抽象分析基础

Fundamentals of Abstract Analysis

肖建中 李刚 编著

清华大学出版社

抽象分析基础

Fundamentals of Abstract Analysis

肖建中 李刚 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以点集拓扑与抽象测度为起点系统地讲述了实分析与泛函分析基本理论，内容包括拓扑与测度、抽象积分、Banach空间理论基础、线性算子理论基础、抽象空间几何学等，对不动点理论、Banach代数与谱理论、无界算子、向量值函数与算子半群等作了一定程度的讨论.

本书理论体系严谨，叙述深入浅出，论证细致，图例并茂，注重数学思想方法的启发与引导，便于自学与教学. 本书适合数学及相关专业研究生和高年级本科生阅读，也可供本领域教师、科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

抽象分析基础/肖建中，李刚编著. —北京：清华大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-302-21106-8

Ⅰ. 抽…　Ⅱ. ①肖…　②李…　Ⅲ. 数学分析　Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 161822 号

责任编辑：石　磊
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京市人民文学印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　印　张：28　字　数：530 千字
版　次：2009 年 9 月第 1 版　印　次：2009 年 9 月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：43.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　产品编号：032793-01

前　言

FOREWORD

自从 18 世纪 Euler 的名著《无穷小分析引论》问世以后，数学中的“分析学”专指运用极限过程分析处理问题的数学分支. 微积分作为古典分析学的开端从几何和代数的主干上生长出来，数形结合成为这一学科的一个基本特征. 将微积分主要创始人的工作思路加以比较是很有意思的：Newton 的思路基本上是几何化的，而 Leibniz 的思路则基本上是代数化的. 微积分发展成为严密的数学分析的过程中，处处体现了几何思想与代数方法的完美结合. 现代分析学是数学分析后继的发展与延伸，必然地保持了这一学科的基本特色与风格. 空间形式（几何）、数量关系（代数）与极限过程这三者依然是现代分析学的主要讨论对象，在处理方式上体现了分析、代数、几何的高度综合与和谐统一.

作为现代分析学的基础分支，实分析与泛函分析诞生于 19 世纪末到 20 世纪初. 这段时间里，数学的发展出现了空前的抽象化潮流，开始追求理论与方法的一般化，以及结构上的和谐与统一. 出现这一潮流有其客观必然性. 数学发展到一定程度，不同分支的某些对象之间的相似性被逐步发现，产生了加工、提炼、归纳与总结的内在动因；集合论的创立与现代公理化方法的完善又为其准备了条件；同时还受到了来自量子力学、物理学等应用学科的推波助澜. 不言而喻，在数学抽象化主流中孕育成熟的实分析与泛函分析都是高度抽象的学科，其抽象程度并不逊色于抽象代数学. 实分析与泛函分析这两门学科的基础内容构成本书的主要取材（以泛函分析为重点）. 虽然两者同是以数学分析为发展的源头，但两者的理论发展方向是不同的. 实分析可通俗地认为是一般集合论意义上的微积分，侧重于将区间或区域上的连续函数类扩充为可测集上的可测函数类来讨论；而泛函分析可通俗地认为是无限维空间上的分析学，侧重于将有限维空间上的数形关系与极限过程拓展到无限维空间来讨论. 本书更愿意将两者的内容视为统一的整体. 前者为后者提供了连续函数空间类与可测函数空间类，

Lusin 定理是这两类重要的空间之间联系的纽带. 泛函分析中涉及到的具体空间模型基本上就是这两大类. 为了突出空间类的这种整体性,本书借助了点集拓扑与抽象测度的技巧. 鉴于上述这些原因,书名定为《抽象分析基础》也许比较恰当.

本书是为数学专业研究生与高年级本科生所编著的教材. 根据作者多年教学实践中的感受,一部好的教材,应充分考虑到数学专业研究生与高年级本科生的学习特点,照顾到本科阶段与研究生阶段教学上的衔接,并且能适合学生自学,使学生开卷有益,为进一步探索数学殿堂打开通道. 本书在这方面做出了一定努力,注意缩小理论推证方面的跨度,不片面追求篇幅的精短,尽可能避免理论的堆砌,穿插例子与示意图以消除阅读中的枯燥乏味感;重视数学思想背景与理论形成过程的揭示,重视对已有知识的比较,重视常用的数学方法的提示与归纳. 读者应当注意到,这门课程虽然抽象难学,但其中许多概念都能在数学分析、线性代数等熟知的内容中找到雏形. 通过与熟知内容的类比、对照等方式来认识理解新概念,符合认知规律,应是值得提倡的学习方法。

本书内容是自封闭的,共分为 9 章. 第 1 章作为全书的引论,讲述点集拓扑与抽象测度的基本概念和性质,其中介绍了两种形式的 Urysohn 引理. 第 2 章讲述以抽象测度为基础而建立的 Lebesgue 积分理论,对 Stieltjes 积分与广义测度作了初步介绍. 从第 3 章至第 5 章为泛函分析基础部分. 第 3 章讲述度量空间、拓扑线性空间、赋范空间、内积空间及其相互关系,介绍完备性、可分性、稠密性和紧性等性质,给出一般形式的 Arzela-Ascoli 定理. 第 4 章讲述线性算子的几个基本定理,简略介绍了两大类函数空间的共轭空间的表示. 第 5 章从 Hilbert 空间的几何学出发讲述抽象空间的几何理论,介绍积空间与商空间技巧,给出紧算子性质与 Fredholm 算子指标理论. 对弱紧性、凸性与光滑性作了详细论述,给出了 Eberlein-Šmulian 定理. 本书在注意加强基础理论讲解的同时,对理论与应用中重要的专题也作了初步介绍. 第 6 章从 Banach 压缩映射原理与 Brouwer 不动点定理出发讲述不动点理论,作为应用,介绍了 Lomonosov 不变子空间定理. 第 7 章讲述 Banach 代数与谱理论,通过符号演算介绍了谱分解定理. 第 8 章讲述向量值函数与算子半群,介绍了算子半群的生成元表示定理. 第 9 章讲述无界线性算子,给出了对称算子的延拓定理与本质谱的刻画. 从第 6 章至第 9 章中各章的内容基本是独立的,可根据不同的专业兴趣选学.

本书是根据作者的讲稿修订与扩充而成的,书中的错漏在所难免,殷切期望读者不吝指正!

本书的出版得到了南京信息工程大学精品教材项目的资助,同时还得到了国家气象局与南京信息工程大学局校共建项目的资助,作者表示衷心的感谢.

在本书编写过程中,朱杏华、陆盈、刘小燕、熊萍萍等老师参与了原始讲稿的整理录入工作,作者的研究生孙晶、黄轩、陶媛等以及南京信息工程大学应用数学专业2007级全体研究生参与了原始讲稿的录入工作,作者对他们付出的辛勤劳动一并表示衷心的感谢.

作者特别感谢清华大学出版社对本书的出版所给予的支持与帮助,感谢石磊先生付出的辛劳!

肖建中　李刚

2008年11月20日

于南京信息工程大学

目 录

CONTENTS

关于抽象

本书试图以抽象化方法来阐述分析学中的基本理论，其主要内容是函数论与线性泛函分析.

我们知道，抽象是数学的重要特征. 数学的主要分支在发展过程中继承了古希腊数学中 Euclid《几何原本》的光辉传统，逐渐形成严密的公理化形式体系. 抽象化与形式化是 20 世纪数学发展的主要趋势之一. 这种趋势最初受到了两大因素的推动，即 19 世纪末由 Cantor 所创立的集合论与 Hilbert 所完善的现代公理化方法. 正是由于二者的结合，才导致了 20 世纪上半叶实变函数论、泛函分析、拓扑学、抽象代数学等高度抽象的数学分支的诞生. 本书的主要概念基本上都由公理法导出，但这并不妨碍从直观形象的渠道去理解体会这些概念.

抽象化方法的运用有许多突出的优点. 原本形形色色的复杂对象经抽象后舍弃了不起主导作用的复杂细节，其被掩盖了的本质凸显出来，这使得问题的讨论变得更加直接、更加简单. 抽象化方法用高度概括的形式统一了外观上极不相同的问题，沟通了表面看起来互不相关的领域，使理论体系有更大的包容性，从而具有更加广泛的应用性. 这是人们推崇抽象化方法的根本原因. 适应和掌握了此方法，也许就取得了现代分析学登堂入室的通行证.

第1章 拓扑与测度

分析学中最基本的概念是极限,而描述极限最一般的框架结构是拓扑空间.分析学中另一基本概念是测度,其中 Lebesgue 测度是通常的长度、面积、体积等概念的抽象.拓扑与测度理论已成为抽象分析学的基本工具.本章的目的是介绍拓扑空间与测度空间的基本性质(分别置于1.2节与1.3节).读者若将拓扑空间、开集、连续函数与可测空间、可测集、可测函数相对应,注意其联系与区别,则更利于内容的理解.作为预备,有必要回顾一下集合论的知识(置于1.1节).

1.1 集与映射

1.1.1 集与映射的概念

我们首先熟悉一下集论与映射的基本用语.

给定集 X,表示 X 的子集 A 的标准方式是

$$A=\{x\in X\colon x \text{ 满足 } P\} \text{ 或 } A=\{x\in X \mid x \text{ 满足 } P\},$$

其中 P 表示与 X 中的元素有关的命题或条件.设 $A,B\subset X$,定义**差集**

$$A\backslash B=\{x\in X\colon x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

A^c 表示差集 $X\backslash A$,称为 A 的**余集或补集**.显然有 $A\backslash B=A\cap B^c$.

通常,用$\mathbb{Z}$表示整数集,$\mathbb{Z}^+$表示正整数集,$\mathbb{Q}$表示有理数集,$\mathbb{R}^1$表示实数集(或称为实数空间),$\mathbb{C}$表示复数集,$\mathbb{K}$表示实数或复数集.

用$\mathbb{R}^n$表示通常的实 n 维 Euclid 空间,其上的向量内积、向量长度与两点间距离分别是

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n a_ib_i,\quad \|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2},\quad \|x-y\|=\left[\sum_{i=1}^n(a_i-b_i)^2\right]^{1/2},$$

其中 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. 记

$$B_\varepsilon(x)=\{z:\ \|z-x\|<\varepsilon\},\quad B_\varepsilon[x]=\{z:\ \|z-x\|\leqslant\varepsilon\}$$

分别为$\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心，$\varepsilon(\varepsilon>0)$为半径的开球和闭球.

设 X，Y 是集，若对每个 $x\in X$，有唯一的一个元素 $y\in Y$ 与之对应，则称在 X 上定义了一个在 Y 中取值的**映射** f，记为 $f:X\to Y$. 映射与算子、变换等都是同义语. 通常当 Y 是数集时称映射 $f:X\to Y$ 为**函数**.

若 Y 中每个元素在 f 下都有逆像(原像)，即

$$f(X)=\{y\in Y:\quad y=f(x),x\in X\}=Y$$

则称 f 为**满射**；若对 X 中任意两个互异的元素 x_1 与 x_2，其像(值)$f(x_1)$与 $f(x_2)$也互异，即 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为**单射**. 既单又满的映射称为**双射或一一对应**. 当且仅当 f 是双射时**逆映射** $f^{-1}:Y\to X$ 存在，此时 $f\circ f^{-1}=I_Y$，$f^{-1}\circ f=I_X$，其中 I_X，I_Y 分别为 X，Y 上的恒等映射.

设 $X_0\subset X$，$f:X\to Y$，$f_0:X_0\to Y$ 为映射. 若 $\forall x\in X_0$ 有 $f_0(x)=f(x)$，则称 f 是 f_0 的**延拓或扩张**，f_0 是 f 在 X_0 上的**限制**，常记为 $f_0=f|_{X_0}$.

定义 1.1.1

设 X，Y 是集，若存在一个从 X 到 Y 的双射，则称 X 与 Y 是**对等**的，或称 X 与 Y 有相同的**基数或势**，记作 $X\sim Y$ 或 $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y$. 若 X 与 Y 的子集 Y_0 对等，即 $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y_0$，则称 X 的势小于或等于 Y 的势，记为 $\mathrm{card}X\leqslant\mathrm{card}Y$. 若 $\mathrm{card}X\leqslant\mathrm{card}Y$ 且 $\mathrm{card}X\neq\mathrm{card}Y$，则称 X 的势小于 Y 的势，记为 $\mathrm{card}X<\mathrm{card}Y$.

按定义 1.1.1，有限集(包括空集)的基数或势就是其元素的个数. 正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的势用符号$\aleph_0$(读作阿列夫零)来表示. 若 $X\sim\mathbb{Z}^+$，则称 X 为**可列集**；若 X 为有限集或可列集，则称 X 为**可数集**(也称 X 为**至多可列集**)；若 X 不是可数的，则称 X 为**不可数集**. $\mathbb{R}^1$ 是不可数集. 若 $X\sim\mathbb{R}^1$(或 $X\sim[0,1]$，$\mathbb{R}^1$ 中的闭区间)，则称 X **具有连续统的势**，用符号$\aleph$记之.

若 X 是由 n 个元素组成的集合，则 X 的一切子集组成的集族恰有 $2^n(=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$个元素. 设 X 是任意集，用 2^X 记 X 的子集全体，称为 X 的**幂集**. 若 $\mathrm{card}X=\beta$，则 $\mathrm{card}2^X=2^\beta$. 可以证明，$\aleph=2^{\aleph_0}$.

设 $\zeta\subset 2^X$，即 $\zeta=\{A_\alpha\subset X:\ \alpha\in I\}$为集族，其中 I 称为指标集，它可以是可数集，也可以是不可数集. ζ 本身也可作为指标集. **集族的并与交**定义为

$$\bigcup\{A:\ A\in\zeta\}=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\in X:\ \exists\alpha\in I,x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap\{A:\ A\in\zeta\}=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\in X:\ \forall\alpha\in I,x\in A_\alpha\}.$$

设 $A\subset X$，我们以 χ_A 表示 A 的**特征函数**，即

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

集合间的运算与其特征函数间的运算是一致的，若以 $\vee$ 与 $\wedge$ 分别表示上确界 sup 与下确界 inf，则有

(C1) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)$；

(C2) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\wedge\chi_B(x)$；

(C3) $\chi_{A^c}(x)=1-\chi_A(x)$；

(C4) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\bigvee\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$；

(C5) $\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\bigwedge\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$.

任给集 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，称 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n\}$为集 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的(Cartesian)**积集**，也记为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，其中每个 X_i 称为积集的**坐标集**. 当 $X_i=X(1\leqslant i\leqslant n)$时记 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i=X^n$，称为 X 的 n **重积**.

$\mathbb{R}^n$ 就是$\mathbb{R}^1$ 的 n 重积. 设$[a_k,b_k]$是$\mathbb{R}^1$ 的闭区间，$k=1,2,\cdots,n$. 则 $\prod\limits_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$称为$\mathbb{R}^n$ 的**闭方体**.

设 $f:X\to Y$ 是映射，称 $G(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}$为 f 的**图像**. 如图 1-1 所示. 显然有 $G(f)\subset X\times f(X)\subset X\times Y$，$(x,y)\in G(f)$当且仅当 $x\in X,y=f(x)$.

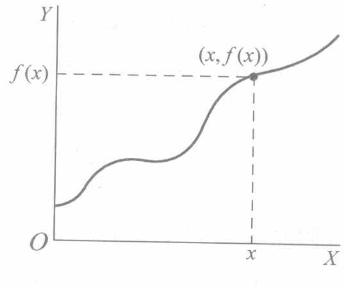

图 1-1

映射也可以用其“图像”的方式来定义.

定义 1.1.2

设 X 与 Y 是两个非空集，任意子集 $F\subset X\times Y$ 都称为一个从 X 到 Y 的**关系**. $(x,y)\in F$ 时称 x 与 y 为 F 相关，也记为 xFy 或 $y\in Fx$. 若 $F\subset X\times X$，则 F 称为 X 上的一个**二元关系**.

于是，映射可定义为：给定 $f\subset X\times Y$，若每个 $x\in X$ 存在唯一的 y 使 xfy（记为 $y=f(x)$），则称 f 为映射，记作 $f:X\to Y$. 这样定义的映射更能明确地体现映射的本质.

设 $f:X\to Y$ 是映射，$A\in 2^X$，$A_\alpha\in 2^X$，$B\in 2^Y$，$B_\alpha\in 2^Y$. 记

$$f(A)=\{y\in Y:y=f(x),x\in A\},$$

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}.$$

称 $f(A)$ 为 A 在 f 下的像；称 $f^{-1}(B)$ 为 B 在 f 下的逆像(原像). 则易知以下关系式为真：

(M1) $A\neq\varnothing\Rightarrow f(A)\neq\varnothing$，　$B\neq\varnothing\not\Rightarrow f^{-1}(B)\neq\varnothing$；

(M2) $f(f^{-1}(B))\subset B$，　$f^{-1}(f(A))\supset A$；

(M3) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$，　$f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(M4) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$，　$f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(M5) $f^{-1}(B_1\backslash B_2)=f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2)$，　$f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.

1.1.2　积集，商集，极限集

我们知道，无限实数列可视为正整数集 $\mathbb{Z}^+$(指标集)到实数集 $\mathbb{R}^1$ 的映射；有限实数列 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 可视为指标集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到实数集 $\mathbb{R}^1$ 的映射. 在这里，映射的作用就是使 $\mathbb{R}^1$ 中的某个实数"映上一个指标". 同样，n 个集合的积集也可以用映射的方式来定义. 设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 为指标集，则

$$\prod_{i=1}^{n}X_i=\left\{x\,\middle|\,\text{映射 } x: I\to\bigcup_{i=1}^{n}X_i \text{ 使 } \forall i\in I \text{ 有 } x(i)\in X_i\right\}.$$

这样的定义同样表示 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 中的元素为 $x=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$. 因而，任意多个集之积集可借助映射的方式方便地定义.

定义 1.1.3

设 $\{X_i: i\in I\}$ 是给定的集族，其中 I 是任意指标集. 将

$$\prod_{i\in I}X_i=\left\{x\,\middle|\,\text{映射 } x: I\to\bigcup_{i\in I}X_i \text{ 使 } \forall i\in I \text{ 有 } x(i)\in X_i\right\}$$

称为**集族** $\{X_i: i\in I\}$ **的积集**，$x_i=x(i)$ 称为 x 的**第 i 坐标**，X_i 称为积集之**坐标集**. 若映射 $P_i: \prod\limits_{i\in I}X_i\to X_i$ 使 $P_i(x)=x_i$，则称 P_i 为**从积集到坐标集的投影**，它显然是满射. 若 $\forall i\in I, X_i=X$，则记 $\prod\limits_{i\in I}X_i$ 为 X^I，由于 $\bigcup\limits_{i\in I}X_i=X$，因而 X^I 就是 I 到 X 的映射的全体.

注意这里的记号与幂集的记号 2^X 在含义上是统一的，2^X 可视为 X 到 $\{0,1\}$ 的一切映射(X 的子集的特征函数)的全体.

商集概念与等价类有关.

定义 1.1.4

设 X 是非空集，R 是 X 上的二元关系，若 R 满足

(R1) R 是自反的，即 $\forall x \in X$ 有 $(x,x)\in R$；

(R2) R 是传递的，即 $(x,y)\in R,(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$；

(R3) R 是对称的，即 $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$.

则称 R 是**等价关系**，此时 xRy 也记为 $x\sim y$.

定义 1.1.5

设 X 是非空集，R 是 X 上的等价关系，记 $[x]=\{y\in X: y\sim x\}$，称 $[x]$ 为含 x 的**等价类**. X 中等价类的全体称为 **X 关于 R 的商集**，记为 X/R，即

$$X/R=\{[x]: x\in X\}.$$

若映射 $P: X\to X/R$ 使 $P(x)=[x]$，则称 P 是**从 X 到其商集的投影**或**商投射**，P 显然是满射.

上述定义 1.1.5 中，由于 R 是等价关系，由此容易推出两个等价类 $[x]$，$[z]$ 要么重合(相等)，要么互不相交，因而商集的定义是有确定意义的.

例 1.1.1 设 $\mathbb{Z}_0$ 是整数集 $\mathbb{Z}$ 中的偶数子集，它决定 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系 R：$xRy\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}_0$. $\mathbb{Z}/R=\{[0],[1]\}=\{\mathbb{Z}_0,\mathbb{Z}_0^c\}=\{\mathbb{Z}_0+0,\mathbb{Z}_0+1\}$.

例 1.1.2 在通常三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $O-XYZ$，令 $E=\{(x,0,0): x\in\mathbb{R}^1\}\subset\mathbb{R}^3$，即 E 为 X 轴. 它决定 $\mathbb{R}^3$ 上的等价关系 R：$xRy\Leftrightarrow x-y\in E$. 商集 $\mathbb{R}^3/R$ 为所有与 X 轴平行的直线.

值得注意的是商集中的元 $[x]$ 对商集 X/R 来说是一个元，对原集 X 来说是一个子集.

以下记 $[-\infty,\infty]=\mathbb{R}^1\cup\{-\infty,\infty\}$，称为**扩充实数集**.

首先我们回顾一下数列的上、下极限概念.

定义 1.1.6

设 $\{a_n\}$ 为 $[-\infty,\infty]$ 内的序列，令

$$b_k=\sup\{a_k,a_{k+1},\cdots\}=\sup_{n\geqslant k}a_n,\quad \beta=\inf\{b_1,b_2,\cdots\}=\inf_{k\geqslant 1}b_k.$$

称 β 为 $\{a_n\}$ 的**上极限**，记作 $\beta=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$ (或 $\beta=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$)，即

$$\limsup_{n\to\infty}a_n=\inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}a_n.$$

类似地定义**下极限** $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\sup\limits_{k\geqslant 1}\inf\limits_{n\geqslant k}a_n$.

易知，扩充实数集中序列的上、下极限总是存在的(允许为 $-\infty$ 或 ∞)，且有下述性质：

(L1) $\{\sup\limits_{n\geqslant k}a_n\}_{k=1}^{\infty}$ 递减，$\{\inf\limits_{n\geqslant k}a_n\}_{k=1}^{\infty}$ 递增；

(L2) 若 $\beta=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$，$\alpha=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$，则必存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_i}\}$ 与 $\{a_{n_j}\}$ 使 $a_{n_i}\to\beta(i\to\infty)$，$a_{n_j}\to\alpha(j\to\infty)$，且 β,α 分别是 $\{a_n\}$ 的子列极限中最大者与最

小者；

(L3) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$；

(L4) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$，若$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = l$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 在$[-\infty,\infty]$中存在且为 l.

类似于实数列的上、下极限概念，我们可定义集合的上、下极限集.

定义 1.1.7

设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是一列集合，称集合$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$与$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$分别为$\{A_n\}$的**上极限**与**下极限**，并分别记为$\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$(或$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$)与$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$(或$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$). 若$\limsup\limits_{n\to\infty}A_n = \liminf\limits_{n\to\infty}A_n$，则称$\{A_n\}$有极限或收敛，并将其**极限集**记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

易知极限集有下述性质：

(J1) $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n = \{x$：有无穷多个 A_n 使 $x\in A_n\}$，

$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n = \{x$：只有有限个 A_n 使 $x\notin A_n\}$.

(J2) 设$\{A_n\}$是升集列，即 $A_n\subset A_{n+1}(\forall n\in\mathbb{Z}^+)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$；设$\{A_n\}$是降集列，即 $A_n\supset A_{n+1}(\forall n\in\mathbb{Z}^+)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(J3) $\chi_{\limsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x) = \limsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$，

$\chi_{\liminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x) = \liminf\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$.

1.1.3 Cantor 定理与 Zorn 引理

我们知道，集合 X 是可数的当且仅当 X 的全体元素可排列成一个有限或无限序列. 在实际推理过程中，集合的可数性往往通过下述性质加以判定(证明见参考文献[18]或[19])：

(CO1) 若 Y 是可数集且存在单射 $f: X\to Y$，则 X 可数.

(CO2) 若 X 是可数集且存在满射 $f: X\to Y$，则 Y 可数.

(CO3) 可数个可数集之并可数.

(CO4) 有限个可数集之积集可数.

(CO5) 设 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，I_n 都是可数集，则

$$X = \{x_{i_1 i_2\cdots i_n}: i_k\in I_k, 1\leqslant k\leqslant n, n\in\mathbb{Z}^+\}$$

是可数集.

关于基数的比较有下列定理(证明见参考文献[18]或[19]).