21世纪高等学校规划教材

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

线性代数学习指导

刘瑞芹　胡去非　主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

线性代数学习指导

主　编　刘瑞芹　胡去非
副主编　王文祥　文小艳　王　昕
编　写　葛世刚　王　清　张晓瑾
主　审　魏丽侠

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

本书共分5章，主要内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型。每章节包括知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、自测题及答案等内容。附录部分还包括工科类本科数学基础课程教学基本要求，以及历年考研真题。本书根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会关于工科类本科数学基础课程教学基本要求，围绕最新本科教学大纲中的教学基本要求，参阅考研数学大纲，按章节以知识点为单位进行编排，例题内容丰富、典型性强、覆盖面广，便于学生学习。

本书可作为普通高等院校非数学类专业学生学习线性代数的辅助教材，也可作为考研复习的指导用书，同时也可供高等院校相关课程教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/刘瑞芹，胡去非主编．—北京：中国电力出版社，2009

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5083-8907-3

Ⅰ．线…　Ⅱ．①刘…②胡…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第087139号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）
航远印刷有限公司印刷
各地新华书店经售
*
2009年6月第一版　2009年6月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米　16开本　9.25印张　219千字
定价 **15.00** 元

前　言

线性代数是代数学中主要处理线性关系问题的一个分支，以向量空间及其线性变换，以及与此相联系的矩阵理论为中心内容。通过本书的学习培养学生能够运用矩阵、行列式、向量等数学语言来描述、简化、解决线性代数问题。线性代数是工科院校重要的基础课，它不仅是后继课的基础，更是将来从事理论和实际工作的基础，而且也是考研的数学科目之一。学好线性代数课程显得十分必要，如何进一步提高线性代数教学的质量，为后继课和人才的培养打下坚实的基础，已严峻地摆在我们面前，数学教育工作者深感重任在肩，必须面对现实，采取适当措施，用科学的方法去解决在教学过程中所遇到的各种问题。

目前课内教学学时偏紧，教学进度快，课堂上几乎没有充足的演题和指导时间，因而读者对所学知识未能理顺综合、融会贯通。另外，由于本课程的特征，线性代数主要研究的对象是矩阵及线性变换，矩阵的运算与我们习以为常的数的运算尽管有相同之处，但又有较大的反差。符号抽象，运算和变换灵活，而且一些基本概念和定理具有相当多的等价命题。由于国内各高校招生规模的不断扩大，有一些同学在教学中无法跟上正常的教学进度，这些同学亟需一本能够举一反三、帮助他们理解教材内容的例题及习题类型全面的课后辅导书。为了正确引导同学学习线性代数，从繁复的深浅不一的复习资料书丛中解放出来，我们几位长年从事在数学教学一线的教师认真地总结了多年来的教学经验，汲取了众多复习资料的精华，集体编撰了这本线性代数学习指导。

本书每个章节分知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、自测题及答案四个模块。例题内容丰富、典型性强、覆盖面广，且有层次，既有基本题，也有综合提高题，例题中有适当的分析过程，有些还给出了一题多解。试题的类型齐全，其中包括选择题、填空题、计算题、证明题，并附有答案供练习时参考。这样既有利于学生自学和自查对知识点的掌握和理解，又拓宽解题思路，使所学的知识能够融会贯通，可最大限度地满足各种层次同学的需求。在本书的最后又附有 2004～2009 年的研究生数学入学真题及答案。

本书由华北科技学院刘瑞芹、胡去非担任主编，王文祥、文小艳、王昕担任副主编。刘瑞芹编写了第五章，胡去非编写了第一章，王文祥编写了第四章，文小艳编写了第三章及附录部分，王昕编写了第二章，葛世刚、王清、张晓瑾在编写过程中提供了一些资料，并参加了录入和排版工作。本书由华北科技学院魏丽侠教授担任主审。

由于水平有限，书中难免出现不妥、错漏之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2009 年 4 月

目　录

第一章　行　列　式

第一节　知 识 结 构 图

- 行列式
  - 全排列
    - 排列的定义
    - 排列的逆序数
    - 排列的对换及性质
  - 行列式
    - 二、三阶行列式的定义
    - n 阶行列式的定义
    - 行列式的性质
    - 行列式按行（列）展开法则
  - 克莱姆法则
    - 克莱姆法则
    - n 个未知数 n 个方程的线性方程组的有解条件

第二节　疑 难 问 题 解 答

1. 如何理解 n 阶行列式定义？

在 n 阶行列式定义中有一句关键的话：从数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

中任取位于不同行不同列的 n 个元素作乘积．这句话要从两个方面理解，一是这 n 个元素位于“不同行不同列”，这说明作乘积的这 n 个元素必须是每行要有一个，每列也要有一个，于是，乘积的一般表达式为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 p_1，p_2，…，p_n 是这 n 个元素的列标，而 $p_1p_2\cdots p_n$ 必然是 1，2，…，n 的一个排列；二是这 n 个元素要“任取”，所以这样的乘积会有很多，共有 $n!$ 个．在这样 $n!$ 个乘积前加符号 $(-1)^t$，得 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数．n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

就表示上述这样 $n!$ 项的代数和，即 $\boldsymbol{D}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$．

2. n 阶行列式是否还有其他方式的定义？

由上面问题的讨论可以看出，从数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

中任取位于不同行不同列的 n 个元素作乘积的一般表达式还可以为 $(-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$，其中 t 为乘积中各元素行标排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数．当将行标排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 经若干次对换成标准排列时，设列标排列 $12\cdots n$ 经相应的对换而成的排列为 $p_1 p_2 \cdots p_n$，由排列的对换性质可知，排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 与 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数的奇偶性相同，即 $(-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$，反之亦然．因此，$n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

还可以定义为 $\boldsymbol{D} = \sum (-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$．

更一般的，从 n^2 个元素构成的上述正方形数表中，任取位于不同行不同列的 n 个元素作乘积的表达式还可以写成 $(-1)^t a_{q_1 p_1} a_{q_2 p_2} \cdots a_{q_n p_n}$，其中 t 为 n 个元素的行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和．由排列的对换性质同样可知，行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

还可以定义为 $\boldsymbol{D} = \sum (-1)^t a_{q_1 p_1} a_{q_2 p_2} \cdots a_{q_n p_n}$．

另外，由拉普拉斯按行（列）展开定理，在定义了 $n-1$ 阶行列式的前提下，可以定义 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D} = a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in} \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$\boldsymbol{D} = a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj} \ (j = 1,2,\cdots,n),$$

式中：$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式．这是行列式的递推定义．

拉普拉斯定理的一般形式为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_t\boldsymbol{A}_t,$$

式中：$\boldsymbol{M}_i$ 为 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中任意取定 k 行（$1 \leqslant k \leqslant n$）中的余子式；$\boldsymbol{A}_i$ 是 $\boldsymbol{M}_i$ 的代数余子式（$i=1, 2, \cdots, t$），$t = C_n^k$．

用拉普拉斯定理也可以定义 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$，即 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_t\boldsymbol{A}_t$，$1 \leqslant k \leqslant n$（$t = C_n^k$）．

3. 为什么不能用类似于三阶行列式的对角线法则来计算 n 阶行列式？

从项数上来说，按照对角线法则定义，三阶行列式有 2×3 项，恰好为 $3!$ 项．如果 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 也用对角线法则计算，$\boldsymbol{D}$ 中只有 $2n$ 项．当 $n \geqslant 4$ 时，$2n \leqslant n!$，也就是说，当 $n \geqslant 4$ 时，用对角线法则计算行列式会漏掉很多项，不能是所有位于不同行不同列的 n 个元素的乘积之和，这与 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 的定义不符．所以，一般的 n 阶行列式不能用三阶行列式的对角线法则计算，这一点初学者尤其要注意．

4. 一阶行列式的含义是什么?

一阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{11}|$ 中只有一个元素，按照 n 阶行列式的定义，$\boldsymbol{D}=(-1)^t a_{11}$，其中 t 为列标排列的逆序数. 此时 $t=0$，所以 $\boldsymbol{D}=a_{11}$. 例如，$|3|=3$，$|-2|=-2$. 注意，这时记号 $|a|$ 表示行列式，不表示数 a 的绝对值.

5. 计算行列式时会用到行列式的哪些性质?

行列式的性质一共有六条，其中：互换行列式的两行（列）行列式变号，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$（或 $c_i \leftrightarrow c_j$）；行列式中某一行（列）的所有元素的公因子 k 可以提到行列式记号的外面，记作 $r_i \div k$（或 $c_i \div k$）；将行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数 k，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变，记作 $r_i + krj$（$c_i + kc_j$）. 这三条性质在计算行列式时经常涉及，因此也将这三条性质称为行列式的计算性质. 通常先利用这三条性质将行列式化简，然后再计算行列式.

6. 范德蒙德行列式有何应用?

范德蒙德行列式

$$\boldsymbol{V}_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

在数学上有很多应用，这里举一个例子加以说明.

证明 n 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 至多有 n 个互不相等的根.

证 （反证法）假设 n 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 有 $n+1$ 个互不相等的根 x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1}，则有 $f(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_nx_i^n=0$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$，即

$$\begin{cases} a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+\cdots+x_1^na_n=0, \\ a_0+x_2a_1+x_2^2a_2+\cdots+x_2^na_n=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_0+x_{n+1}a_1+x_{n+1}^2a_2+\cdots+x_{n+1}^na_n=0. \end{cases}$$

这是一个关于 a_0，a_1，$\cdots$，a_n 的齐次线性方程组，其系数行列式是 $n+1$ 阶范德蒙德行列式 $\boldsymbol{V}_{n+1}$. 由假设 x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1} 互不相等，则

$$\boldsymbol{V}_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(x_i-x_j)\neq 0,$$

因此由克拉默法则，方程组只有零解：$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. 这与 $f(x)$ 是 n 次多项式矛盾，所以 n 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 至多有 n 个互不相等的根.

在《线性代数》的“相似矩阵与二次型”一章中有这样一个重要结论：设 $\boldsymbol{A}$ 是个 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应不同特征值的特征向量线性无关. 利用范德蒙德行列式可以证明这个结论.

第三节 典型例题分析

【例 1-1】 确定 i，j，使得 $a_{42}a_{14}a_{3i}a_{51}a_{2j}$ 为五阶行列式中取负号的项.

解　将此乘积中各因子作适当的交换，使它们的行标成自然排列，得

$$a_{42}a_{14}a_{3i}a_{51}a_{2j}=a_{14}a_{2j}a_{3i}a_{42}a_{51}.$$

乘积中各因子列标组成的排列为 $4ji21$，其中 i，j 只能取 3，5. 若使该项取负号，排列 $4ji21$ 一定是奇排列，所以，$i=3$，$j=5$.

【例 1-2】　写出四阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$ 中所有取正号且包含因子 a_{32} 的项.

解　由条件知，这样的项为 $a_{1i}a_{2j}a_{32}a_{4k}$，项列标组成的排列为 $ij2k$，其中 i，j，k 只能取 1，3，4 中的数. 若使该项取正号，排列 $ij2k$ 一定为偶排列，因此，有 $i=1$，$j=4$，$k=3$或 $i=3$，$j=1$，$k=4$ 或 $i=4$，$j=3$，$k=1$.

所以，所求项有三项：$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$，$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

【例 1-3】　已知行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&0&2\\x&3&1\\4&x&-2\end{vmatrix}$ 的元素 a_{12} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{12}=0$，求代数余子式 $\boldsymbol{A}_{21}$.

解　由行列式 $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{12} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{12}=-\begin{vmatrix}x&1\\4&-2\end{vmatrix}=0$，解得 $x=-2$，即 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&0&2\\-2&3&1\\4&-2&-2\end{vmatrix}$. 则行列式 $\boldsymbol{D}$ 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{21}=-\begin{vmatrix}0&2\\-2&-2\end{vmatrix}=-4$.

【例 1-4】　已知五阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27,$$

求 $\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}$ 和 $\boldsymbol{A}_{44}+\boldsymbol{A}_{45}$ 的值，其中 $\boldsymbol{A}_{4j}$ 是元素 a_{4j} 的代数余子式.

解　从已知发现，所给行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第 2 行与第 4 行前三个元素相同，后两个元素也相同，由此将 $\boldsymbol{D}$ 按第 4 行展开，有 $\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}+2(\boldsymbol{A}_{44}+\boldsymbol{A}_{45})=27$；又因 $\boldsymbol{D}$ 的第 2 行各元素与第 4 行对应元素代数余子式乘积之和等于零，得方程

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43})+2(\boldsymbol{A}_{44}+\boldsymbol{A}_{45})=27,\\2(\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43})+(\boldsymbol{A}_{44}+\boldsymbol{A}_{45})=0.\end{cases}$$

解此方程得 $\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}=-9$，$\boldsymbol{A}_{44}+\boldsymbol{A}_{45}=18$.

【例 1-5】　求多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix}x&-1&0&x\\2&2&3&x\\-7&10&4&3\\1&-7&1&x\end{vmatrix}$$

中的常数项.

解　设 c 为 $f(x)$ 的常数项，则当 $x=0$ 时 $f(x)$ 的值即为常数项. 因此，所求常数项

$$c=f(0)=\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\2&2&3&0\\-7&10&4&3\\1&-7&1&0\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3&0\\-7&4&3\\1&1&0\end{vmatrix}=3.$$

【例 1-6】 计算行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}2-x&x&0&0\\-2&2-x&x&0\\0&-2&2-x&x\\0&0&-2&2-x\end{vmatrix}.$$

分析 降阶法是计算行列式的基本方法，即利用行列式的性质和行列式按行（列）展开法则，将原行列式化为较低阶行列式之后再计算.

解 将 $\boldsymbol{D}$ 的第 2 列、第 3 列、第 4 列元素分别加到第 1 列的对应元素上去，再按第 1 列展开，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\begin{vmatrix}2&x&0&0\\0&2-x&x&0\\0&-2&2-x&x\\-x&0&-2&2-x\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}2-x&x&0\\-2&2-x&x\\0&-2&2-x\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}x&0&0\\2-x&x&0\\-2&2-x&x\end{vmatrix}\\&=2\times\left[(2-x)\begin{vmatrix}2-x&x\\-2&2-x\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}x&0\\-2&2-x\end{vmatrix}\right]+x^4\\&=2\times[(2-x)^3+2x(2-x)+2x(2-x)]+x^4\\&=x^4-2x^3+4x^2-8x+16.\end{aligned}$$

【例 1-7】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_{n+1}=\begin{vmatrix}b&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&c\\a_1&b&a_2&\cdots&a_{n-1}&c\\a_1&a_2&b&\cdots&a_{n-1}&c\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&b&c\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&c\end{vmatrix}.$$

解 依次将 $\boldsymbol{D}_{n+1}$ 的第 i 行（$i=2, 3, \cdots, n+1$）各元素都乘 -1 加到第 $i-1$ 行对应元素上，再按最后 1 列展开，得

$$\boldsymbol{D}_{n+1}=\begin{vmatrix}b&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&c\\a_1&b&a_2&\cdots&a_{n-1}&c\\a_1&a_2&b&\cdots&a_{n-1}&c\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&b&c\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a_1&a_1-b&0&\cdots&0&0\\0&b-a_2&a_2-b&\cdots&0&0\\0&0&b-a_3&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&b-a_n&0\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&c\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2(n+1)}c\begin{vmatrix} b-a_1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b-a_2 & a_2-b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b-a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a_n \end{vmatrix}$$

$$=c(b-a_1)(b-a_2)\cdots(b-a_n).$$

【例 1-8】 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 2 \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 化三角法也是计算行列式的一种常用方法．利用行列式的性质将原行列式化为三角形行列式，再由三角形行列式的性质进行计算．

解 将 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行元素乘 -1 加到第 $i-1$ 行对应元素上（$i=2$，3，…，n），按第 1 列展开，得

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 2 \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}=(-1)^{n+1}\boldsymbol{D}_{n-1}.$$

再将 $\boldsymbol{D}_{n-1}$ 的第 i 行元素乘以 -1 加到第 $i-1$ 行对应元素上（$i=2$，3，…，$n-1$），得

$$\boldsymbol{D}_n=(-1)^{n+1}\boldsymbol{D}_{n-1}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a^{n-2}.$$

【例 1-9】 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

解 将方程左侧 n 阶行列式第 1 列各元素乘以 -1，分别加到第 2 列、第 3 列、…、第 n 列的对应元素上去，得三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix}$$

$$= -x(1-x)\cdots(n-2-x).$$

所以原方程为

$$-x(1-x)\cdots(n-2-x) = 0,$$

解得

$$x_1 = 0, x_2 = 1, \cdots, x_{n-1} = n-2.$$

【例 1-10】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

分析 在计算高阶行列式时，有时可以根据行列式的特点，用与其结构相同的低阶行列式来表示，这种表示一直进行下去，形成一个递推关系，这种计算行列式的方法称为递推法。

解 将 $\boldsymbol{D}_{n+1}$ 按第 1 行展开，得

$$\boldsymbol{D}_{n+1} = a\begin{vmatrix} a & -1 & \cdots & 0 \\ ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} ax & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ax^n & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= aD_n + x\begin{vmatrix} a & -1 & \cdots & 0 \\ ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} = aD_n + xD_n = (a+x)D_n.$$

用同样的方法有 $D_n=(a+n)D_{n-1}$，这样一直进行下去，于是有

$$D_{n+1}=(a+x)D_n=(a+x)(a+x)D_{n-1}=\cdots=(a+x)^{n-1}D_2$$

$$=(a+x)^{n-1}\begin{vmatrix} a & -1 \\ ax & a \end{vmatrix}=a(a+x)^n.$$

【例 1 - 11】　设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

试证：D_1，D_2，…，D_n 是一个等差数列，并求出 D_n.

证　将行列式 D_n 按第一行展开，得

$$D_n=2D_{n-1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)}=2D_{n-1}-\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{(n-2)}=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

即 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$. 用同样的方法可得 $D_{n-1}-D_{n-2}=D_{n-2}-D_{n-3}=\cdots=D_3-D_2=D_2-D_1$. 因此，$D_1$，$D_2$，…，$D_n$ 是一个等差数列.

又因为 $D_1=2$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3=D_1+1$，则这个等差数列的首项 $a_1=D_1=2$，公差 $d=D_2-D_1=1$. 按照等差数列通项公式，得

$$D_n=a_n=a_1+(n-1)d=n+1.$$

【例 1 - 12】　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}\quad(b\neq 0).$$

分析　将原 n 阶行列式添加一行和一列得到一个与原行列式相等的 $n+1$ 阶行列式，使原行列式计算简化的方法称为加边法或升阶法. 加边法是计算复杂行列式的一种重要方法.

解　在 D_n 上添加第 1 行和第 1 列得 D_{n+1}，且

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}=D_{n+1}.$$

用-1乘$\boldsymbol{D}_{n+1}$的第1行再分别加到其他各行上去，得

$$\boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{D}_{n+1}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&a_1-b&a_2&\cdots&a_n\\0&a_1&a_2-b&\cdots&a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a_1&a_2&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\-1&-b&0&\cdots&0\\-1&0&-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&-b\end{vmatrix}=\boldsymbol{D}'_{n+1},$$

再用$-\frac{1}{b}$分别乘以$\boldsymbol{D}'_{n+1}$的第2列、…、第n列，且都加到第1列上，得

$$\boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{D}_{n+1}=\boldsymbol{D}'_{n+1}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\-1&-b&0&\cdots&0\\-1&0&-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}a_i&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&-b&0&\cdots&0\\0&0&-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-b\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n b^n\left(1-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

【例 1-13】 计算n阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}0&a_1+a_2&a_1+a_3&\cdots&a_1+a_n\\a_2+a_1&0&a_2+a_3&\cdots&a_2+a_n\\a_3+a_1&a_3+a_2&0&\cdots&a_3+a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n+a_1&a_n+a_2&a_n+a_3&\cdots&0\end{vmatrix}\quad(a_1a_2\cdots a_n\neq0).$$

解 将$\boldsymbol{D}_n$用加边法，得$n+1$阶行列式$\boldsymbol{D}_{n+1}$，

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&a_1+a_2&\cdots&a_1+a_n\\0&a_2+a_1&0&\cdots&a_2+a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a_n+a_1&a_n+a_2&\cdots&0\end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}=\boldsymbol{D}_{n+1}.$$

用-1乘$\boldsymbol{D}_{n+1}$的第1行且加到其他各行上去，得

$$\boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{D}_{n+1}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&a_1+a_2&\cdots&a_1+a_n\\0&a_2+a_1&0&\cdots&a_2+a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a_n+a_1&a_n+a_2&\cdots&0\end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\-1&-a_1&a_1&\cdots&a_1\\-1&a_2&-a_2&\cdots&a_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&a_n&a_n&\cdots&-a_n\end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}$$

再将此$n+1$阶行列式加边，得$n+2$阶行列式$\boldsymbol{D}_{n+2}$，即

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\0&1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&-1&-a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&-1&a_2&-a_2&\cdots&a_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&-1&a_n&a_n&\cdots&-a_n\end{vmatrix}_{(n+2)\text{阶}}=D_{n+2}.$$

再将 D_{n+2} 的第 1 列乘 -1 加到第 i 列上（$i=3, 4, \cdots, n+2$），得

$$D_n=D_{n+1}=D_{n+2}=\begin{vmatrix}1&0&-1&-1&\cdots&-1\\0&1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&-1&-2a_1&0&\cdots&0\\a_2&-1&0&-2a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&-1&0&0&\cdots&-2a_n\end{vmatrix}_{(n+2)\text{阶}},$$

将此 $n+2$ 阶行列式的第 i 列乘 $\dfrac{1}{2}$ 后加到第 1 列上（$i=3, 4, \cdots, n+2$）；将第 i 列乘 $-\dfrac{1}{2a_{i-2}}$ 后加到第 2 列上（$i=3, 4, \cdots, n+2$），得

$$D_n=D_{n+1}=D_{n+2}=\begin{vmatrix}1&0&-1&-1&\cdots&-1\\0&1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&-1&-2a_1&0&\cdots&0\\a_2&-1&0&-2a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&-1&0&0&\cdots&-2a_n\end{vmatrix}_{(n+2)\text{阶}}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\dfrac{n}{2}&\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}&-1&-1&\cdots&-1\\\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i&1-\dfrac{n}{2}&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&-2a_1&0&\cdots&0\\0&0&0&-2a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&-2a_n\end{vmatrix}_{(n+2)\text{阶}}.$$

按第 1 列展开，得

$$D_n=D_{n+1}=D_{n+2}=\left(1-\frac{n}{2}\right)\begin{vmatrix}1-\dfrac{n}{2}&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&-2a_1&0&\cdots&0\\0&0&-2a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-2a_n\end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}$$

$$=(-2)^n\left(1-\frac{n}{2}\right)^2a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{4}(-2)^na_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}$$

$$=(-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(n-2)^2-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i}{a_j}\right].$$

【例 1 - 14】 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\\16&81&256&625\end{vmatrix}$ 的值.

分析 将行列式化简，再利用重要的行列式直接计算行列式的方法称为公式法.

解 在 D_4 的第 1 列、第 2 列、第 3 列、第 4 列中分别提取公因子 2，3，4，5 后，利用范德蒙德行列式计算，得

$$D_4=2\times3\times4\times5\times\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$$

$$=120\times(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=1440.$$

【例 1 - 15】 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\3&4&5&\cdots&1&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}.$$

解 将 D 的各列都加到第 1 列上去，再从第 1 列提取公因式$\frac{n(n+1)}{2}$，得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\3&4&5&\cdots&1&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&n&1\\1&4&5&\cdots&1&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}D_1.$$

将 D_1 的第 $n-1$ 行、第 $n-2$ 行，…，第 1 行分别乘以 -1 加到第 n 行、第 $n-1$ 行，…，第 2 行上去，得

$$D=\frac{n(n+1)}{2}D_1=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}=\frac{n(n+1)}{2}D_2,$$

再将 D_2 的第 1 行乘以 -1 分别加到第 2 行，…，第 n 行上去，得

$$D=\frac{n(n+1)}{2}D_2=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}=\frac{n(n+1)}{2}D_3.$$

将 D_3 的第 1 列、第 2 列，…，第 $n-1$ 列都加到第 n 列上去，得

$$D=\frac{n(n+1)}{2}D_3=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$