高等学校教材

高等代数

李中方 主编

西安地图出版社

高等学校教材

高等代数

主编 李中方
副主编 毋光先 范志勇 秦光仁

西安地图出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数／李中方主编.—西安：西安地图出版社，2009.9
ISBN 978-7-80748-461-5

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等代数－高等学校—教材
Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第142596号

高等代数

李中方　主编
西安地图出版社出版发行
（西安市友谊东路344号　邮政编码：710054）
新华书店经销　河南新起点印务有限公司印刷
889毫米×1194毫米　1/32开本　11.5印张 308千字
2009年8月第1版　2009年8月第一次印刷
印数 0001-2000

ISBN 978-7-80748-461-5

定价：23.50元

前 言

本书是作者根据多年的教学经验并参考了大量其它教材编写而成的.

全书分为三大部分,即预备知识(第一章),多项式理论(第六章),线性代数(第二章至第五章,第七章至第十章).

根据多年的教学经验,结合当代大学生的学习特点,编写时主要考虑了以下方面:

1. 体现了由浅入深的原则,着重于基础知识、基本理论的讲授和基本技能的训练.特别是与中学代数有直接关系的部分,尽可能与中学内容结合起来,再从理论上提高,使读者在学完本课程之后,对中学代数能够有较深刻和准确的理解.

2. 每一章都标明要讨论的主要问题,交待清楚问题的来龙去脉,并突出解决问题的思路,培养读者分析问题、解决问题的能力.

3. 概念与结论的引入做到由具体到抽象, 由特殊到一般.对问题的阐述力求通俗易懂、深入浅出.

4. 在线性代数的前半部分详细讲解行列式、矩阵等的基本理论,使读者先掌握具体的运算;在后半部分介绍线性空间、线性变换等的抽象理论.注意线性代数与解析几何的联系,除了适当说明代数问题的几何意义外,也尽可能给出代数在几何中的应用实例.

5. 安排了较多的例题,使读者加深对基础知识的理解,掌握解题的方法和技巧.每一章后都附有大量的习题及补充题,有利于读者对基础知识的掌握、加深和拓宽知识面.

本书由焦作师范高等专科学校李中方副教授主编, 各章的执笔人:第一、六章,安阳师范学院秦光仁;第二、七章,焦作师范高等专科学校毋光先;第九、十章,焦作师范高等专科学校范志勇;第三、四、五、八章,焦作师范高等专科学校李中方.

由于编者水平有限，加上时间仓促，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

2009年6月

目　录

第一章 预备知识

高等代数作为大学数学专业的基础课程之一，包括两部分内容，一部分是以解一元高次方程为主要内容的多项式理论；另一部分是线性代数，它包括行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换等.这些是学习其它数学科目以及物理学、计算机科学等所不可缺少的.

我们从数学中常用的几个基本概念开始讨论，即集合、数域、数学归纳法、整数的整除性理论与映射.这样，我们以后的讨论就建立在严格的理论基础之上，因而使适用的范围确定，并且可以使所得到的结论具有一般性.

§1 集合

集合是数学中的基本概念，在现代数学的任一分支中，都要用到.目前，集合的基本理论已渗透到各个学科领域，成为现代科学技术的一个基础工具.本节将介绍集合的基本概念、运算及其性质等.

集合是不定义的一个名词，因而我们给出一些解释，即所谓集合，就是在一定范围内所讨论的对象的全体.例如：一班同学、一组自然数等都是集合.

通常用大写的拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，用小写的拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 等表示集合中的元素.

若 a 是集合 A 的**元素**，就用 $a\in A$ 表示；用 $a\notin A$ 表示 a 不属于 A.若一个集合中元素的个数是有限个，则称作**有限集合**，否则，

就称为**无限集合**.

表示集合的方法有两种:一种是将集合中的元素列举出来,称为**列举法**;另一种是利用一项规则,以便决定某一物体是否属于该集合,称作**描述法**,用 $A=\{x|x$ 具有一种性质$\}$表示. 例如:$M=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x<1\}$,$A=\{x|x\in\mathbf{Z}\}$.

集合中的元素具有确定性、互异性、无序性.

几个常用的数集常用特定的符号表示.如:$\mathbf{N}$ 表示自然数集,$\mathbf{Z}$ 表示整数集合,$\mathbf{Q}$ 表示有理数集合,$\mathbf{R}$ 表示实数集合,$\mathbf{C}$ 表示复数集合.

下面介绍集合的一些有关概念.

定义 1 若集合 A 的每一个元素都属于集合 B,则称 A 是 B 的一个**子集**.记为 $A\subseteq B$.

定义 2 设 A, B 是两个集合,若 A 是 B 的子集,且 B 中有元素不在 A 中,则称 B 是 A 的**真子集**,记为 $A\subset B$.

注:集合的包含关系具有反身性、反对称性、传递性.

定义 3 不包含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\mathbf{\Phi}$,规定:对于任意集合 A, $\mathbf{\Phi}\subseteq A$

定义 4 若 A 是 B 的子集,且 B 又是 A 的子集,则称 A 与 B **相等**,记为 $A=B$.

注:由定义可知,要证明两个集合相等,即证明两个集合互相包含.

定义 5 设 A 是任一集合,则记集合 $\rho(A)=\{X|X\subseteq A\}$,即由 A 的一切子集所构成的集合,称为 A 的**幂集**.

定义 6 集合的基数

表示集合中元素多少或度量集合大小的数,称作集合的**基数**或**势**.一个集合的基数,记为$|A|$.

下面介绍集合的有关运算.

定义 7 设 A,B 是两个集合,由 A 的一切元素和 B 的一切元素所成的集合,叫做 A 与 B 的**并集**. 记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=$

$\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

定义 8 设 A,B 是两个集合,由 A 和 B 的所有公共元素组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**. 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

定义 9 设 A,B 是两个集合,由一切属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$, 即 $A-B= \{x \mid x \in A$ 但 $x \notin B\}$.

例如：若 $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{0,1,-3,4\}$, 则 $A \cap B = \{0,1\}$, $A \cup B=\{0,1,2,3,-3,4\}$, $A-B=\{2,3\}$, $B-A=\{-3,4\}$

集合的交与并满足以下性质：

1° 幂等律：$A \cap A=A$, $A \cup A=A$;

2° 交换律：$A \cap B=B \cap A$, $A \cup B=B \cup A$;

3° 结合律：

$$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C);$$

4° 分配律：

$$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C).$$

例 证明：$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

§2 数 域

关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的代数性质. 代数所研究的问题主要涉及数的代数性质，这方面的大部分性质是有理数集、实数集、复数集所共有的.

定义 1 设 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集，对于 S 中任意两个数 a 和 b,如果 $a-b$, $a+b$ 和 ab 都在 S 内,即 S 关于数的加法，减法,乘法运算封闭,则称 S 是一个**数环**.

定义 2 设 P 是一个数环且至少含有一个非零的数，如果对

P 中任意两个数 a 和 b $(b\neq0)$, $\frac{a}{b}$ 都在 P 内,即 P 关于数的除法运算封闭,则称 P 是一个**数域**.

由定义可知,数域一定是数环,但反之不然.

例如,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域,同时也是数环,整数集 $\mathbf{Z}$ 是数环,但不是数域.

例 1 取定一个整数 a,$S=\{na|n\in\mathbf{Z}\}$,则 S 是一个数环.这是因为,设 $n_1, n_2\in\mathbf{Z}$, 则

$$n_1a\pm n_2a=(n_1\pm n_2)a\in S,$$
$$(n_1a)(n_2a)=(n_1n_2a)a\in S.$$

但显然 S 不是数域.当 $a=2$ 时,S 就是全体偶数组成的数环,通常称为**偶数环**,当 $a=0$ 时,S 由单独一个数 0 组成,$\{0\}$可以说是最小的数环.这是因为,假设 S 是一个数环,由于 S 非空,因此可以在其中任取一个数 b,则 $b-b=0\in S$,即任意数环包含$\{0\}$.

又如,令 $\mathbf{Z}[i]=\{a+bi|a,b\in\mathbf{Z}, i^2=-1\}$,则对于 $Z[i]$ 中任意元素 $a+bi$ 与 $c+di$ 有

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i\in\mathbf{Z}[i],$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i\in\mathbf{Z}[i].$$

所以 $Z[i]$ 是一个数环, 称为**高斯整数环**. 但 $\mathbf{Z}[i]$ 显然不是数域,这是因为 2、$3\in\mathbf{Z}[i]$,而$\frac{2}{3}\notin\mathbf{Z}[i]$.

例 2 令 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\,|a,b\in\mathbf{Q}\}$,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$是一个数域.

这是因为对任意 $a+b\sqrt{2}$, $c+d\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,有

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

因此 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$是数环.又 $1+0\sqrt{2}=1\neq0$,所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$中含有非零数.现在设 $c+d\sqrt{2}\neq0$,则 $c-d\sqrt{2}\neq0$.否则,在 $d=0$ 的

情况下将得出 $c=0$,这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾;在 $d\neq 0$ 的情形得出 $\sqrt{2}=\frac{c}{d}\notin\mathbf{Q}$,这与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾.因此,

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

这就证明了 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$是一个数域. ▌

类似地,对于任意的素数 p,$\mathbf{Q}(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 是数域.

最后我们证明数域的一个重要性质,即

定理 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明 设 P 是任意一个数域,由数域定义知 P 含有不为零的数,任取其一设为 a,则由数域关于除法的封闭性知 $1=\frac{a}{a}\in P$,由数域关于加法的封闭性知 $1+1$, $1+1+1$, $\cdots$,即全体正整数属于 P,由数域关于减法的封闭性知 $0=1-1\in P$, 且任意负整数$-n=0-n\in P$, 这样P 含有全体整数; 又因为任意一个有理数可表为除数不为零的两个整数之商, 所以由数域关于除法的封闭性知,P 含有全体有理数. ▌

在这个定理的意义之下,我们常说有理数域是最小的数域.

§3 数学归纳法

最小数原理 自然数集 $\mathbf{N}$ 的任意一个非空子集 S,必有一个最小数,也就是存在一个数 $a\in S$, 对于任意 $c\in S$,都有 $a\leqslant c$. ▌

注意:

1° 最小数原理并不是对任意数集都成立的.例如,整数集就没有最小数.

2° 设 c 是任意一个整数,令 $Mc=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $x\geqslant c\}$,那么以 Mc 代替自然数集 $\mathbf{N}$,最小数原理对于 Mc 仍能成立,也就是说 Mc 的任意一个非空子集必含有一个最小数.

由最小数原理可得出以下的数学归纳法原理.

第一数学归纳法原理 设有一个与自然数 n 有关的命题,如果

1° 当 $n=1$ 时,命题成立;

2° 假设 $n=k$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时,命题也成立;那么这个命题对于一切自然数 n 都成立.

证明 假设命题不是对于一切自然数都成立,令 S 表示使命题不成立的自然数所成的集.那么 $S\neq\Phi$,于是由最小数原理,S 中有最小数 h,因为命题对于 $n=1$ 成立,所以 $h\neq 1$,从而 $h=1$ 是一个自然数,因为 h 是 S 中的最小数,所以 $h-1\notin S$. 这就是说,当 $n=h-1$ 时,命题成立. 于是由 2°,当 $n=h-1+1$ 时命题也成立,因此 $h\notin S$,这就导致了矛盾. ▌

注意:根据最小数原理的注意 2°,我们可以取 Mc 来代替自然数集 $\mathbf{N}$.也就是说,如果要证明某一命题从某个整数 c 开始成立.这时仍然可以利用数学归纳法来证明,只要把第一数学归纳法原理中条件 1°的 $n=1$ 换成 $n=c$ 就行了.

我们看一个例子.

例 1 证明:当 $n\geqslant 3$ 时,n 边形的内角和等于$(n-2)\pi$.

证明 1° 当 $n=3$ 时,命题成立,因为三角形内角和等于$(3-2)\pi$.

2° 假设 $n=(k\geqslant 3)$时命题成立,对于任意一个 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$,连接 A_1A_3,那么 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和等于三角形 $A_1A_2A_3$ 的内角和再加上 k 边形 $A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和. 前者等于 π,后者由归纳假设,等于$(k-2)\pi$,因此 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和等于

$$\pi+(k-2)\pi=(k-1)\pi=((k+1)-2)\pi. ▌$$

在有些情况下，归纳假设只有“命题对于 $n=k$ 成立”还不够，而需要较强的假设.我们有

第二数学归纳法原理 设有一个与自然数 n 有关的命题.如果

1° 当 $n=1$ 时命题成立；

2° 假设命题对于一切小于 k 的自然数来说都成立，则命题对于 k 也成立；那么命题对于一切自然数都成立.

可依照第一数学归纳法原理进行证明. ▌

当然，在这个原理里，条件 1° 也可以换成 n 等于某一个整数 c.

例 2 设 $a_1=3, a_2=7, a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}(n=3,4\cdots)$.试证，对于任意自然数 n 都有 $a_{nc}=2^{n+1}-1$.

证明 1° 当 $n=1$ 时，当 $a_1=2^{1+1}-1$.当 $n=2$ 时，$a_2=7=2^{2+1}-1$.所以对于 $n=1,2$,命题成立.

2° 假设 $n<k$ 时命题成立，要证 $a_k=2^{k+1}-1$，其中 $k\geqslant 3$.因为 $a_{k-1}=3a_k-2a_{k-2}$，由归纳假设有

$$a_{k-1}=2^{(k-1)+1}-1, a_{k-2}=2^{(k-2)+1}-1$$

所以，$a_k=3(2^k-1)-2(2^{k-1}-1)=2^{k+1}-1$.

这就是说，$n=k$ 时命题也成立. ▌

§4 整数的整除性

定义 1 设 a, b 是两个整数，如果存在一个整数 q，使得 $b=aq$，则称 a **整除** b（或说 b 被 a 整除），记作 $a|b$，这时 a 称为 b 的**因数或约数**，而 b 称为 a 的**倍数**.否则称 a 不整除 b.

由定义容易推出下列关于整除的基本性质：

1° $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$;

2° $a|b$, $a|c \Rightarrow a|(b+c)$;

3° $a|b,\ c\in Z|\Rightarrow a|bc$;

4° $a|b_i,\ c_i\in Z, i=1,2,\cdots,t\Rightarrow a|(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_tc_t)$;

5° 每一个整数都被 1 和−1 整除;

6° 每一个整数 a 都被它自身和它的相反数$-a$ 整除;

7° $a|b$ 且 $b|a\Rightarrow b=a$ 或 $b=-a$.

这些性质都是很明显的,我们只证明最后一个.

由$a|b$ 且$b|a$,我们有 $b=ac, a=bd$,这里 c,d 为整数.于是 $a=acd$,如果 $a=0$,那么 $b=ac=0$;如果 $a\neq 0$,那么 $cd=1$,从而 $c=d=1$ 或 $c=d=-1$,于是 $b=a$ 或 $b=-a$.

下面我们给出整数的带余除法定理,它在整数的整除性理论中占有重要的地位.

定理 1 (带余除法定理) 设 a,b 是整数且 $b\neq 0$,则存在唯一的一对整数 q 和 r,使 $a=bq+r$,且 $0\leqslant r<|b|$.

证明 做整数序列$\cdots,-3b,-2b,-b,0,b,2b,3b,\cdots$则 a 必在上述序列的某两项之间,即存在一个整数 q 使得 $qb\leqslant a<(q+1)b$成立.令 $a-qb=r$,则 $a=bq+r$ 而 $0\leqslant r<|b|$.

下面我们证明 q,r 的唯一性:设 q_1,r_1 是满足 $a=bq+r, 0\leqslant r<|b|$的两个整数,则 $a=bq_1+r_1, 0\leqslant r_1<|b|$,因而 $bq_1+r_1=bq+r$.于是 $b(q-q_1)=r_1-r$,故$|b||q-q_1|=|r_1-r|$.

由于 r 与 r_1 都是小于$|b|$的正数,所以上式右边是小于$|b|$的,如果 $q\neq q_1$ 则上式左边$\geqslant|b|$.这是不可能的,因此 $q=q_1$,而 $r=r_1$. ▌

定理 1 中唯一确定的整数 q 和 r 分别叫做 b 除 a 所得的商和余数.

例如,$b=-5, a=18$,则 $q=-3, r=3$.则根据带余除法,给了一对整数 a,b,我们可以判断 b 能否整除 a.如果 $b\neq 0$,那么 $b|a$ 当且仅当以 b 除 a 所得的余数 $r=0$,如果 $b=0$,那么 b 只能整除 0.

定义 2 若 a,b 是两个整数,满足下列条件的整数 d 叫做 b 与 a 的一个**最大公因数**:

1° $d|a$ 且 $d|b$;