江苏省中等职业学校国家审定教材同步教学案

升级版

教与学新方案

JIAO YU XUE XIN FANG AN

高二(下)

职业教育考试研究中心组织编写

数学

学生用书

丛书主编：凌颂良

权威性
导向性
实用性

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

江苏省中等职业学校国家审定教材同步教学案
根据新大纲　新教材编写

教与学新方案

数　学 高二(下)

丛书主编　凌颂良
本册主编　周　坚
编　　委　周　坚　冯志刚　孙存兵　褚夫胜
　　　　　孙传霞　杨本群　张德江
主　　审　何蔚华

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

教与学新方案·数学·高二下 / 凌颂良主编;周坚分册主编. —南京:东南大学出版社,2009.6

ISBN 978-7-5641-1655-2

Ⅰ.教… Ⅱ.①凌…②周… Ⅲ.数学课—专业学校—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 070903 号

教与学新方案·数学·高二(下)

出版发行	东南大学出版社
社　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人	江　汉
责任编辑	吉雄飞
经　销	全国各地新华书店
印　刷	江苏富宁书刊印刷有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	29.75
字　数	743 千字
版　次	2009 年 8 月第 1 版
印　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
定　价	62.00 元(共 3 本)

* 东大版图书若有印装质量问题,请直接与读者服务部调换,电话:025-83792328。

致 读 者

面对大力发展职业教育，促进职教与普教“并驾齐驱”的新形势，根据新大纲、新教材，研发合适的配套教辅用书乃当务之急。我们审时度势，在广泛征求权威部门专家意见的基础上，诚邀参加新大纲、新教材编写的部分职教专家及数十位国家级重点职校教学一线的名师精心策划，联合编著了这套《教与学新方案》系列丛书，其所具权威性、导向性、实用性、科学性不言而喻。本套丛书针对职业学校学科特点，分成文化基础课程与专业基础课程两大模块，并突出以下几点。

1. 依据大纲，紧扣教材。

丛书在编写过程中以教育部最新颁布的《中等职业学校教学大纲》为依据，紧扣国家审定的规划教材，并充分考虑中等职业教育的实际，体现出中职学生的学习特点和学习需求。丛书注重学法指导，强化基础训练，突出能力培养，构建出完整的教、学、练、测的导学导练体系，以期实现教学目的。

2. 结构合理，讲练得当。

丛书针对职校学科教学特点，依据实用、适当、适度的原则，按章节、单元、课时编写，设计栏目有讲有练。“讲”以讲透教材为目标，整体把握教材，系统梳理、提炼每课知识点；“练”以检查学习效果为目标，根据各学科特点，科学设计每份练习；所编单元达标检测、期中期末试卷紧扣教材要求，抓住教学要点、重点、难点，思维逐渐开拓，难度逐渐加深，题量科学、适当。全书结构设计合理，层次分明，栏目原创、新颖，既可作为教师教学参考书，又可作为学生测练作业本。

3. 注重实效，提高素养。

丛书始终以有利于教师的“教”和考生的“学”为出发点和着力点，注意贴近高职院校招生考试命题的特点，使广大学生系统积累知识，全面提高应试水平，对复习迎考有着较强的指导作用！

本册《教与学新方案·数学·高二(下)》依据江苏省中等职业学校国家审定的最新《数学》教材编写，并结合了江苏省普通高校单独招生考试特点，力求与实际教学同步。

全书以课时为单位，按照科学实用、难易适当、原创新颖、系统同步的原则，突出教学重点、难点。“情境创设”按照本节课教学中心精心设计；“达标测试”针对每堂课的教学实际设计示范题目，当堂检测学生的课堂学习效果；“点拨提高”科学讲透教材，系统归纳教学重点、难点；“双基练习”注重对各章节基础知识的巩固训练，重视拓展知识、提高能力，使难度逐渐加深，思维逐渐开阔，科学体现本章知识的系统性、阶梯性，以满足教学过程中的不同需要。

本书便于教师讲透教材，当堂测试教学效果，亦可当作备课笔记使用，更便于学生课前预习、课后复习、自我总结、自我检测，对学好课本知识、学会考试能起到事半功倍的效果。

在本书策划和编写过程中，得到了各级职教教研部门及有关专家学者的大力支持，我们在此表示衷心的感谢！本书的编写人员来自于教学第一线，具有丰富的理论知识和教学经验，其中几位老师多次参加过教材编写、对口单招的命题和阅卷工作。

一堂好课能点燃你智慧的火花，一位名师能引领你迈进科学的殿堂，一本好书能使你终身受益。

使用本书是读者的最佳选择，力求完美是编者的永远追求。

编委会

2009 年 6 月

目　录

第 17 章　计数法

§17.1　穷举法及分类法分步法

第一课时　分类计数法和分步计数法(一)

重点:分类计数原理和分步计数法原理.

难点:分类计数原理与分步计数原理的区别.

情景创设

2002 年夏季在韩国与日本举行的第 17 届世界杯足球赛共有 32 个队参赛.它们先分成 8 个小组进行单循环赛,决出 16 强,这 16 个队按确定的程序进行淘汰赛,决出 8 强,再决出 4 强,直到决出冠、亚军和第三名、第四名.问一共安排了多少场比赛?

达标测试(10 分钟)

1. 某学生去书店,发现 3 本好书,决定至少买其中一本,则购买方式有(　　)

A. 3 种　　B. 6 种　　C. 7 种　　D. 9 种

2. 小王打算用 70 元购买面值分别为 20 元和 30 元的两种 IC 电话卡.若他至少买一张,则不同的买法一共有(　　)

A. 7 种　　B. 8 种　　C. 6 种　　D. 9 种

3. 从 0,1,2,…,9 这 10 个数字中,任取两个不同数字作为平面直角坐标系中点的坐标,能够确定不在 x 轴上的点的个数是(　　)

A. 100　　B. 90　　C. 81　　D. 72

4. 书架上有不同的语文书 10 本,不同的英语书 7 本,不同的数学书 5 本.现从中任选一本阅读,有多少种选法?

5. 四位运动员去争夺三项冠军,不允许并列,则共有多少种不同的冠军获得情况?

点拨提高

知识归纳

1. 分类计数原理:做一件事情,完成它可以有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法,…,在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.
2. 分步计数原理:做一件事情,完成它需要分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法,…,做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$种不同的方法.
3. 两个基本原理的区别:一个与分类有关,一个与分步有关;加法原理是“分类完成”,乘法原理是“分步完成”.

   (1)分类计数原理(加法原理)中,“完成一件事,有 n 类办法”,是说每种办法“互斥”,即每种方法都可以独立地完成这件事,同时它们之间没有重复也没有遗漏.进行分类时,要求各类办法彼此之间是相互排斥的,不论那一类办法中的哪一种方法,都能独立完成这件事.只有满足这个条件,才能直接用加法原理,否则不可以.

   (2)分步计数原理(乘法原理)中,“完成一件事,需要分成 n 个步骤”,是说每个步骤都不足以完成这件事,这些步骤,彼此间也不能有重复和遗漏.如果完成一件事需要分成几个步骤,各步骤都不可缺少,需要依次完成所有步骤才能完成这件事,而各步要求相互独立,即相对于前一步的每一种方法,下一步都有 m 种不同的方法,那么完成这件事的方法数就可以直接用乘法原理.

   两个原理,可以与物理中电路的串联、并联类比.

典例分析

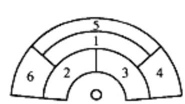
【例 1】 现有高一学生 10 人,高二学生 8 人,高三学生 5 人,组成冬令营.选其中 1 人为负责人,有多少种不同的选法?

解:选 1 人为负责人,有三类办法:第一类办法是从高一学生中选 1 人,有 10 种不同的方法;第二类办法是从高二学生中选 1 人,有 8 种不同的方法;第三类办法是从高三学生中选 1 人,有 5 种不同的方法,根据分类计数原理,不同选法种数是 $N=10+8+5=23$.

答:选 1 人为负责人,有 23 种不同的选法.

点评 根据对象的不同,分类考虑,有助于问题的解决.本题其实不必考虑负责人来自哪个年级,只考虑从 23 人中选 1 人负责,则有 23 种不同的选法.

【例 2】 某城市在中心广场建造一个花圃,花圃分为 6 个部分(如图).现要栽种 4 种不同颜色的花,每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花,有多少种不同的栽种方法.(以数字作答)



解:从题意来看 6 部分种 4 种颜色的花,
又从图形看知必有 2 组同颜色的花,
从同颜色的花人手分类求.

(1)②与⑤同色，则③⑥也同色或④⑥也同色，
所以共有 $N_1=4\times3\times2\times2\times1=48$ 种；
(2)③与⑤同色，则②④或④⑥同色，
所以共有 $N_2=4\times3\times2\times2\times1=48$ 种；
(3)②与④且③与⑥同色，则共有 $N_3=4\times3\times2\times1=24$ 种.
所以，共有 $N=N_1+N_2+N_3=48+48+24=120$ 种.

【例 3】 满足 $A\cup B=\{1,2\}$ 的集合 A,B 共有多少组？
分析：解答本题的关键是正确理解并集、子集的意义. 由题设知 A、B 必为 $\{1,2\}$ 的子集，且 1 与 2 必在 A 或 B 中. 可分类解决，也可分步解决.
解法 1：A,B 均是 $\{1,2\}$ 的子集：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，故分 4 类.
1. 当 $A=\varnothing$ 时，只有 $B=\{1,2\}$，得 1 组解；
2. 当 $A=\{1\}$ 时，$B=\{2\}$ 或 $\{1,2\}$，得 2 组解；
3. 当 $A=\{2\}$ 时，$B=\{1\}$ 或 $\{1,2\}$，得 2 组解；
4. 当 $A=\{1,2\}$ 时，$B=\varnothing$ 或 $\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{1,2\}$，得 4 组解.

根据分类计数原理，共有 $1+2+2+4=9$ 组.
解法 2：设 A,B 为两个“口袋”，需将两种元素(1 与 2)装入，任一元素至少装入一个袋中，分两步可办好此事：
第一步装“1”，可装入 A 不装入 B，也可装入 B 不装入 A，还可既装入 A 又装入 B，有 3 种装法；
第二步装“2”，同样有 3 种装法.
根据分步计数原理共有 $3\times3=9$ 种装法，即原题共有 9 组解.

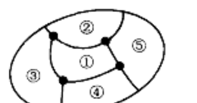
双基练习(45 分钟)

一、选择题

1. 某赛季足球比赛的计分规则是：胜一场，得 3 分；平一场，得 1 分；负一场，得 0 分. 一球队打完 15 场，积 33 分，若不考虑顺序，该队胜、负、平的情况种数共有(　　)
A. 5 种　　B. 4 种　　C. 3 种　　D. 6 种
2. $(a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot(b_1+b_2+b_3)\cdot(c_1+c_2)$ 展开后的项数是(　　)
A. 9　　B. 11　　C. 12　　D. 24
3. 已知集合 $M=\{1,-2,3\}$，$N=\{-4,5,6,-7\}$，从两个集合中各取一个元素作点的坐标，则在直角坐标系中，第一、第二象限不同点的个数有(　　)
A. 18　　B. 16　　C. 14　　D. 10

二、填空题

4. 从 1 到 10 的正整数中，任意抽取两个相加，所得和为奇数的不同情形有________种.
5. 如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一种颜色. 现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有______



种.(以数字作答)

6. $a\in\{1,2,3,5\}$,$b\in\{1,2,3,5\}$,则方程 $y=\frac{b}{a}x$ 可以表示________条不同直线?

7. 在一次足球预选赛中,某小组共有 5 个队进行双循环赛(每两队之间赛两场),已知胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分. 积分多的前两名可出线(积分相等则要比净胜球或进球总数). 赛完后一个队的积分可出现的不同情况的种数为________.

8. 4 张卡片的正、反面分别有 0 与 1,2 与 3,4 与 5,6 与 7,将其中 3 张卡片排放在一起,可组成________个不同的三位数?

9. 三封信投入四个邮筒,则不同的投法种数有________种.

10. 从 $-1,0,1,2$ 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数,可组成不同的二次函数共有________个,其中不同的偶函数共有________个.(用数字作答)

三、解答题

11. 在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有多少个?

12. 将 3 枚相同的纪念邮票和 4 枚相同的纪念币作为礼品送给甲、乙两名学生,全部分完且每人至少有一件礼品,不同的分法共有多少种?

13. 有红、黄、白色旗子各 n 面($n>3$),取其中一面、二面、三面组成纵列信号,可以有多少不同的信号?

14. 在"金山之春"节目中拿出两个信箱,其中存放着先后两次竞猜中成绩优秀的观众来信甲信箱中有 30 封,乙信箱中有 20 封,现由主持人抽奖确定幸运观众,若先确定一名幸运之星,再从两信箱中各确定一名幸运伙伴,有多少种不同的结果?

第二课时　分类计数法和分步计数法(二)

重点:分类计数原理和分步计数原理的综合应用.

难点:判断分类还是分步.

情景创设

甲、乙、丙、丁四人互相传球,第一次甲传给乙、丙、丁三人中任一人,第二次由拿球者再传给其他三人中任一人,这样共传了 4 次,则第 4 次球仍回到甲的方法共有多少种? 这个问题可以用分类

计数原理和分步计数法原理解决.

达标测试(10分钟)

1. 有7本不同的杂志,5本不同的小说,分给三个人,每人都分且只能分得1本杂志和1本小说,则共有不同的分法种数为(　　)

A. $7\times5+6\times4+5\times3$　　B. $7\times6\times5+5\times4\times3$

C. $7\times5\times6\times4\times5\times3$　　D. 7×5

2. 有一密码为 | 6 | 3 | 1 | 2 | 0 | 8 | 的手提保险箱,现在显示的号码为 | 0 | 8 | 0 | 1 | 2 | 7 |,要打开箱子,至少需要经过旋转(每一个旋钮上显示的数字可为0,1,2,3,4,5,6,7,8,9的任意一个,只要一个旋钮上转出一个新数字就为一步,逆转、顺转都可以)________步.

3. 某车队有不同车号载重4吨的卡车20辆,不同车号载重3吨的卡车15辆,试问:

(1)出车一辆,有多少种不同派法?

(2)4吨和3吨车各出一辆,有多少种不同派法?

4. 五名学生报名参加四项体育比赛,每人限报一项,报名方法的种数为多少?又他们争夺这四项比赛的冠军,获得冠军的可能性有多少种?

点拨提高

知识归纳

1. 弄清两个原理的区别与联系,是正确使用这两个原理的前提和条件.这两个原理都是指完成一件事而言的.其区别在于:

(1)分类计数原理是“分类”,分步计数原理是“分步”;

(2)分类计数原理中每类办法中的每一种方法都能独立完成一件事,分步计数原理中每步中每种方法都只能做这件事的一步,不能独立完成这件事.

2. 计算关键　(1)审题;(2)判断分类还是分步?分类相加,分步相乘.

3. 对于较复杂的问题,有时分类时还有两次分类,分步中下一步要受上一步的影响,需要我们深刻理解题意,灵活运用两个原理来完成.

典例分析

【例1】 a,b,c,d 排成一行,其中 a 不排第一,b 不排第二,c 不排第三,d 不排第四的不同排法共有多少种?

解:依题意,符合要求的排法可分为第一个排 b,c,d 中的某一个,共3类,

每一类中不同排法可采用画“树状图”的方式逐一排出：

$b \begin{cases} a-d-c \\ c-d-a \\ d-a-c \end{cases}$　　$c \begin{cases} a-d-b \\ d \begin{cases} a-b \\ b-a \end{cases} \end{cases}$　　$d \begin{cases} a-b-c \\ c \begin{cases} a-b \\ b-a \end{cases} \end{cases}$

∴符合题意的不同排法共有 9 种

点评 按照分“类”的思路，本题应用了分类计数原理，为把握不同排列的规律，“树状图”是一种具有直观形象的有效做法.

【例 2】 关于正整数 2160，求：

(1)它有多少个不同的正因数？

(2)它的所有正因数的和是多少？

解：(1)∵$N=2\ 160=2^4\times3^3\times5$，

∴2160 的正因数为 $P=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$，

其中 $\alpha=0,1,2,3,4,\beta=0,1,2,3,\gamma=0,1$.

∴2160 的正因数共有 $5\times4\times2=40$ 个.

(2)式子$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)\times(3^0+3^1+3^2+3^3)\times(5^0+5^1)$的展开式就是 40 个因数.

∴正因数之和为 $31\times40\times6=7\ 440$.

【例 3】 在所有两位数中，个位数字大于十位数字的两位数共有多少个？

分析：在 0～9 这 10 个数字中，按照题目要求组成的两位数中，个位数字不能为 0 和 1，十位数字不能为 0 和 9. 也就是说组成两位数的数字可按个位分类或按十位分类来计算.

解法一：按个位数字是 2,3,4,5,6,7,8,9 分成 8 类，

在每一类中满足条件的两位数分别是 1 个，2 个，3 个，4 个，5 个，6 个，7 个，8 个.

则共有 $1+2+3+4+\cdots+7+8=36$(个).

解法二：按十位数字是 1,2,3,4,5,6,7,8 分成 8 类，

在每一类中满足条件的两位数分别是 8 个，7 个，6 个，5 个，4 个，3 个，2 个，1 个.

则共有 $8+7+6+5+4+3+2+1=36$(个).

点评 在具体分类或分步时，常遇到困难，要多练习，多积累经验，掌握思维方法，逐步做到恰当分类，合理分步.

双基练习(45 分钟)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{1,-2,3\}$，$N=\{-4,5,6,-7\}$，从两个集合中各取一个元素作点的坐标，则在直角坐标系中，第一、二象限内不同点的个数有(　　)

A. 18　　B. 16　　C. 14　　D. 10

2. 三封信投入四个邮筒，则不同的投法种数有(　　)

A. 3^4　　B. 4^3　　C. 4　　D. 12

3. 某中学的一幢5层教学楼共有3处楼梯，问从1楼到5楼共有走法种数为(　　)

A. 3^4　　B. 3^5　　C. 5^3　　D. 5^4

4. 设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{2,3,4,5,6\}$. 从 A 到 B 的映射 f 满足条件：对每个 $x\in A$，$f(x)+x$ 为偶数，那么这样的映射 f 的个数是(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 12　　D. 15

二、填空题

5. 某班新年联欢会原定的6个节目已排成节目单，开演前又增加了3个新节目，如果将这3个节目插入节目单中，那么不同的插法有________种.

6. 甲、乙、丙、丁四人互相传球，第一次甲传给乙、丙、丁三人中任一人，第二次由拿球者再传给其他三人中任一人，这样共传了4次，则第4次球仍回到甲的方法共有________种.

7. 在连接正八边形的三个顶点而成的三角形中与正八边形有公共边的三角形________个.

8. 课外小组共有8人，其中男生5人，女生3人，从小组内选出2人参加座谈会，其中至少有一名女生，一共有________种选法.

三、解答题

9. 某艺术组有9人，每人至少会钢琴和小号中的一种乐器，其中7人会钢琴，3人会小号，从中选出会钢琴与会小号的各1人，有多少种不同的选法？

10. 从1到200的自然数中，各个数位上都不含数字8的有多少？

11. 现提供甲、乙、丙、丁四个企业给我市一中高三年级三个班进行社会实践活动，其中企业甲是市明星企业，必须有班进行社会实践，每个班去哪个企业，可由各班自己在四个企业中任意选择一个，所以不同的安排社会实践的方案共有多少种？

12. 一次足球预选赛，某小组共有六支球队进行双循环(每两队之间赛两场)，已知胜一场得3分，平一场得1分，负一场得0分，则赛完后一支球队所得积分可以出现的不同情况有多少种？

13. 一栋7层的楼房备有电梯，在一楼有甲、乙、丙三人进了电梯，则满足有且仅有一人要上7楼，且甲不在2楼下电梯的条件时，求所有可能情况的种数.

§17.2 排列和组合

第一课时 排列(一)

重点:用排列解决一些简单的应用问题.
难点:理解排列的定义.

情景创设

问题:从甲、乙、丙3名同学中选出2名参加某天的一项活动,其中一名同学参加上午的活动,一名同学参加下午的活动,有多少种不同的方法.

这个问题,就是从甲、乙、丙3名同学中选出2名,按照参加上午的活动在前,参加上午的活动在后的顺序排列,求一共有多少种不同排法的问题.

达标测试(10分钟)

1. 写出以5个元素 a,b,c,d,e 中任取2个元素的所有排列.

2. 下列问题中哪些是排列问题?如果是在题后括号内打"√",否则打"×".
(1)20位同学互通一封信,问共通多少封信?(　　)
(2)20位同学互相握一次手,问共握手多少次?(　　)
(3)从e,π,5,7,10五个数中任意取出两个数作为对数的底数与真数,问共有几种不同的对数值?(　　)
(4)以圆上的10个点为端点,共可作多少条弦?(　　)
(5)以圆上的10个点为起点,且过其中另一个点的射线共可作多少条?(　　)

3. 计算:$\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_9^3}=$________.

4. 从10名同学中,任抽两名同学分别去参加学习方法和创建和谐校园座谈会,有多少种不同的抽法?

点拨提高

知识归纳

1. 排列的概念

从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素(这里的被取元素各不相同)按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 排列数的定义

从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个元素中取出 m 元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.

3. 排列数公式:$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)(m,n\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$

4. 阶乘:$n!$ 表示正整数 1 到 n 的连乘积,叫做 n 的阶乘. 规定 $0!=1$.

5. 排列数的另一个计算公式:$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

6. 在研究排列问题时,是从一些不同元素中任取部分或全部不同元素,这里既没有重复元素,又没有重复抽取相同的元素. 排列的定义中包含两个基本内容:一是"取出元素";二是"按照一定顺序排列"."一定顺序"就是与位置有关.

7. 按照排列的定义,两个排列相同,当且仅当这两个排列的元素完全相同,而且元素的排列顺序也完全相同.

8. 全排列:n 个不同元素全部取出的一个排列,叫做 n 个不同元素的一个全排列.

$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$ 即 $A_n^n=n!$

典例分析

【例1】 A,B,C 三名同学照相留念,成"一"字形排队,写出所有排列.

分析:先将三个位置从左至右编号 1,2,3,再画"树状图"或"框图",最后写出所有的排列.

解:把三个位置依次如下分类填入.

A 在首位 $A\begin{cases}BC\\CB\end{cases}$,$B$ 在首位 $B\begin{cases}AC\\CA\end{cases}$,$C$ 在首位 $C\begin{cases}AB\\BA\end{cases}$

故所有的排列为 ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA.

点评 在"树状图"或"框图"操作中,先将元素按一定顺序排出,然后定首按序分类. 在每类中再按余下元素在顺序不变的情况下定第二位再按序分类. 依次一直进行到完成一个排列,这样就能不重不漏地依照"树状图"或"框图"写出所有排列.

【例2】 解方程:$A_{2x+1}^4=140A_x^3$.

分析:利用排列数公式将方程转化为关于 x 的代数方程,求方程的正整数解.

解:根据原方程,$x(x\in\mathbf{N}_+)$ 应满足 $\begin{cases}2x+1\geqslant4,\\x\geqslant3,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant3$.

根据排列数公式,原方程化为

$(2x+1)2x(2x-1)(2x-2)=140x(x-1)(x-2)$.

$\because x\geqslant3$,两边同除以 $4x(x-1)$,得

$(2x+1)(2x-1)=35(x-2)$,

即 $4x^2-35x+69=0$,解得 $x=3$ 或 $x=\dfrac{5}{3}$(x 为整数,舍去);

$\therefore$ 原方程的解为 $x=3$.

点评 注意 A_n^m 中的隐含条件:(1)$n,m\in\mathbf{N}^*$;(2)$n\geqslant m$;(3)$A_n^m\in\mathbf{N}^*$.

【例 3】 4 个人有 6 个房间可供居住，每人可居住任一房间，恰有 4 个房间各一人，有多少种不同的居住方式？

解："元素"比"位置"少，可用"位置"找"元素"的方法求解.

每一种居住方式对应于从 6 个元素中任取 4 个元素的一个排列，

因此，不同的居住方式共有$A_6^4=360$(种).

双基练习(45 分钟)

一、选择题

1. 已知下列问题：

①从 1,2,3,4,5 中任取两个不同的数相加(或乘)，可以得到多少种不同的加法(或乘法)算式？

②从 1,2,3,4,5 中任取两个不同的数相加(或乘)，可以得到多少种不同的结果？

③某班有 50 名同学，每两人相互握手一次，共握手多少次？

④从 0 到 9 十个自然数中任取两个数组成直角坐标平面内的点的坐标，可得到多少不同的点的坐标？

⑤从 10 名同学中安排两名同学去学校开座谈会，有多少种不同的安排方法？

⑥某商场有四个大门，若从一个门进去，购买物品后再从另一个门出来，不同的出入方式共有多少种？

其中是排列问题的序号是(　　)

A. ①④⑥　　B. ①③④　　C. ③④⑥　　D. ①②⑤⑥

2. 设 $a\in \mathbf{N}_+$，且 $a<27$，则$(27-a)(28-a)\cdots(34-a)=$(　　)

A. A_{27-a}^{8}　　B. A_{34-a}^{27-a}　　C. A_{34-a}^{7}　　D. A_{34-a}^{8}

3. 从 8 人的数学兴趣小组中选 2 人分别担任正、副组长的不同的选法种数有(　　)

A. 28　　B. 35　　C. 45　　D. 56

4. 从数字 1,2,3,5,7 中任取 2 个作为对数的底和真数，一共可以得到不同对数值的个数是(　　)

A. 13　　B. 12　　C. 20　　D. 60

5. 甲、乙、丙三地之间有直达的火车，需要准备的车票种数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6

二、填空题

6. 由中国、韩国、日本三支足球队参加对抗赛，按冠军在前，亚军在后的顺序列出所有冠亚军的可能情况是________________.

7. 10 个队举行篮球比赛，实行主客场制，共比赛________场.

8. 一部记录影片在 4 个单位轮放映，每个单位放映 1 场，有________种轮放映次序.

三、解答题

9. 三张卡片正反面分别写着数字 1 和 2,3 和 4,5 和 6，若将三张卡片并列组成一个三位数，可以得到多少个不同的三位数？(6 不能作 9 用)

10. (1)解不等式：$A_9^x > 6A_9^{x-2}$.

(2)化简 $A_m^n + nA_m^{n-1}$.

11. 6 人站成一排，若甲不能站在左端也不能站在右端，则有多少种不同的站法？

12. 大会已安排 4 人发言，现增加 2 人发言，但原来 4 人发言的顺序不能变，共有________种安排方法.

第二课时　排列(二)

重点：元素分析法、位置分析法、优限法、间接法解决排列应用问题.

难点：合理分类分步、避免重复或遗漏. 运用优限法、间接法解决排列应用问题.

情景创设

1 名老师和 4 名学生站成一排合影留念，老师必须站在中间，有多少种不同的站法？这显然是排列问题，但老师只能站中间，老师成了特殊的元素，或者说中间只能站老师，中间位置成了特殊的位置. 这节课，我们学习这一类有限制条件的排列问题的处理方法.

达标测试(10 分钟)

1. 4 名男生和 4 名女生排成一排，女生不排在两端，共有不同的排法数为(　　)

A. $A_4^2\ A_6^6$　　B. $A_4^4\ A_4^4$　　C. $A_4^2\ A_4^4$　　D. A_8^8

2. 5 人排成一行，其中甲、乙之间至少有 1 人的排法种数是(　　)

A. 36　　B. 72　　C. 96　　D. 144

3. 从 6 人中选出 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览，要求每个城市有一人游览，每人只游览一个城市，且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览，则不同的选择方案共有(　　)

A. 300 种　　B. 240 种　　C. 144 种　　D. 96 种

4. 有 5 个不同的红球和 2 个白球排成一排，而在两端是红球的排列中，白球两旁都是红球的排

列方法有多少种?

5. 求证:$\mathrm{A}_{n-1}^{m}+m\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}=\mathrm{A}_{n}^{m}$.

点拨提高

知识归纳

1. 优先安排受限制的元素(或位置),再安排其他元素(或位置)的方法称为优限法.
2. 同一个问题,有时从元素角度考虑比较方便,有时从位置角度考虑比较方便,应注意灵活处理. 以元素为主处理问题的方法称为元素分析法,以位置为主处理问题的方法称为位置分析法. 处理有限制条件的排列问题,可以用元素分析法,优先安排受限制的元素;也可以用位置分析法,优先安排受限制的位置.
3. 不考虑受限条件的排列总数,减去不符合要求的排列数,得到所求的排列数,这就是间接法.
   在有限制条件的排列问题中,当限制问题的反面情况比较简明时,可优先考虑间接法.
4. 视一法又称为捆绑法,把要相邻的几个元素看成一个元素,参加排列,但这个元素并不是一个元素,它内部的各个元素之间还要进行排列.
5. 不相邻问题用插空法解决.
   在不相邻问题中,不相邻的元素为受限制的元素. 插空法的出发点与优限法的出发点恰恰相反,优限是先安排限制的元素(或位置),而插空法是后安排受限制的元素.

典例分析

【例 1】 有 3 名男生,4 名女生,排成一行,分别求出符合下列要求的不同排法的种数.

(1)甲在乙的左边(不要求必须相邻);
(2)甲不在最左边,乙不在最右边;
(3)男、女生各站在一起;
(4)男生必须排在一起;
(5)男、女生各不相邻;
(6)男生不能排在一起;
(7)甲、乙、丙三人按自左至右的顺序保持不变;
(8)甲、乙两人中间必须有 3 人.

解:(1)“甲在乙的左边”其实质是一个“顺序一定的问题”,运用调序法的思想求解问题.
由于“甲左乙右”和“甲右乙左”的排法种数相同,
故共有 $N=\dfrac{1}{2}\mathrm{A}_{7}^{7}=2\ 520$ 种.
(2)“元素定位型”,可用直接法和间接法求解.