全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010

全国硕士研究生入学考试

辅导教程

数学分册（经济类）

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

- 原命题组成员、阅卷组组长亲自编写，融合北京大学、清华大学权威讯息
- 深度梳理命题轨迹，解析详尽、规避误区，培养最佳解题思路
- 以题型训练为核心，全面展现题型变换
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 注重实战，讲求技巧，切实提升综合应试能力

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学考试辅导丛书

全国硕士研究生入学考试辅导教程

数学分册(经济类)

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试辅导教程. 数学分册：经济类/全国硕士研究生入学考试命题研究组编. —杭州：浙江大学出版社，2009.4

（全国硕士研究生入学考试辅导丛书）

ISBN 978-7-308-06686-0

Ⅰ.全… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 045196 号

全国硕士研究生入学考试辅导教程·数学分册(经济类)

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

丛书策划	樊晓燕　杨晓鸣
责任编辑	徐素君
文字编辑	何　瑜
出版发行	浙江大学出版社
	（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
	（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	25.75
字　　数	951 千
版 印 次	2009 年 4 月第 1 版　2009 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-06686-0
定　　价	49.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

前　　言

2009 年全国硕士研究生入学考试已经拉下了帷幕，超过 124 万人参加了这种规模空前的选拔性考试。参加人数的增多，录入率的有限，彰显了竞争的激烈程度。为了指导参加 2010 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《全国硕士研究生入学考试辅导教程・数学分册（经济类）》，以供广大考生复习使用。

本书体例完全按照考生的复习需求进行编写，本书每章均由以下四个部分构成：

一、考点概要与大纲要求提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的大纲规定和要求，把握命题范围。

二、考核知识要点归纳——本部分归纳了考核的知识要点，阐述了基本概念、公式、定理等知识点，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、考点真题链接——本部分对历年统考中常见题型以考点为依据进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

四、题型强化练习及参考答案——本部分精编了一定数量的自测强化练习题，让考生能考练结合，强化考点知识的掌握，提升应试实战能力。

不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络；其次，在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不是纷繁的题目，而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性解法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。

本书是北京大学、清华大学和中国人民大学等广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编者

于清华园

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

考点概要与大纲要求提示

1. 考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

2. 考试要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

(5) 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

(6) 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(7) 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

(8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

(9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

考核知识要点归纳

§1　函　　数

一、基本概念

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 x 按照一定法则总有唯一确定的值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记做 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做

自变量,y 叫做因变量.

当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

确定一个函数的两要素:定义域和对应法则.

注 当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时,才表示同一函数.

2. 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 如果对于值域 W 中的任一 y 值,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为 $x=\varphi(y)$,$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注 (1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合;$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

(3) 虽然 $y=f(x)$ 是单值函数,反函数 $x=\varphi(y)$ 却不一定是单值的. 只有 $y=f(x)$ 不仅单值,而且是严格单调的,其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 W 上是单值的.

3. 基本初等函数

基本初等函数共有以下六个,其性质和图形必须牢记,在此就不再一一复述了.

(1) 常数函数:$y(x)=c$.

(2) 幂函数:$y=x^{a}$(a 为常数).

(3) 指数函数:$y=a^{x}$(a 是常数且 $a>0,a\neq 1$).

(4) 对数函数:$y=\log_{a}x$(a 是常数且 $a>0,a\neq 1$),定义域 $(0,+\infty)$,它是指数函数 $y=a^{x}$ 的反函数.

(5) 三角函数:

正弦函数 $y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$.

余弦函数 $y=\cos x(-\infty<x<+\infty)$.

正切函数 $y=\tan x,D=\left\{x \mid x\in \mathbf{R},x\neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in \mathbf{Z}\right\}$.

余切函数 $y=\cot x,D=\{x \mid x\in \mathbf{R},x\neq n\pi,n\in \mathbf{Z}\}$.

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x},D=\left\{x \mid x\in \mathbf{R},x\neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in \mathbf{Z}\right\}$.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x},D=\{x \mid x\in \mathbf{R},x\neq n\pi,n\in \mathbf{Z}\}$.

(6) 反三角函数:

反正弦函数 $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$,值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y=\arccos x,x\in[-1,1]$,值域 $[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty)$,值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x,x\in(-\infty,+\infty)$,值域 $(0,\pi)$.

4. 复合函数

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,$D=\{x \mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}\neq\varnothing$,则当 $x\in D$ 时,由 $y=f(\varphi(x))$ 确定的函数称为 f 与 φ 的复合函数,而 u 称为中间变量.

5. 初等函数

由基本初等函数及其复合函数,以及由这些函数的四则运算组成的函数称为初等函数.

6. 其他常见函数

（1）双曲函数：

双曲正弦：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域$(-\infty,+\infty)$，奇函数.

双曲余弦：$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域$(-\infty,+\infty)$，偶函数.

双曲正切：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域$(-\infty,+\infty)$，奇函数.

（2）符号函数：$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

（3）取整函数：$y=[x]$，y 是 x 的最大整数部分.

（4）狄利克雷函数：$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$

注　符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数，一般的分段函数不是初等函数.

二、函数的基本特性

1. 有界性

定义　若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I\subset D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$（$f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M$），则称 $f(x)$ 在 I 上有界（有上界或下界）；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

注意　无穷大与无界函数的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大.

2. 单调性

定义　若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加；若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少.

注　不是所有函数都有单调性，例如狄利克雷函数就没有单调性.

3. 函数的奇偶性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

注　（1）奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于 y 轴对称.

（2）奇函数满足 $f(x)+f(-x)=0$.

（3）定义域一定要对称.

（4）奇函数或偶函数运算具有以下结论：

奇函数±奇函数＝奇函数；偶函数±偶函数＝偶函数；奇函数×（÷）奇函数＝偶函数；偶函数×（÷）偶函数＝偶函数；奇函数×（÷）偶函数＝奇函数.

4. 周期性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注　（1）若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 T/a 是 $f(ax+b)$ 的周期 $(a>0)$；若 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的最小公倍数 T 是 $f_i(x)$ 及 $f_i(x)$ 经初等运算所得函数的公共周期.

（2）常见周期函数：$\sin x,\cos x$，其周期 $T=2\pi$；$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$，其周期 $T=\pi$.

§2 极　限

一、基本概念

1. 数列的极限

定义 1　如果数列$\{x_n\}$与常数a有下列关系：对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n>N$时的一切x_n，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

注　(1) ε既是任意的，又是给定的；(2) N根据给定的ε找出，$N=N(\varepsilon)$；(3) N不唯一.

2. 函数的极限

2.1　当$x\to x_0$时函数的极限

定义 2　设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$的极限，记做

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

注　定义中$0<|x-x_0|$表示$x\neq x_0$，所以$x\to x_0$时$f(x)$有没有极限与$f(x)$在点x_0是否有定义并无关系.

2.2　自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 3　设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义. 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数X，使得对于适合不等式$|x|>X$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记做

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

3. 左、右极限

定义 4(左极限)　在上述$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义2中，把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0-\delta<x<x_0$，那么$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限，记做

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

定义 5(右极限)　在上述$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义2中，把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0<x<x_0+\delta$，那么$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记做

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

4. 无穷小量

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ(或正数X)，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)|<\varepsilon$，那么称函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷小量，记做

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0).$$

5. 无穷大量

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X),使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大量.

6. 无穷小量与无穷大量之间的关系

在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$ 为无穷大量,则其倒数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷小量;反之,若 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x)\neq 0$,则其倒数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷大量.

二、重要定理与性质

1. 收敛数列的性质

定理 1(极限的唯一性) 数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

定理 2(收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

定理 3(收敛数列与其子列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那么它的任一子列也收敛,且其极限也是 a.

注 根据定理 2,如果数列 $\{x_n\}$ 无界,那么数列 $\{x_n\}$ 一定发散.但是,如果数列 $\{x_n\}$ 有界,却不能断定数列 $\{x_n\}$ 一定收敛,例如数列 $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$ 有界,但却是发散的.所以数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

2. 有关函数极限的定理

定理 1 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在且相等,即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

定理 2(极限的局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,而且 $A>0$(或 $A<0$),那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域,当 x 在该邻域内时,就有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 3 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果函数可表示为常数与无穷小之和,那么该常数就是这函数的极限.即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理 4 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

3. 无穷小的比较

3.1 两个无穷小的阶

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \beta(x)=0$.

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记做 $\beta=o(\alpha)$;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$,则称 β 与 α 是同阶无穷小;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0, k>0$,则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记做 $\alpha \sim \beta$.

3.2　有关无穷小的定理

定理 1　β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 2　设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

4. 极限运算法则

定理 1　有限个无穷小的和也是无穷小.

定理 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

定理 3　如果 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$存在,且

$$\lim[f(x)\pm g(x)] = A\pm B = \lim f(x)\pm \lim g(x).$$

定理 4　如果 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]$存在,且

$$\lim[f(x)\cdot g(x)] = AB = \lim f(x)\cdot \lim g(x).$$

定理 5　如果 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,且 $B\neq 0$,则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$存在,且

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

定理 6　设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$,如果　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$,

那么(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

(3) 当 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,且 $B\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

定理 7　如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,而 $\lim\varphi(x)=a$,$\lim\psi(x)=b$,那么 $a\geqslant b$.

定理 8(复合函数的极限运算法则)　设函数 $u=\varphi(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a,即$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则复合函数 $f[\varphi(x)]$当 $x\to x_0$ 时的极限也存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

5. 两个重要准则

准则 Ⅰ　如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则 Ⅰ′　设函数 $f(x)$,$g(x)$,$h(x)$在$\mathring{U}(x_0,r)$(或$|x|>M$)有定义.如果

(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$(或$|x|>M$)时,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$成立;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在,且等于 A.

准则 Ⅰ 及准则 Ⅰ′称为夹逼准则.

准则 Ⅱ　单调有界数列必有极限.

6. 两个重要极限

重要极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　　　重要极限:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

§3　函数的连续性

一、基本概念

1. 函数连续性概念

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 3　如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续.

2. 间断点

定义 4　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情形之一：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第Ⅰ类间断点　若在间断点 x_0 处 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 均存在，则称 x_0 为第Ⅰ类间断点；若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$，点 x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点；若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，$x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

第Ⅱ类间断点　若在间断点 x_0 处 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为第Ⅱ类间断点；若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 之中有一个为 ∞，点 x_0 称为 $f(x)$ 的无穷间断点.

二、重要定理与性质

1. 连续函数的和、积及商的连续

定理 1　有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数.

定理 2　有限个在某点连续的函数的乘积是一个在该点连续的函数.

定理 3　两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数，只要分母在该点不为零.

2. 反函数与复合函数的连续性

定理 4　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

定理 5　设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$.

定理 6　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也是连续的.

3. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

定理 1(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

定理 2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),则在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少有一个 $\eta(a<\eta<b)$ 使 $f(\eta)=0$.

定理 4(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,则对于 A 与 B 之间的任意一个数 c,在开区间 (a,b) 内至少有一点 η,使得 $f(\eta)=c(a<\varepsilon<b)$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

考点真题链接

考点 1:函数的概念、性质及其应用

1. (1997 年数学三) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ ( )

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0;\end{cases}$ B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0;\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0;\end{cases}$ D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【考点提示】 分段函数及其求法.

【解题分析】 由已知

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

由 $f(x)\leqslant 0$,知 $x\geqslant 0$ 且 $f(x)=-x$;由 $f(x)>0$,知 $x<0$ 且 $f(x)=x^2$;从而

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0,\end{cases}$$ 选(D).

2. (2003 年数学三) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$,试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

【考点提示】 介值定理、微分中值定理.

【解题分析】 由题设,$f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上也必然连续,则在 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 必有最大值 M 和最小值 m,因而 $m\leqslant f(0)\leqslant M$, $m\leqslant f(1)\leqslant M$, $m\leqslant f(2)\leqslant M$,从而

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由连续函数的介值定理,知存在一点 $\eta\in[0,2]$,使

$$\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=f(\eta).$$

由已知条件 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,可推知 $f(\eta)=1$,因此

$$f(\eta)=f(3)=1,\eta\in[0,2].$$

由罗尔定理,知存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$. 证毕.

考点 2:函数极限的计算及证明

1. (2009 年数学三题二(9)) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

【考点提示】 求解函数的极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\cos x-1}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$