现代数学基础

11 整体微分几何初步

（第三版）

沈一兵　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

11

整体微分几何初步

（第三版）

■ 沈一兵 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是作者长期从事微分几何基础教学的产物，主要采用外微分形式和活动标架法，介绍欧氏空间曲线和曲面的某些整体性质。内容包括：$\mathbf{E}^3$ 中曲线和曲面的局部概论；活动标架法；曲线的整体微分几何；$\mathbf{E}^3$ 中曲面的整体微分几何；曲面的内蕴几何；高维欧氏空间的超曲面；Finsler 几何中的某些变分计算。另有两个附录：欧氏空间点集拓扑概要；曲面的拓扑分类。书中介绍了整体微分几何的许多基本概念和方法技巧，既论述经典理论，也兼顾近代进展，并包含了丰富的微分几何参考文献，使读者在学完本书后，能独立进行整体微分几何的某些研究。

本书可作为高等院校数学系学生及研究生的教材，也可供数学和物理工作者参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

整体微分几何初步：第 3 版 / 沈一兵编著. — 北京：高等教育出版社，2009. 7

ISBN 978-7-04-027261-1

I. 整… II. 沈… III. 整体几何：微分几何 - 高等学校 - 教材 IV. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 086737 号

策划编辑	赵天夫	责任编辑	[illegible]耀明	封面设计	张 楠
责任绘图	黄建英	版式设计	[illegible]新[illegible]	责任校对	姜国萍
责任印制	韩 刚				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	中原出版传媒投资控股集团北京汇林印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2009 年 7 月第 1 版
印 张	20.5	印 次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字 数	390 000	定 价	43.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 27261—00

序

微分几何是一门古老的学科, 历史悠久, 它是以数学分析为工具来研究空间形式的数学分支。经典微分几何主要讨论曲线与曲面的局部性质。20 世纪以来随着分析方法的发展, 微分几何内容也越来越充实和深刻, 除局部性质外, 还研究关于图形的整体性质。由于整体微分几何的发展, 这门学科虽然古老, 但生命力至今还很旺盛, 是当前基础研究的热门领域。它和其他许多数学学科以及理论物理等互相渗透。例如, 它与微分方程、李群、变分学、泛函、拓扑、复变函数论、规范场论等的关系越来越密切, 并互相影响、互相促进。因此, 它的内容和方法也在不断更新。

多年来, 一般高校微分几何教材是以经典的初等微分几何为其主要内容的。所谓 "经典", 即如上所述, 它所讨论的主要是图形的局部性质; 所谓 "初等" 是指, 为了初学者容易理解和入门, 所研究的对象只限于三维欧几里得空间内的曲线和曲面。由于微分几何这个学科的不断发展, 也由于现代科学技术发展的需要, 微分几何教材的内容所包含的范围必须扩大, 即必须加入整体微分几何的部分内容。因此, 编写一本整体微分几何教材已成为当前的需要, 但这种教材目前国内尚不多见。沈一兵教授这本教材开始编写于 20 世纪 80 年代初期, 经过十多年的教学实践, 不断修改充实, 并采用幺正活动标架法, 使得几何问题化为外形式计算, 突破了用坐标系来计算的传统框架, 这是几何学研究的一种现代方法。沈一兵教授在整体微分几何领域的研究造诣很深, 以他一丝不苟的治学精神写成的这本书, 我相信一定是一本好书, 对于它的出版我寄予厚望。

白正国

1997 年秋于杭州

第三版前言

本书的雏形是笔者在 20 世纪 80 年代为原杭州大学数学系本科生编写的选修课讲义, 主要内容是笔者当时学习整体微分几何和外形式法的一些体会。后经多年试教和不断增删, 在我的老师白正国先生的支持下, 于 1997 年整理后由原杭州大学出版社出版。

书中不少内容源自国际著名几何学大师陈省身先生的学术论著和演讲。2001 年陈先生来杭时, 曾对本书颇感兴趣和多有褒奖, 并建议稍增内容后以英文出版。不料陈先生于 2004 年 12 月 3 日突然仙逝, 笔者悲悼之余, 在增加高维欧氏超曲面的内容后, 于 2005 年由浙江大学出版社再版。

几年来, 由于教学和科研的需要, 书中内容逐见偏颇, 不少地方尚待充实。考虑到 "微分几何的最终目的是整体的结果。但是, 局部微分几何不能减缩到最低限度, 因为每个整体结果必须有一个局部的基础。" 因此, 本书新版在完善原有内容和补充若干新课题外, 又增加了曲线与曲面的局部理论 (第 0 章)。这章与第 1 章的部分内容合起来, 可作为大学本科生的 "微分几何" 教材。新版的最后一章涉及整体 Finsler 几何, 这是陈先生身前晚年大力提倡的研究方向。笔者相信, 这是一个既有重要理论价值, 又有广泛应用前景的方向。

限于笔者的知识水平, 书中疵谬和不妥之处在所难免, 恳请读者不吝指正。借此机会, 谨向被本书引用的文献作者、对本书厚爱的朋友与读者、国家自然科学基金委员会 (No.10871171) 和浙江大学数学系, 深致衷心感谢。

最后, 笔者十分感谢高等教育出版社对本书新版出版的大力支持和帮助。

沈一兵

2009 年 3 月

再版跋

本书原是作者学习整体微分几何和外形式法的一些心得体会，整理后于 1998 年由原杭州大学出版社出版，拟作数学系高年级本科生的选修课教材。出版后颇受广大读者重视和钟爱，不久书即告罄。

书中不少内容源自著名几何学大师陈省身先生的学术论著和演讲。2001 年先生来杭时曾对本书颇加嘉奖，并建议稍增内容，译成英文。但由于作者拖沓，一直未能兑现。不料先生于 2004 年 12 月 3 日突然仙逝，作者悲悼之余，也对此事遗憾万分。作者愿以再版此书敬献先生!

本版与初版的主要差别是增加了第五章：高维欧氏空间的超曲面。这是三维欧氏空间中曲面论的最直接和最自然的推广，至今还在发展。建议这一章作为学生讨论班的内容。限于作者水平，书中难免谬误与不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

最后，借此机会，谨向被本书引用的文献作者、对本书厚爱的读者、国家自然科学基金会、浙江大学数学系和浙江大学出版社，致以衷心感谢。

沈一兵

2005 年 9 月

第 1 版前言

整体微分几何的名称最早可能来自德国几何学家 W. Blaschke 对凸闭曲线和卵形面的研究。后来经过许多数学家的努力, 使之得到全面发展。今天已成为几何学、分析学和拓扑学相互交织的一个重要研究领域, 也成为研究理论物理的有力工具之一。

为了满足我系数学专业的教学需要, 在文献 [1, 2] 的启发影响下, 我们在 20 世纪 80 年代初期编写了有关整体微分几何的讲义。经过十多年教学实践, 不断增删修改, 才形成本书现在的样子。全书共分四章: 第一章, 活动标架法; 第二章, 曲线的整体微分几何; 第三章, $\mathbf{E}^3$ 中曲面的整体微分几何; 第四章, 曲面的内蕴几何学。为了完整起见, 另加了两个附录: 附录 A, 欧氏空间点集拓扑概要; 附录 B, 曲面的拓扑分类。

对于已经熟悉活动标架法和外微分形式的读者, 可以跳过第一章。第四章的内容实质上是黎曼几何的范畴, 目的是想引起读者对高维流形几何的兴趣。有关局部微分几何计算, 我们主要采用活动标架法。这不仅为了简化计算, 也想使高年级学生能了解外微分形式的有关知识。本书内容基本上是自封闭的, 凡涉及较多或较高深的其他数学知识, 则尽可能注明参考文献。限于笔者水平, 书中疵谬之处可能难免, 热忱欢迎读者不吝指正。

这里我要感谢我的老师白正国教授对本书的关心和指导, 感谢我系几何学教研室有关老师的热情支持, 也感谢郭孝英老师和傅吉祥博士在具体工作上的帮助。

最后, 我要感谢杭州大学出版社对本书出版的大力支持和帮助。

沈一兵

1997 年 9 月

目　　录

第 0 章　$\mathbf{E}^3$ 中曲线和曲面的局部概论

$\mathbf{E}^3$ 中的曲线和曲面是经典微分几何的主要研究对象, 本章简单介绍它们的局部理论, 为下面讨论它们的整体性质作好准备. 本章的习题是本章内容的重要补充, 希予浏览. 正如陈省身先生所说: "微分几何的最终目的是整体的结果. 但是, 局部微分几何不能减缩到最低限度, 因为每个整体结果必须有一个局部的基础."①

§1　$\mathbf{E}^3$ 中的曲线

1.1　曲线的表示

设 $\mathbf{E}^3$ 是普通的 3 维欧氏空间, $\{O;\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_3\}$ 是一个固定的右手直角坐标系, 其中 O 是原点, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ 是三个相互正交的单位向量, 它们构成右手系. 在这直角坐标系中, 设点 (或向量) 的坐标为 $(x^1,\ x^2,\ x^3)$. 按通常习惯, 本章中向量用粗体拉丁字母表示. 从下章开始, 向量也用普通拉丁字母表示.

空间一段**曲线** C 是某区间 $I\in\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{E}^3$ 的一个同胚 (即 1-1 的连续可逆映射) $\mathbf{x}:I\to\mathbf{E}^3$, 其中 $\mathbf{x}$ 既表示映射, 又表示曲线的位置向量, I 可以是开区间, 也可以是闭区间. 设 t 是 I 上的坐标 (参数), 曲线 C 的参数表示是

$$\begin{aligned}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)&=(x^1(t),x^2(t),x^3(t))\\&=x^1(t)\mathbf{E}_1+x^2(t)\mathbf{E}_2+x^3(t)\mathbf{E}_3,\quad t\in I.\end{aligned}$$

在建立固定直角坐标系后, 向量函数就对应着它的坐标分量函数. 向量函数的可微性就由它的分量函数的可微性来确定. 因此, 向量函数的微积分运算就是它的分量函数的普通微积分运算. 于是,

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}\,t}=\mathbf{x}'=\left(\frac{\mathrm{d}\,x^1}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}\,x^3}{\mathrm{d}\,t}\right)=((x^1)',(x^2)',(x^3)'),$$

① 张洪光. 陈省身文选 —— 传记、通俗演讲及其它. 北京: 科学出版社, 1989, p.220

其中撇 “′” 表示关于 t 的求导. 如果 $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$ 都是 t 的可微函数, 并且 $|\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t| > 0$ $(t \in I)$, 则 C 称为**正则曲线**. 曲线 C 上使 $|\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t| = 0$ 的点称为**奇点**. 例如, 曲线 $\mathbf{x}(t) = (t^3, t^2, 0)$, $t \in \mathbf{R}$, 在 $t = 0$ 处是 (孤立) 奇点.

对于正则曲线 $\mathbf{x}(t)$, 曲线的切向量就是 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}'$. 曲线从 $t = 0$ 到 t 的**弧长**是

$$s(t) = \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{\sum_{i=1}^3 ((x^i)')^2}\, \mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

显然, 弧长 s 是 t 的可微函数, 并且与参数 t 的选取无关. 由 (1.1), 对于正则曲线有 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = |\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t| > 0$. 于是, 可取弧长 s 作新参数, 从而 $1 = \mathrm{d}s/\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}s|$, 即这时切向量为单位向量. 反之, 当切向量为单位向量时, 从 (1.1) 得 $s = \int_0^t |\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t| \mathrm{d}t = \int_0^t \mathrm{d}t = t$. 因此, 我们有下列

命题 1.1 曲线的参数是曲线弧长的充要条件是它的切向量为单位向量.

显然, 曲线的弧长与空间直角坐标系的选择无关. 以下若无特别说明, 我们总考虑正则曲线, s 表示弧长参数, 并用点 “.” 表示关于 s 的求导, 如 $\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}s$, $\ddot{\mathbf{x}} = \mathrm{d}^2\mathbf{x}/\mathrm{d}s^2$ 等.

1.2 曲线的 Frenet 标架 曲率和挠率

对于曲线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, 记切向量为

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s), \quad |\mathbf{T}| = 1. \tag{1.2}$$

为了度量曲线在一点邻近的弯曲程度, 我们引入量 $k(s) = |\ddot{\mathbf{x}}(s)| = |\dot{\mathbf{T}}|$, 称为曲线在 $\mathbf{x}(s)$ 的**曲率**. 当 $k(s) \neq 0$ 时, 其倒数 $\rho(s) = 1/k(s)$ 称为**曲率半径**. 在 $\mathbf{x}(s)$ 处定义单位向量 $\mathbf{N}(s)$, 使得 $\dot{\mathbf{T}} = k(s)\mathbf{N}(s)$, 即 $\dot{\mathbf{T}}$ 方向上的单位向量. $\mathbf{N}(s)$ 称为曲线在 $\mathbf{x}(s)$ 的**主法向量**, 点 $\mathbf{x}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$ 称为**曲率中心**. 因为 $|\mathbf{T}|^2 = 1$, 两边求导得 $0 = \mathbf{T}\dot{\mathbf{T}} = k(s)\mathbf{T}\mathbf{N}$, 即$\mathbf{N}$与$\mathbf{T}$正交 (当 $k(s) \neq 0$ 时). 再定义单位向量 $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$, 称为曲线在 $\mathbf{x}(s)$ 的**从法向量** (见图 1.1).

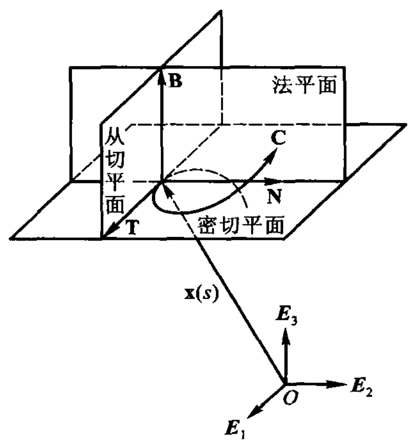

图 1.1

定义 曲线在 $\mathbf{x}(s)$ 的三个幺正向量 $\{\mathbf{T}(s),\mathbf{N}(s),\mathbf{B}(s)\}$ 称为曲线在该点的 **Frenet 标架**.

由 $\mathbf{N}(s)$ 与 $\mathbf{B}(s)$ 确定的平面称为曲线在 $\mathbf{x}(s)$ 的**法平面**, $\mathbf{N}(s)$ 与 $\mathbf{T}(s)$ 确定的平面称为**密切平面**, $\mathbf{T}(s)$ 与 $\mathbf{B}(s)$ 确定的平面称为**从切平面**.

设 $k(s) \neq 0$, 则 $\mathbf{N}(s)$ 和 $\mathbf{B}(s)$ 完全确定. 对 $\mathbf{BT} = 0$ 求导, 得 $\dot{\mathbf{B}}\mathbf{T} = 0$. 又因 $\mathbf{B}$ 是单位向量, 故 $\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B} = 0$. 因此, $\dot{\mathbf{B}}$ 平行于 $\mathbf{N}$. 记

$$\tau(s) = -\dot{\mathbf{B}}(s)\mathbf{N}(s), \quad |\tau(s)| = |\dot{\mathbf{B}}(s)|. \tag{1.3}$$

它称为曲线在 $\mathbf{x}(s)$ 的**挠率**. 利用 $\mathbf{BN} = 0$, 注意到 $\ddot{\mathbf{x}}(s) = k(s)\mathbf{N}$, 不难得

$$k = |\ddot{\mathbf{x}}|, \qquad \tau = -\dot{\mathbf{B}}\mathbf{N} = \dot{\mathbf{N}}\mathbf{B} = (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{N})\dot{\mathbf{N}} = \frac{(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}})}{|\ddot{\mathbf{x}}|^2}. \tag{1.4}$$

因为曲线的弧长与空间直角坐标系的选择无关, 因此, (1.4) 表明, 曲率和挠率也与空间直角坐标系的选择无关. 换言之, 曲率和挠率都是空间运动的不变量.

例 1 设直线 $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为常向量, $|\mathbf{a}| = 1$. 于是, $k \equiv 0$. 反之, 若曲线的曲率 $k = |\ddot{\mathbf{x}}| \equiv 0$, 则解微分方程 $\mathrm{d}^2\mathbf{x}/\mathrm{d}s^2 = 0$ 得 $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$. 因此, $k \equiv 0$ 特征了直线.

例 2 设 $\mathbf{x}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right)$ 是半径为 r 的圆周, 则 $k(s) = 1/r$.

命题 1.2 曲线为平面曲线的充要条件是 $\tau \equiv 0$.

证明 必要性. 设曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在一平面上, 并设 $\mathbf{n}_0$ 是这平面的 (常) 法向量, 即 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0))\mathbf{n}_0 = 0$. 两边求导得 $\mathbf{T}\mathbf{n}_0 = 0$, $\dot{\mathbf{T}}\mathbf{n}_0 = 0$. 于是, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ 都与 $\mathbf{n}_0$ 正交, 即 $\mathbf{B} = \pm\mathbf{n}_0$. 因此, $\dot{\mathbf{B}}(s) = 0$, 即 $\tau \equiv 0$.

充分性. 设 $\tau \equiv 0$. 不妨设 $k \neq 0$, 否则直线自然是平面曲线. 于是 $\mathbf{B}(s) = \mathbf{n}_0$ (常向量), 因而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{x}\mathbf{n}_0) = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{n}_0 = 0$, 即 $\mathbf{x}\mathbf{n}_0$ 为常数. 于是, $(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0))\mathbf{n}_0 = 0$. 所以, $\mathbf{x}(s)$ 是平面曲线. 证毕.

例 3 计算圆柱螺线 $\mathbf{x}(s) = (r\cos\sigma s, r\sin\sigma s, a\sigma s)$ 的曲率和挠率, 其中 r, a, $\sigma = 1/\sqrt{r^2 + a^2}$ 都是常数 (见图 1.2).

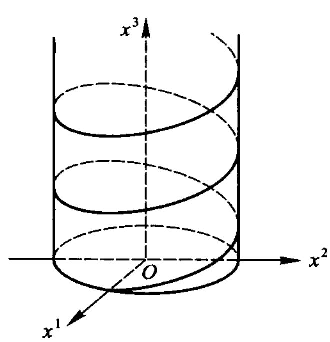

图 1.2

解 首先有

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{T}(s) = \sigma(-r\sin\sigma s, r\cos\sigma s, a).$$

因此, $|\dot{\mathbf{x}}| = 1$, 即 s 是弧长参数. 利用公式 (1.4), 直接可算得 $k(s) = \sigma^2 r$, $\tau(s) = \sigma^2 a$. 因此, 圆柱螺线的曲率和挠率都是常数.

反之, 利用下面的曲线论基本定理, 可以得出: 曲率和挠率都是 (非零) 常数的正则曲线必是圆柱螺线.

1.3 曲线论的基本公式和基本定理

根据 Frenet 标架的定义和 (1.3), 我们就有下列公式

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\mathbf{T} = & k\mathbf{N}\,\mathrm{d}\,s, \\ \mathrm{d}\,\mathbf{N} = -k\mathbf{T}\,\mathrm{d}\,s & \qquad +\tau\mathbf{B}\,\mathrm{d}\,s, \\ \mathrm{d}\,\mathbf{B} = & -\tau\mathbf{N}\,\mathrm{d}\,s. \end{cases} \tag{1.5}$$

(1.5) 称为曲线的 **Frenet 公式**, 也称为曲线的**基本公式**. 曲线的局部理论就取决于这个公式.

对于平面曲线 $\mathbf{x}(s)$, 可选取单位法向量 $\mathbf{N}_r$ 使得 $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}_r(s)\}$ 成为该 (定向) 平面上的右手系. 于是, Frenet 公式成为

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\mathbf{T} = k_r\mathbf{N}_r\,\mathrm{d}\,s, \\ \mathrm{d}\,\mathbf{N}_r = -k_r\mathbf{T}\,\mathrm{d}\,s, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 k_r 可正可负, 由曲线的定向和平面的定向所确定, 称为平面曲线的**相对曲率**. 当然, $|k_r| = k$.

例 4 切向量与固定方向成定角的非直线的曲线称为**一般螺线**. 证明: 非直线的曲线为一般螺线的充要条件是其挠率与曲率之比为常数.

证明 必要性: 设一般螺线的切向量 $\mathbf{T}(s)$ 与固定方向 $\mathbf{a}$ 成定角 θ, $|\mathbf{a}| = 1$, 则 $\mathbf{Ta} = \cos\theta$. 注意到 $k \neq 0$, 由 $0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(\mathbf{Ta}) = \dot{\mathbf{T}}\mathbf{a} = k\mathbf{Na}$ 知, $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{a}$ 正交. 于是, 可设 $\mathbf{a} = \cos\theta\mathbf{T} + \sin\theta\mathbf{B}$. 求导得

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{a}} = \cos\theta k\mathbf{N} + \sin\theta\tau\mathbf{N},$$

即 $k\cos\theta + \tau\sin\theta = 0$, 从而 $\tau/k = -\cot\theta = \text{const}..$

充分性: 设 $\tau/k = \text{const}. = -\cot\theta$, 其中 θ 为定角. 取 $\mathbf{a} = \cos\theta\mathbf{T} + \sin\theta\mathbf{B}$. 求导, 应用 Frenet 公式, 易得 $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. 因此, 切向量 $\mathbf{T}$ 与固定方向 $\mathbf{a}$ 成定角 θ. 证毕.

一般地, 我们可从曲线在一点的渐近展开, 理解曲线在该点附近的形态. 不妨取