新世纪大学公共数学系列教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

鲁春香 曲文英 主编

河南大学出版社
开封

GAODENG SHUXUE

高 等 数 学

鲁春香 曲文英 主编

河南大学出版社
·开封·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/鲁春香,曲文英主编.—开封:河南大学出版社,2009.9
ISBN 978-7-5649-0050-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.①鲁…　② 曲…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 153753 号

责任编辑　梁宏伟
责任校对　梁宏伟
封面设计　张　松

出　版	河南大学出版社		
	地址:河南省开封市明伦街 85 号	邮编:475001	
	电话:0378-2825001(营销部)	网址:www.hupress.com	
排　版	郑州市今日文教印制有限公司		
印　刷	河南郑印印务有限公司		
版　次	2009 年 9 月第 1 版	**印　次**	2009 年 9 月第 1 次印刷
开　本	787mm×1092mm　1/16	**印　张**	20.5
字　数	449 千字	**印　数**	1—3000 册
定　价	36.00 元		

内容提要

本书以教育部最新颁发的《高职高专高等数学教学基本要求》为依据，充分考虑高职高专院校“高等数学”的特点，由长期在第一线从事高职高专“高等数学”教学的教师，结合自己多年来在教学实践中的经验编写而成。

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。全书共分 11 章，包括一元函数微积分、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、线性代数基础等内容。对于书中带“*”号的内容，可根据不同的专业需求及教学时数进行适当地取舍。

本书适合工科、财经类高职院校各专业使用，也可供各类高职高专院校根据专业需求自行选用。

前　言

本书是新世纪高职高专规划教材，是根据教育部最新颁发的《高职高专高等数学教学基本要求》，在广泛调查研究的基础上，结合高职高专教育改革的新形势，以及编者多年的教学经验和高职高专教改成果编写而成的。

在本书编写过程中，贯彻以学生为本的思想。针对学生基础状况及未来发展需要，注重教材的基础性，着重讲清基本概念、基本思想、基本方法，使学生能够掌握基本概念、形成基本数学思想、会用基本方法、解决基本数学问题。而且能进行知识的迁移，把数学方法和数学思想应用于其他领域，达到解决实际问题的目的。

本书有三大特点：一是以应用为目的，重视几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用意识和能力；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章、节题例设计实用，每节有思考题和习题；每章有知识要点、复习题、自测题，方便教与学。对于书中带"＊"号的内容，可根据不同的专业需求及教学时数进行适当地取舍。

本书配备的各类题型都是精心设计的，有掌握基本知识和方法的习题，每章结束还设计了复习题和自测题。复习题的目的是为了强化全章知识，综合使用所学知识，达到能力提升的目的。自测题重在覆盖面，这样有助于检验学生对本章内容的掌握情况，发现知识的缺陷，从而为完成全部课程的学习奠定基础。在各类型题中均设计了一定量的贴近生活贴近实际的应用题，以增强学生对数学学习的兴趣及应用意识。

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。本书适合工科、财经类高职院校各专业使用，也可供各类高职高专院校根据专业需求自行选用。

本教材主编：鲁春香、曲文英。副主编：郭卫华、杨萍。各位编者具体工作如下：黑龙江七台河职业学院鲁春香（第1,3章及附录Ⅰ），黑龙江信息技术职业学院曲文英（第5,7章及附录Ⅱ），郑州轻工业学院杨萍（第2,4,6,8章），郭卫华（第9,10,11章）。黑龙江信息技术职业学院魏全红老师认真审阅了书稿，并提出了许多宝贵的改进意见和建议，在此我们表示衷心的感谢。

由于时间仓促，水平有限，不足之处在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便改进和修正.

编　者

2008年12月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学中研究的对象多数是不变的量，而在高等数学中，研究的对象是变化的量．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限概念和连续概念是高等数学中两个极其重要的概念，对整个高等数学内容的学习具有奠基性．极限思想是利用有限描述无限、由近似过渡到精确的一种工具和过程，是高等数学的中心思想．所以本章的内容在全书中具有基础性地位和作用．

§1.1　函　数

1.1.1　函数

1. 邻域

我们在高中已经学习过数集及区间的概念，下面给出高等数学中常用的邻域的概念．

给定实数 a，以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**，记作 $U(a)$．

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．如图 1-1 所示．

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 可写作 $|x-a|<\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体．

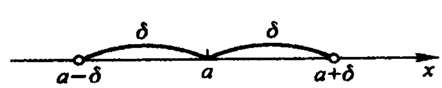

图 1-1

有时会用到点 a 的 δ 邻域中把中心 a 去掉，此时称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

其中，$0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$．

2. 函数概念

定义 1.1 设 x,y 是两个变量,D 是给定的数集,若对于 x 在 D 内每取一个数值,变量 y 按照一定的对应法则 f,总有唯一确定的数值与 x 对应,则称 **y 是 x 的函数**,记作 $y=f(x)$. 其中,数集 D 为函数 $f(x)$的**定义域**,记作 D_f,x 为**自变量**,y 为**因变量**.

当 x 在 D_f 内取定某个数值 x_0 时,对应的 y 取到的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的函数值,函数值的全体称为**函数的值域**,记作 R_f.

如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的函数;如果两个函数的定义域和对应法则中有一项不相同,那么这两个函数就是不同的函数. 所以,确定函数的两个要素(定义域和对应法则)是判断两个函数是否相同的依据.

研究任何函数都要先考虑其定义域,那么在求函数的定义域时,要考虑以下情况:

(1) 分式的分母不能为零;

(2) 偶次开方时,被开方部分非负;

(3) 指数函数和对数函数中,底数大于零且不等于 1,对数函数的真数大于零;

(4) 含反三角函数 $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 时,要满足 $|x|\leqslant 1$;

(5) 若函数同时含有以上几种情况,则要取其交集.

在函数定义中,对于每个 $x\in D_f$,按照对应法则 f,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数称为**单值函数**;如果对于每个 $x\in D_f$,按照对应法则 f,总有确定的函数值 y 与之对应,但这个值不是唯一的,这样定义的函数称为**多值函数**. 例如 $y^2=x$,当 x 任取一个正数时,对应的 y 值有两个,所以这个函数是一个多值函数. 对于多值函数加上限定条件就可以转化为单值函数. 如上述函数加上 $y\geqslant 0$(或 $y\leqslant 0$),就可以转化为单值函数了. 本课程中所讨论的函数除非特别说明,均指的是单值函数.

函数的表示法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-2)}+\sqrt{5-x}$;　　　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\lg\dfrac{x^2+2x}{3}$.

解 (1) 对函数的第一项,要求 $x-2>0$,且 $\ln(x-2)\neq 0$,即 $x>2$,且 $x\neq 3$;对函数的第二项,要求 $5-x\geqslant 0$,即 $x\leqslant 5$. 取公共部分,得函数定义域为$(2,3)\cup(3,5]$.

(2) 由题意得

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\\ x^2+2x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ x>0 \text{ 或 } x<-2.\end{cases}$$

所以所求函数的定义域为(0,3].

例 2 求绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域、值域,并画出图象.

解 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,如图 1-2 所示.

例 3 求符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域、值域,并画出图象.

解 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$,如图 1-3 所示.

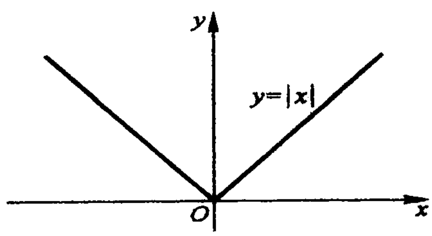

图 1-2

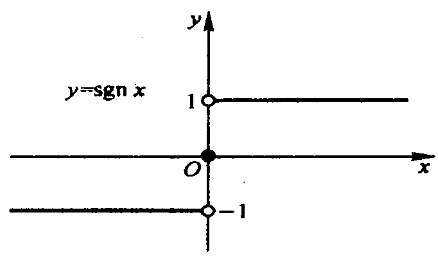

图 1-3

像例 2 和例 3 这两个函数,在定义域的不同范围内,不是用一个式子来表示,而是用两个或两个以上的式子合起来表示,这样的函数称为**分段函数**.

3. 函数的特性

(1) 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D_f,区间 $I\subseteq D_f$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\text{或 } f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$**在区间** I **上是单调增加或单调减少的**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增函数的图象中 x 与 y 同增同减,单调减函数的图象中 x 与 y 增减相反.

(2) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称,如果对于任意一个 $x\in D_f$,恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称函数 $f(x)$为**奇函数**;如果对于任意一个 $x\in D_f$,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

(3) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $I\subseteq D_f$，如果存在正数 M，使得对于任意一个 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界**；如果这样的正数 M 不存在，则称 **$f(x)$ 在区间 I 上无界**. 也就是说，对于任何正数 M，总存在 $x_1\in I$，使 $|f(x_1)|>M$ 成立，那么函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

在所讨论的区间上，**有界函数的图象一定夹在平行于 x 轴的两条直线之间.**

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在一个正数 l，使得对于任意一个 $x\in D_f$，有 $(x\pm l)\in D_f$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为**函数 $f(x)$ 的周期**，使上式成立的最小正数叫**最小正周期**，通常我们所说的周期指的是最小正周期.

周期函数的图象，每隔周期的整数倍重复出现.

正弦函数、余弦函数是同时具有上述四条性质的函数.

4. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f. 如果对于任意的 $y\in R_f$，总有唯一确定的 $x\in D_f$ 通过 $y=f(x)$ 与 y 对应，这时得到以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

习惯上，$y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，且其定义域为 R_f，值域为 D_f.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

例 4 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(2) $f(x)=x+\cos x$；

(3) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-|\sin x|}$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=(2^x+2^{-x})\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=(2^x+2^{-x})\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=(2^x+2^{-x})\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\end{aligned}$$

$$=-(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以，$f(x)=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

(2) 因为 $f(-x)=-x+\cos x$，所以，$f(x)=x+\cos x$ 为非奇非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=f(x)$，所以，$f(x)=x^2\mathrm{e}^{-|\sin x|}$ 为偶函数.

例 5 求函数 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$的反函数.

解 由原式变形得

$$\mathrm{e}^x=\frac{y+1}{y},$$

即 $x=\ln\dfrac{y+1}{y}$，互换 x 与 y，得 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$的反函数为 $y=\ln\dfrac{x+1}{x}$.

1.1.2 复合函数

1. 基本初等函数

下列六类函数统称为**基本初等函数**(也说成是**简单函数**)：

(1) 常数：$y=C$ (C 为常数)；

(2) 幂函数：$y=x^\alpha$(α 为任何实数)；

(3) 指数函数：$y=a^x$($a>0,a\neq 1$)；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$)；

(5) 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$；

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$.

此外，还有多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$(其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是不全为 0 的常数)，在下面复合函数的合成与分解时，可当作基本初等函数来对待.

2. 复合函数

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$为**复合函数**. x 为**自变量**，y 为**因变量**，u 称为**中间变量**.

说明 (1) 两个或两个以上的简单函数，当 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$时，才能构成复合函数；合成时依次代入.

(2) 复合函数分解的原则：每一步是简单函数，从外向内分解，分解后回代能还原；中间变量可有一个，两个，$\cdots$.

例如，由 $y=\mathrm{e}^u, u=\sqrt{x}$构成复合函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$；由 $y=\ln u, u=\sin v, v=x^5$ 构成复合函数 $y=\ln(\sin x^5)$.