

$$e_5=2310=2\times3\times5\times7\times11$$

4. $\sqrt[5]{e_5}=\sqrt[5]{2310}\approx4.7\approx5$

5. 确定 x_1 的值。试除:近似值计算法

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -6 & -86 & +864 & -2507 & +2310 & \underline{10} \\
 & +10 & -160 & +740 & +1240 & -37470 & \\ \hline
1 & -16 & +74 & +124 & -3747 & +39780 & \\
 & +10 & -260 & +3340 & -32160 & & \\ \hline
1 & -26 & +334 & -3216 & +28413 & & \\
 & +10 & -360 & +6940 & & & \\ \hline
1 & -36 & +694 & -10156 & & & \\
 & +10 & -460 & & & & \\ \hline
1 & -46 & +1154 & & & & \\
 & +10 & & & & & \\ \hline
1 & -56 & +1154 & -10156 & +28413 & +39780 & \underline{1} \\
 & +1 & -57 & +1211 & -11367 & +39780 & \\ \hline
1 & -57 & +1211 & -11367 & +39780 & +0 &
\end{array}$$

所以 $x_1=-(10+1)=-11$ 是方程(1)的一个实根。

余者得根:2、3、5、7(略)

且 $2+3+5+7-11=17-11=6$ 即 $17>|-11|$。

注:因为 e_5 的积是 5 个素因数,根据定理 3,知方程(1)的五个根是 2、3、5、7、-11。

4. $x^5-37x^4+513x^3-3275x^2+9398x-9240=0$ (1)

解:1. $-a_5=-37<0$

2. 各项运算符号:+ − + − + −,判定方程全是正根

3. 分解常数项(e_5)表示是素因数积

$$-e_5=-9240=-2\times2\times2\times3\times5\times7\times11$$

4. $\sqrt[5]{|e_5|}=\sqrt[5]{|-9240|}\approx6.2\approx7$

5. 根的范围:$x_1\geqslant7$ 或 $x_1<7$

6. 确定 x_1 的值,试除:近似值计算法

$$\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & 1 & -37 & +513 & -3275 & +9398 & -9240 & \underline{-10} \\
-) & & -10 & +270 & -2430 & +8450 & -9480 & \\ \hline
 & 1 & -27 & +243 & -845 & +948 & +240 & \\
 & & -10 & +170 & -730 & +1150 & &
\end{array}$$