高等学校试用教材

线性代数

李海峰　主编
杨志坚　张国顺　副主编
王蓴芳　主审

国防工业出版社

前　　言

本书是在纺织高等院校基础学科教育委员会的关怀下，受纺织院校数学协作组的委托，由郑州纺织工学院、郑州工学院等院校共同编写的一本试用教材．本书按照工科数学教学大纲的要求，编入了理工科（数学专业除外）及文科各专业所必需的线性代数的基本内容，其中包括矩阵与行列式、n 维向量、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换，既适用于本科的教学，也可作为工程、文理及经济等类院校的专科教材．

在编写本书的过程中，我们从工科、文科等非数学专业教学的实际需要出发，针对工程、经济、文理（数学除外）等类专业的特点，注意到以下几点：

1．每章一开始先交待所讨论的主要问题及其来龙去脉和重要意义，使读者不至于感到茫然．

2．概念和结论的引入自然合理，由具体到抽象，由特殊到一般，分门别类，内容集中，重点突出．阐述力求简单明了，通俗易懂．为便于教学，对许多抽象的概念与定理的叙述和证明加以简化，做到既不影响其应用，又不失抽象性和逻辑性．

3．全书自始至终以矩阵理论为主线，从内容与体系上大胆改革．首先集中叙述矩阵的有关概念和运算，行列式用归纳法定义（仅写一节）；对 n 维向量组的线性相关性这一概念重点处理，化难为易；对线性方程组直接给出了克莱姆法则和矩阵的统一解法，易于掌握；而二次型则讲了将其化为标准形的配方法，矩阵变换法和正交变换法；线性空间与线性变换仍作为选学内容，但从几何直观出发，先从二维、三维讲到 n 维向量空间的线性变换，再过渡到一般的线性空间与线性变换．所有内容以方法的介绍为主，例题较多，习题按节配置，每章后备以提高性和综合训练性的复习题，以便读者用于应付各类

考试,书末附有习题答案.从内容的安排上考虑,基本上一节内容两学时可以讲完,利于教学.

4. 关于矩阵的引入(用投入产出模型等),矩阵的秩的定义方法,行列式的定义和性质的讨论,线性方程组的矩阵解法,克莱姆法则等的证明,n 阶实对称阵的对角化等主要方法的理论根据均大胆地重新加以处理,与传统教材有明显的区别,但因为是初次尝试,未免有不当之处.

本书若作为理工科(数学专业除外)或财经等院校的本科教材,其教学时数约为 36 小时,若不讲第五章则仅需 30 学时;专科院校仅讲不带星号的内容大约只需 24 小时,甚至还可自行删除如第二章第三节或第四章第三节等,则仅用 20 小时左右的学时,而不至于影响正常教学。本书也可作为职工大学、业余大学等院校的教材,自学人员及科学技术和管理人员的参考书.

本书在酝酿细目的过程中,曾得到苏州丝绸工学院蒋元林副教授、上海纺织高等专科学校陈政君副教授的鼎力相助,他们提出了许多极为中肯的意见和建议;在编写过程中,得到了郑州纺织工学院刘永夔、吕忠臣二位副教授和郑州纺织工学院数学教研室全体教师的大力支持和帮助;郑州粮食学院温天舜曾经审阅了手稿,编者在此一并致谢.全书由郑州纺织工学院李海峰副教授主编,郑州工学院杨志坚、郑州纺织工学院张国顺、华北水电学院陈宝娟、刘法贵、河南纺织高等专科学校石俊英等参加了编写,最后由李海峰统稿.

特别值得编者衷心感谢的是,北京大学王萼芳教授在百忙中一直关怀本书的编写,还特意牺牲暑假的休息时间再次认真审阅了原稿,提出了极好的修改意见.这位著名数学家的热情鼓励和精心指教,使本书大为改观.

限于编者的水平和经验,书中定有不少缺点和错误,诚望读者不吝指教.

编者　　1993 年 9 月 10 日

表 1.1

<table>
<tr><td colspan="2">部门间流向
产出→
投入↓</td><td colspan="4">消耗部门</td><td rowspan="2">最终产品</td><td rowspan="2">总产品</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">生产部门</td><td>1</td><td>x_{11}</td><td>x_{12}</td><td>x_{13}</td><td>x_{14}</td><td>Y_1</td><td>X_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_{21}</td><td>x_{22}</td><td>x_{23}</td><td>x_{24}</td><td>Y_2</td><td>X_2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x_{31}</td><td>x_{32}</td><td>x_{33}</td><td>x_{34}</td><td>Y_3</td><td>X_3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>x_{41}</td><td>x_{42}</td><td>x_{43}</td><td>x_{44}</td><td>Y_4</td><td>X_4</td></tr>
</table>

表中的 4×4 个数 $x_{ij}(i,j=1,2,3,4)$可以排成一个数表

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44}. \end{matrix} \tag{1}$$

整个投入产出表从横行看，反映了各部门产品的分配使用情况．用公式表示即

总产品＝中间产品＋最终产品．

或
$$X_i=\sum_{j=1}^{4}x_{ij}+Y_i,\quad i=1,2,3,4;$$

它也可以写成下面方程组的形式

$$\begin{cases} X_1=x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+Y_1, \\ X_2=x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+Y_2, \\ X_3=x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+Y_3, \\ X_4=x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+Y_4. \end{cases} \tag{2}$$

考虑消耗系数（生产单位产品 j 所消耗的产品 i 的数量）a_{ij}的类似问题可以得到下面的分配平衡方程组：

$$\sum_{j=1}^{4}a_{ij}X_j+Y_i=X_i,\quad i=1,2,3,4;$$

即

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+a_{14}X_4+Y_1=X_1, \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+a_{24}X_4+Y_2=X_2, \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+a_{34}X_4+Y_3=X_3, \\ a_{41}X_1+a_{42}X_2+a_{43}X_3+a_{44}X_4+Y_4=X_4. \end{cases} \tag{3}$$

在许多实际问题中，我们还经常遇到下述一般的线性（一次）方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4}$$

其系数可以排成一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}. \end{matrix} \tag{5}$$

工程技术与数学上有时要把一组变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 用另一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经过乘数与加减运算得到的线性式子来表示，这种关系式数学上称为从 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**：

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

其中 a_{ij}为常数($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$). 这个线性变换的系数 a_{ij}也排成了(5)式那样一个矩形数表.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的数表，叫做一个 **m 行 n 列矩阵**，简称 **$m\times n$ 矩阵**，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

这 $m\times n$ 个数叫做矩阵的**元素**，a_{ij}叫做矩阵的第 i 行第 j 列元素.

本书主要研究元素都是实数的矩阵(实矩阵). 通常用大写字母 A、B、C，…表示矩阵. (7)式也可简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$或 $A=(a_{ij})$；为了更清楚地表明矩阵的行、列数，有时也记作 $A_{m\times n}$. 如果两个矩阵的行数、列数分别相等，则称它们为**同形矩阵**. 当 $m=n$ 时，矩阵 $A_{n\times n}$称为 n 阶**方阵**，n 称为方阵 A 的**阶数**. 一个数可以看作是一个一阶方阵.

方阵中从左上角到右下角的直线称为**主对角线**. 主对角线以外的元素都是零的方阵称为**对角方阵**. 主对角线上的元素全是 1 的对角方阵称为**单位方阵**. 关于主对角线为对称的元素相等的方阵，即满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$的方阵称为**对称方阵**.

只有一行的矩阵 $A_{1\times n}=(a_1\ a_2\cdots a_n)$叫做**行矩阵**，只有一列的矩阵 $B_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$叫做**列矩阵**；元素全是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $O_{m\times n}$，不致混淆时简记作 O. 必须注意，不同形的零矩阵是不同的.

例 1 线性变换

$$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n, \end{cases}$$

称为**恒等变换**. 其系数 $a_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成一个 n 阶单位方阵：

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 2 如果同形矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$的所有对应元素都分别相等，即有 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称**矩阵 A 与矩阵 B 相等**，记作 $A=B$.

二 矩阵的线性运算

1 矩阵的加法

定义 3 设有 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵，称元素为 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$的 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$为**矩阵 A 与 B 的和**，记作 $C=A+B$.

由定义可知，不同形的矩阵不能相加.

矩阵的加法满足下列运算规律（A、B、C 都是 $m\times n$ 矩阵）：

1）$A+B=B+A$（交换律）；

证 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，

则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=B+A$.

以下规律可同样证明（略）.

2）$(A+B)+C=A+(B+C)$（结合律）；

3）$A+O=O+A=A$（零矩阵的特性）.

记 $-A=(-a_{ij})$，称为矩阵 A 的负矩阵，则有

4）$A+(-A)=O$（负矩阵的特性）.

有了负矩阵的概念，我们可以定义 $A-B=A+(-B)$，称为矩阵的**减法运算**.

例 2 设某地三个商店在上半年与下半年的主要商品销售额（单位：万元）如表 1.2 所示.

试将三个商店在上半年及下半年的主要商品销售额分别写成两个矩阵；并用矩阵的加法求三个商店全年的主要商品销售额（用矩阵

表示).

表 1.2

品种 时间 商店	小百货		五交		服装	
	上半年	下半年	上半年	下半年	上半年	下半年
东方	10	15	35	45	50	55
华联	15	20	30	40	50	60
巨龙	15	25	40	50	55	70

解 三个商店上半年主要商品的销售额可写成下面的矩阵 A:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 35 & 50\\ 15 & 30 & 50\\ 15 & 40 & 55\end{pmatrix},$$

其中各行分别表示东方、华联、巨龙三个商店上半年销售的小百货、五交、服装三种商品的数量.

下半年主要商品的销售额可写成下面的矩阵 B:

$$B=\begin{pmatrix}15 & 45 & 55\\ 20 & 40 & 60\\ 25 & 50 & 70\end{pmatrix}.$$

三个商店全年的主要商品销售额用矩阵 C 表示,则

$$C=A+B=\begin{pmatrix}25 & 80 & 105\\ 35 & 70 & 110\\ 40 & 90 & 125\end{pmatrix}.$$

2 数与矩阵相乘

定义 4 数 λ 与矩阵 A 的乘积规定为 λ 乘 A 的每一个元素 a_{ij}所得到的矩阵,记作 λA 或 $A\lambda$,即

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

公式（8）也可以倒过来应用，即可从矩阵 A 中提取公因子 λ（理解为 A 的每一个元素都除以数 λ，而将 λ 写在矩阵前面）.

数乘矩阵这种运算满足下列运算规律（A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 为数），请读者自己证明.

1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

3) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$;

4) $1A=A$;　$(-1)A=-A$.

例 3　设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&3&3\\-4&5&6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\4&3&2\end{pmatrix}$，求 $A-2B+3C$.

解

$$A-2B+3C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\times0&2\times3&2\times3\\2\times(-4)&2\times5&2\times6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\times(-1)&3\times(-2)&3\times0\\3\times4&3\times3&3\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-0-3&-1-6-6&0-6+0\\2-(-8)+12&2-10+9&3-12+6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-13&-6\\22&1&-3\end{pmatrix}.$$

习　题　1.1

1.　写出一个 4 阶对称方阵与一个 4 阶对角方阵.

2.　某工厂动力站的两台设备 a_1，a_2 和车间内的三台设备 b_1, b_2, b_3 的管道联结情况如图 1 所示，每条线上的数字表示联结该两设备的不同管道总数. 由该图提供的管道联结信息可用矩阵形式表示（称之为联通矩阵），以便存贮、计算和利用这些信息. 试用联通矩阵 C 表示 a_i 与 b_j 间的管道数；如果各设备间的管道总数都减少一半，试用联通矩阵 D 表示之.

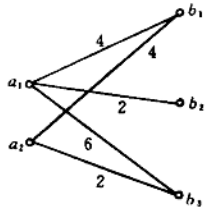

图 1

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix},$$

求 $2A-B$.

4. 求 X，使

$$\begin{pmatrix}1-a&b+1&c\\b&2c-1&3\\1&a+1&3-c\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}a-3&b-c&2-c\\a&2b+c&2\\-1&1&c\end{pmatrix}.$$

§2 矩阵的乘法与转置

一 矩阵与矩阵相乘

我们先来举例说明矩阵乘法的实际意义.

假如有两个工厂生产同样的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品，产量分别是3、5、7件和4、5、6件，生产上述三种产品每件需要甲、乙、丙、丁四种材料，数量如表1.3所示. 让我们来计算按此计划生产三种产品时两个工厂分别需要各种材料的数量.

表 1.3

材料＼产品	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
甲	4	6	8
乙	5	9	7
丙	8	10	5
丁	5	4	3

显然，第一个工厂所需各种材料的数量

甲材料为 $4\times3+6\times5+8\times7=98$,

乙材料为 $5\times3+9\times5+7\times7=109$,

丙材料为 $8\times3+10\times5+5\times7=109$,

丁材料为 $5\times3+4\times5+3\times7=56$;

第二个厂所需各种材料的数量分别为

甲材料 $4\times4+6\times5+8\times6=94$,

乙材料 $5\times4+9\times5+7\times6=107$,

丙材料 $8\times4+10\times5+5\times6=112$,

丁材料 $5\times4+4\times5+3\times6=58$.

若将表中的数据用矩阵 A 表示：

$$A=\begin{pmatrix}4&6&8\\5&9&7\\8&10&5\\5&4&3\end{pmatrix},$$

两个工厂生产三种产品的产量用矩阵 B 表示：

$$B=\begin{pmatrix}3&4\\5&5\\7&6\end{pmatrix}.$$

则上述运算规则可以写成：

$$AB=\begin{pmatrix}4&6&8\\5&9&7\\8&10&5\\5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&5\\7&6\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}4\times3+6\times5+8\times7&4\times4+6\times5+8\times6\\5\times3+9\times5+7\times7&5\times4+9\times5+7\times6\\8\times3+10\times5+5\times7&8\times4+10\times5+5\times6\\5\times3+4\times5+3\times7&5\times4+4\times5+3\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}98&94\\109&107\\109&112\\56&58\end{pmatrix}.$$

若令 $C=\begin{pmatrix}98&94\\109&107\\109&112\\56&58\end{pmatrix}$，则 $AB=C$. 而 C 中第一列各元素依次为第一个工厂需要的甲、乙、丙、丁的材料数，第二列表示第二个工厂所需要的甲、乙、丙、丁四种材料的数量.

从 $AB=C=(c_{ij})$ 可以看出，矩阵 C 的第一行第一列元素 c_{11} 是矩阵 A 的第一行元素与矩阵 B 的第一列对应元素乘积之和. 同样可知矩阵 C 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 恰是矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积之和. 正是根据这个规律，我们可以定义矩阵与矩阵的乘法，它已完全不同于矩阵加法的对对应元素作相应加法运算的规则.

定义 5 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，规定**矩阵** A **与矩阵** B **的乘积**是矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

记作

$$C=AB.$$

因此，前面的方程组(3)可以用矩阵的运算写作

$$X=AX+Y,$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix},\quad A=(a_{ij})_{4\times 4},\quad Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\Y_4\end{pmatrix}.$$

对于线性变换

$$\begin{cases}z_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1s}y_s,\\ z_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2s}y_s,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z_m=a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{ms}y_s,\end{cases} \tag{10}$$

与

$$\begin{cases}y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n,\\ y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_s=b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{sn}x_n,\end{cases} \tag{11}$$

利用矩阵的乘法，可以记为：$Z=AY$ 和 $Y=BX$，其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_s\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_m\end{pmatrix},$$

分别称 A、B 为线性变换 $Z=AY$ 和 $Y=BX$ 的矩阵. 如果把 y_1，y_2，…，y_s 的表示式（11）代入到 z_1，z_2，…，z_m 的表示式（10）中，再按 x_1，x_2，…，x_n 集项（合并同类项），即得到从 X 到 Z 的线性变换（称为上述两个**变换的乘积**）：$Z=CX$，其中矩阵 C 恰为 A 与 B 之乘积，即 $C=AB$. 这就是说，两个线性变换的乘积的矩阵正好是这两个线性变换的矩阵的乘积.

注意：

1）两矩阵只有当左矩阵 A 的列数等于右矩阵 B 的行数时，才可以相乘，否则 A 与 B 不能相乘.

2）乘积矩阵 C（$=AB$）的行数等于左矩阵 A 的行数，C 的列数等于右矩阵 B 的列数；

3）乘积矩阵 C 的元素 c_{ij} 等于左矩阵 A 的第 i 行的元素与右矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积之和：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

例 4　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\text{与 }B=\begin{pmatrix}7&10\\8&11\\9&12\end{pmatrix}$$

的乘积 AB.

解　因为 A 是 2×3 矩阵，B 是 3×2 矩阵，A 的列数等于 B 的行数，所以矩阵 A 与 B 可以相乘，其乘积 $AB=C$ 是一个 2 阶方阵. 由公式（9）得

$$C=AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&10\\8&11\\9&12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times7+2\times8+3\times9&1\times10+2\times11+3\times12\\4\times7+5\times8+6\times9&4\times10+5\times11+6\times12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}50&68\\122&167\end{pmatrix}.$$

例 5　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\text{与 }B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

的乘积 AB 及 BA.

解　按公式(9),有

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

由例 5 知,矩阵的乘法不满足交换律,即在一般情况下,$AB\neq BA$. 由此例还可得知矩阵乘法的消去律不成立,即当 $AB=AC$ 时不一定有 $B=C$. 但矩阵的乘法仍满足以下运算规律(假设运算都是可行的):

1)$(AB)C=A(BC)$;

2)$A(B+C)=AB+AC$,

　$(B+C)A=BA+CA$;

3)$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$. (其中 λ 是数).

以上各条可用矩阵乘法的定义证明.

证 1):　设　$A=(a_{ik})_{m\times n}$, $B=(b_{kj})_{n\times s}$, $C=(c_{jl})_{s\times t}$,

则 $AB=(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})_{m\times s}$, $BC=(\sum\limits_{j=1}^{s}b_{kj}c_{jl})_{n\times t}$,

记　$(AB)C=(d_{il})_{m\times t}$,其中 $d_{il}=\sum\limits_{j=1}^{s}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})c_{jl}$

$$= \sum_{j=1}^{s}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}c_{jl}) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}c_{jl};$$

记 $A(BC) = (e_{il})_{m\times t}$，其中 $e_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{j=1}^{s} b_{kj}c_{jl}) =$

$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{s} a_{ik}b_{kj}c_{jl}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ik}b_{kj}c_{jl}$，由于双重和号可以交换次序，即 $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$，所以 $(AB)C=A(BC)$.

其它各条可类似证明（从略）.

同阶方阵显然可以相乘，据此我们规定矩阵的正整数次幂如下：

$$A^1=A,\ A^2=AA,\ \cdots,\ A^{k+1}=A^kA.$$

由于矩阵的乘法满足结合律，所以方阵的幂满足如下运算规律：

$$A^kA^l=A^{k+l},\ (A^k)^l=A^{kl}\ (k,\ l \text{ 为正整数}).$$

另外，对 $A_{m\times n}$，$O_{p\times m}$及 $O_{n\times l}$，有

$$O_{p\times m}A_{m\times n}=O_{p\times n},\quad A_{m\times n}O_{n\times l}=O_{m\times l}.$$

例 6　在平面的坐标变换中，坐标轴的旋转变换对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

试证

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

证　用数学归纳法．当 $n=1$ 时，等式显然成立．假设 $n=k$ 时等式成立，即设

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

欲证 $n=k+1$ 时成立．此时有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1}&=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta-\sin k\theta\cos\theta\\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}，\text{等式得证.}$$

请读者对此题的结论给出几何解释.

二　矩阵的转置

定义 6　把矩阵 $A_{m\times n}$的行换成同序数的列，得到的新矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记作 A'或 A^T.

即若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n},$$

则

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{n\times m}.$$

由此可知，n 阶方阵 A 为对称方阵的充分必要条件是 $A=A'$.

矩阵的转置运算满足以下运算规律：

1）$(A')'=A$；

2）$(A+B)'=A'+B'$；

3）$(\lambda A)'=\lambda A'$（λ 为常数）；

4）$(AB)'=B'A'$.

前三条是显然的. 第 4 条也不难证明. 事实上，设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，$C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$，$D=B'A'=(d_{ij})_{n\times m}$，由公式(9)有

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

但 B' 的第 i 行为 $(b_{1i}b_{2i}\cdots b_{si})$，$A'$ 的第 j 列为 $(a_{j1}a_{j2}\cdots a_{js})'$，

故 $d_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}=c_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，

即 $D=C'$，

亦即
$$B'A'=(AB)'.$$

例 7　已知
$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&2\\4&2&0\end{pmatrix},$$
求 $(AB)'$.

解法 1　因为
$$AB=\begin{pmatrix}0&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&2\\4&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\11&25&6\end{pmatrix},$$
所以
$$(AB)'=\begin{pmatrix}-4&11\\-2&25\\0&6\end{pmatrix}.$$

解法 2
$$(AB)'=B'A'=\begin{pmatrix}1&4\\7&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&11\\-2&25\\0&6\end{pmatrix}.$$

习　题　1.2

1. 已知两个线性变换
$$\begin{cases}x_1=y_1-y_3,\\x_2=-y_1+2y_2+3y_3,\\x_3=4y_1+3y_2+2y_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1=-z_1+2z_2,\\y_2=2z_2-z_3,\\y_3=4z_1-2z_2+3z_3,\end{cases}$$
求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换.

2. 设
$$A=\begin{pmatrix}3&-2&7\\1&0&4\\6&8&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&0&1\\5&-1&7\\4&-2&1\end{pmatrix},$$