

物理学基础

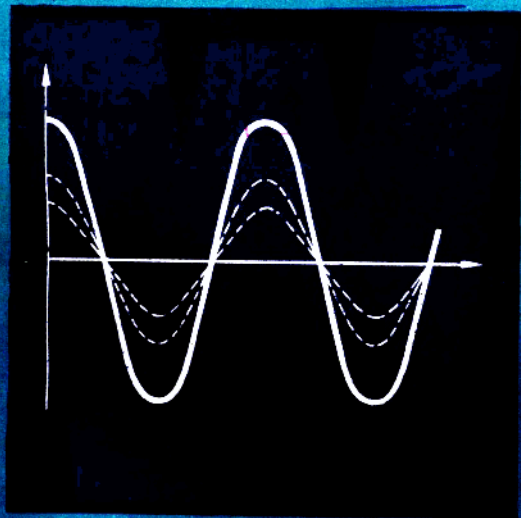
(高等工程专科学校用)

熊秉衡 主编 苏曾燧 主审

下 册

WULIXUE JICHU

WULIXUE JICHU



WULIXUE JICHU

WULIXUE JICHU

广东科技出版社

目 录

第七章 静电场	(145)
§ 7-1 电场强度	(145)
§ 7-2 高斯定理	(151)
§ 7-3 电势	(158)
§ 7-4 静电场中的导体和电介质	(186)
§ 7-5 电容 电场的能量	(172)
讨论课参考题(四)	(177)
第八章 电流与磁场	(179)
§ 8-1 磁感应强度 磁场的高斯定理	(179)
§ 8-2 安培定律	(185)
§ 8-3 毕奥-沙伐尔定律	(190)
§ 8-4 安培环路定律	(195)
§ 8-5 介质中的磁场	(199)
第九章 电磁感应 电磁场	(204)
§ 9-1 电动势 电磁感应的基本定律	(204)
§ 9-2 动生电动势 感生电动势和涡旋电场	(210)
§ 9-3 自感和互感 磁场的能量	(216)
§ 9-4 位移电流 麦克斯韦方程组	(223)
讨论课参考题(五)	(229)
自我检测题(三)	(230)
第十章 波动学基础	(235)
§ 10-1 机械波	(235)
§ 10-2 波的能量	(245)
§ 10-3 波的干涉 驻波	(247)
§ 10-4 电磁波	(252)
第十一章 波动光学	(255)
§ 11-1 光的相干性 获得相干光的方法	(256)
§ 11-2 薄膜干涉	(262)
§ 11-3 光的衍射	(268)
§ 11-4 衍射光栅	(273)
§ 11-5 光的偏振	(277)
讨论课参考题(六)	(281)
自我检测题(四)	(282)
第十二章 波和粒子	(285)
§ 12-1 量子学说的出现	(285)

§ 12-2	物质波 测不准关系	(290)
§ 12-3	薛定谔方程	(293)
§ 12-4	氢原子理论	(296)

第七章 静 电 场

电磁运动也是物质的一种基本运动的形式。电磁运动的规律，不仅是人类深入探索自然的理论武器，而且在工程技术中有着极其广泛的应用。

本章主要研究相对观察者静止的电荷所产生的电场——静电场的基本性质和规律。场是物理学中的一个重要概念。本章研究问题的思路和方法对其它场也适用。本章是学习整个电磁场理论的基础。

学习本章的目的要求是：

1. 掌握电量守恒定律和库仑定律；
2. 理解电场强度的概念，理解高斯定理的内容和它所反映的静电场的特性，会利用场强迭加原理、高斯定理计算一些简单的场强分布；
3. 理解场强环路定理的内容和它所反映的静电场的特性，理解电势和电势差的概念，会利用电势的定义和电势迭加原理计算一些简单的电势分布；
4. 理解电势梯度的概念，理解场强和电势梯度的关系并会利用它从已知电势分布计算场强分布；
5. 懂得导体的静电平衡条件和静电平衡时导体上电荷的分布规律，懂得静电屏蔽原理；
6. 了解电介质的极化现象，认识电介质极化对电场分布的影响，理解电位差矢量的概念和介质中的高斯定理，会利用它们计算介质中的场强分布；
7. 理解电容的概念，掌握电容器电容的计算方法和电容器的储能公式；
8. 掌握电场能量体密度公式。

§ 7-1 电 场 强 度

预习要点

1. 两种电荷、物体带电的实质、电量守恒定律；
2. 真空中库仑定律的内容及其矢量表达式、库仑定律的适用范围；
3. 电场的概念、电场强度的定义；
4. 点电荷的场强计算公式、场强迭加原理及其应用。

电荷 人们对于电的认识最初来自摩擦起电。美国科学家富兰克林(J. Franklin, 1706—1790)总结实验事实指出：自然界只存在正、负两种电荷，并且同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。

任何物质的原子中都有带正电的质子和带负电的电子。质子集中在原子核内，电子在核外绕核运动。每一个质子所带的电量和每一个电子所带的电量的数值相等。在正常状态

下一个原子中的质子数和电子数相等，因此，原子呈电中性，整个宏观物体也呈电中性。如果原子或分子由于外来原因失去或获得电子，就会成为带正电或带负电的离子。如果宏观物体（或其中一部分）由于外来原因失去或获得一定数量的电子，使电子的总数和质子的总数不再相等，就将改变物体的电中性，使物体带正电或带负电。用丝绸摩擦玻璃棒时，玻璃棒失去一些电子而带正电；丝绸获得等量的电子，带与玻璃棒等量的负电。

实验事实表明，使物体带电的过程，都是使物体中原有的正、负电荷分离、转移的过程。一个物体失去一些电子，必有其它物体获得这些电子。因此，可得如下结论：

在一个与外界没有电荷交换的系统内，正、负电荷的代数和在任何物理过程中始终保持不变。

——电量守恒定律

电量守恒定律是物理学中的基本定律之一。

到目前为止的所有实验还表明，电子是自然界具有最小电量 e 的粒子，所有带电体或其它微观粒子的电量都是电子电量的整数倍*。即物体所带的电荷不是连续方式出现的，而是以一个个不连续的量值出现的。这称为电荷的量子化。因此，可将电子的电量 e 作为电量的单位，称为基本电荷。SI中电量的单位是库仑，符号为C。经实验测定 $e=1.602 \times 10^{-19}$ C。宏观物理过程中我们所遇到的电量要比电子的电量大很多。例如在220伏、25瓦的灯泡中，每秒钟就有相当于 7×10^{17} 个电子所带的电量通过灯丝。对于这样大的电量，电荷的量子化是显示不出来的，分析这类现象时，完全可以忽略电荷的量子化。

库仑定律 当带电体的线度比带电体之间的距离小得很多时，可忽略带电体的形状、大小及完全电荷分布情况对它们之间的相互作用力的影响，将带电体抽象为一个具有一定电量的几何点，称为点电荷。1785年法国物理学家库仑（C. A. Coulomb, 1736—1806）通过实验总结出真空中点电荷间相互作用的规律——库仑定律。

在真空中，两个点电荷 q_1 及 q_2 之间的相互作用力的大小和 q_1 与 q_2 的乘积成正比，和它们之间的距离 r 的平方成反比；作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

——库仑定律

如图7-1所示，用 F_{12} 表示 q_2 对 q_1 的作用力， F_{21} 表示 q_1 对 q_2 的作用力， r_{12} 表示由电荷 q_1 指向点电荷 q_2 的单位矢量。则库仑定律可用矢量式表示如下：

$$F_{21} = -F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} r_{12}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} r_{12} \quad (7-1)$$

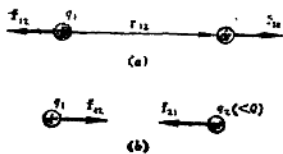


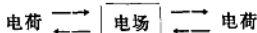
图7-1

*近代物理从理论上预言，有一种电量为 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的基本粒子（称为层子或夸克）存在，并认为中子和质子等粒子由夸克组成。这一理论尚待实验证实。

在 SI 中, $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$, 称为静电力恒量;

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, 称为真空的介电系数, 或称为真空的电容率。

电场 任何电荷都将在自己周围的空间激发电场。电场对处于其中的任何其它带电体有力的作用, 称为电场力。电荷之间的相互作用力是通过电场实现的, 可用图式概括为:



现代科学和实践证明, 场是物质存在的一种形式。电磁场可以脱离电荷和电流独立存在, 具有自己的运动规律。电磁场和实物(即由原子、分子等组成的物质)一样具有能量、动量等属性。不同的是, 电磁场的静止质量为零, 几个电磁场可以同时占据同一空间, 也就是说, 场是可以迭加的。场是物质的一种特殊形态。

相对观察者静止的电荷在其周围空间激发的电场称为静电场。本章只讨论静电场。

电场强度 为了描述电场的力的特性, 引入电场强度的概念。

电场中任何一点处场的特性, 可利用试验正电荷 q_0 进行研究。试验电荷应满足两个条件: (1) 它的电量足够小, 在实验精度范围内不影响原有电场的分布; (2) 它的线度很小, 可以视为点电荷, 具有确定的空间位置。把试验电荷 q_0 放在电场中的不同点时, q_0 所受电场力的大小和方向一般是逐点不同的, 但在电场中一给定点处, q_0 所受电场力的大小和方向则是确定的。如果在电场中某给定点处改变试验电荷 q_0 的量值, q_0 受力的方向仍然不变, 力的大小则会改变。但是, 当 q_0 取各种不同量值时, 所受力的大小 F 与相应的 q_0 的比值 F/q_0 , 却具有确定的量值。总之, 研究的结果表明, 比值 F/q_0 的大小和方向只与试验电荷 q_0 所在场点的位置有关, 而与试验电荷 q_0 无关, 它是场点位置的函数。比值 F/q_0 反映电场的力的特性, 将它定义为电场强度, 简称场强, 用 E 表示, 即:

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (7-2)$$

电场强度是矢量。电场中某点场强的大小等于单位正电荷在该点所受电场力的大小, 场强的方向与正电荷在该点所受电场力的方向相同。

在 SI 中, 场强的单位是牛顿/库仑, 记作 $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ 。

具有电量 q 的电荷在场强为 E 的场点所受电场力为 $F = qE$ 。

点电荷的场强 如图 7-2 所示, 将试验电荷 q_0 引入由点电荷 Q 所激发的电场中的任意点 P 。用 r 表示 Q 与 P 间的距离, r_0 表示由 Q 指向 P 的单位矢量。根据库仑定律, q_0 在 P 点受到的电场力为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} r_0$$

图 7-2

由场强的定义式 (7-2) 可得 P 点处的场强为

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} r_0 \quad (7-3)$$

由于 P 点是任意的,所以式(7-3)所表示的是点电荷电场中任一点的电场强度。由式(7-3)可知点电荷电场中场强 E 的大小与场源电荷所带电量 Q 成正比,与各点离场源电荷的距离 r 的平方成反比,所有 r 相同的各点,场强的大小相同,各点场强的方向沿该点与场源电荷所在点的连线方向, Q 为正时, E 背离 Q ; Q 为负时, E 指向 Q 。可见,点电荷的场是一个球对称的非均匀电场。

场强迭加原理 在 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 共同激发的电场中的任意点 P ,根据力的迭加原理,试验电荷 q_0 所受电场力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

式中 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ 为 q_1, q_2, \dots, q_n 单独存在时 q_0 所受的力。将上式除以 q_0 得:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

式中 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 分别代表 q_1, q_2, \dots, q_n 单独存在时 P 点的场强,而 \mathbf{E} 代表它们同时存在时该点的总场强。由此得到如下结论:

点电荷系所激发的电场中某点的场强等于各电荷单独存在时各自激发的电场在该点的场强的矢量和。即

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_{i0} \quad (7-4)$$

——场强迭加原理(矢量迭加)

任意带电体电场的场强 任意带电体的电荷分布从宏观看都是连续的。根据不同情况,有时把电荷看成在一定体积内连续分布(体分布),有时把电荷看成在一定面积上连续分布(面分布),有时把电荷看成在一定曲线上连续分布(线分布)。相应地可引入电荷的体密度 ρ 、面密度 σ 和线密度 λ ;

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (7-5)$$

式中 $\Delta V, \Delta S$ 和 Δl 是将带电体分割得到的小体积元、面元和线元, Δq 为 $\Delta V, \Delta S$ 和 Δl 中的电量。当 $\Delta V, \Delta S$ 和 Δl 取得无限小时,相应地电荷元 dq 可视为点电荷,整个带电体可视为由无穷多个点电荷 dq 组成的点电荷系。这样就可以利用场强迭加原理来计算任意带电体电场的场强,不过应将式(7-4)中的求和换成积分。计算步骤如下:

1. 分割连续带电体取电荷元 $dq = \rho dV$ (体分布), $dq = \sigma ds$ (面分布), $dq = \lambda dl$ (线分布)。

2. 写出电荷元 dq 在所研究的场点 P 产生的场强 $d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_e$ 。式中 r 为 dq 到 P 的距离, \mathbf{r}_e 为由 dq 指向点 P 的单位矢量。

3. 根据场强迭加原理,

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (7-6)$$

注意, 式(7-6)为矢量积分. 只有当带电体上所有的电荷元 dq 在所研究的场点 P 产生的场强 dE 的方向都相同时, 才有 $E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2}$. 如果不同电荷元 dq 在点 P 产生的 dE 方向不同, 则 $E \neq \int dE$; 这时应根据所研究的问题的特性 (特别是对称性分析), 适当选择坐标轴的方向, 将 dE 沿坐标轴分解为 dE_x 、 dE_y 和 dE_z , 先计算出 E 的三个坐标分量 E_x 、 E_y 和 E_z , (积分区域由电荷的分布范围决定), 再由矢量合成求得 E . 即

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x & E_y &= \int dE_y & E_z &= \int dE_z \\ E &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \\ E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \end{aligned} \quad (7-6a)$$

例7-1 两个大小相等的正负电荷 $+q$ 和 $-q$, 当两者之间的距离 l 较所考察的场点 P 到它们的距离小得很多时, 这个电荷系统就称为电偶极子, 如图7-3所示. 求在 l 的中垂面上距 l 的中点 O 为 x 的点 P 的场强.

解 建立如图7-3所示的坐标系 OXY , 根据场强迭加原理, P 点的场强:

$$E = E_+ + E_-$$

由对称性知, E_+ 和 E_- 在 X 轴上的分量大小相等, 方向相反, 在 Y 轴上的分量大小相等, 方向一致 (都沿 Y 轴负向). 故

$$E_x = E_{+x} + E_{-x} = 0$$

$$E_y = E_{+y} + E_{-y} = 2E_{+y} = -2E_+ \cos\theta$$

由图可见 $E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + l^2/4)^{3/2}}$, $\cos\theta = \frac{l}{2(x^2 + l^2/4)^{1/2}}$

故 E 的大小为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = |E_y| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(x^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

E 的方向沿 Y 轴的负向.

对偶极子, $r \gg l$, 因此有

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{x^3}$$

连接 $+q$ 和 $-q$ 两个电荷的直线, 称为电偶极子的轴线. 规定从 $-q$ 到 $+q$ 的矢径 l 的方向为轴线的正方向, 定义由量 q 与矢径 l 的乘积 $p = ql$ 为电偶极矩, 则电偶极子轴线上中垂面上距轴中点 O 为 x 的点的场强公式为

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$$

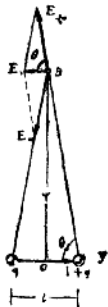


图7-3

例 7-2 求均匀带电细棒中垂面上的场强分布, 设棒长为 $2l$, 总电量为 q (设 $q > 0$)。

解 由于细棒具有轴对称性, 在包含细棒的所有平面内电场的分布情况都相同, 我们只需研究纸面上的电场分布。取细棒中点 O 为原点, 建立坐标系 Oxz 如图 7-4 所示。

细棒均匀带电, 电荷的线密度 $\lambda = \frac{q}{2l} = \text{const}$ 。细棒分割成许多对相等的线元 dz 和 dz' , 相应的电荷元 $dq = dq' = \lambda dz$ 。它们的分布对于中垂线对称, 它们在中垂线上任一点 P 产生的场强 dE 和 dE' 也对中垂线对称。因此, 所有 dE 的 z 分量的总和为零, 即 $E_z = 0$, 合场强 E 的方向应沿 x 轴方向, 且 $E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} = E_x$, 因此, 只需求 E_x 。

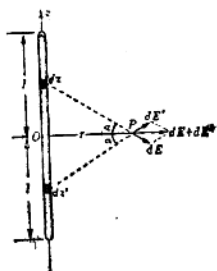


图 7-4

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{a^2 + z^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{a^2 + z^2}$$

$$dE_x = dE \cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{a^2 + z^2} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{adz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E = E_x = \int_B dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{qdz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\epsilon_0 \lambda a (a^2 + l^2)^{-1/2}$$

当细棒为无限长时, 任何垂直于它的平面都可看成是中垂面。所以, 无限长带电细棒周围任何地方的场强都与棒垂直, 并且由于 $l \rightarrow \infty$, 有 $E \approx \lambda / 2\pi\epsilon_0 a$ 。即 E 与场点到细棒的距离 a 成反比。对于有限长细棒来说, 只有在靠近其中部附近的区域 ($a \ll l$) 这一结果近似成立。

由例题 1 和例题 2 看到, 利用场强迭加原理计算场强时, 注意电荷及电势分布的对称性分析是很重要的。它往往能使我们立即看出合成矢量的某些分量等于零, 从而判断出合成矢量的方向, 使计算大大简化。

例 7-3 如图 7-5 所示, 计算电偶极子在均匀电场 E 中所受的力矩。

解 如图 7-5 所示, $F_+ = F_- = qE$, 它们对于 l 的中点 O 的力臂都是 $l \sin\theta/2$ 。对于中点 O , 它们的力矩的方向也相同, 总力矩为

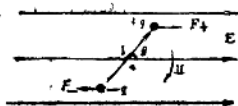


图 7-5

$$M = (F_+) \frac{l}{2} \sin\theta + (F_-) \frac{l}{2} \sin\theta = qlE \sin\theta$$

用矢量式表示, 上式可写成

$$M = q\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

当 \mathbf{p} 与 \mathbf{E} 垂直时, 力矩 M 最大; 当 \mathbf{p} 与 \mathbf{E} 平行或者反向平行时, 力矩 $M = 0$ 。力矩的作用, 总是使电偶极子的电偶极矩 \mathbf{p} 转向场强 \mathbf{E} 的方向。

习 题

7-1 由库仑定律 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $F \rightarrow \infty$, 这样推理正确吗? 为什么?

7-2 根据经典理论, 在正常状态下, 氢原子中电子绕核作圆周运动, 其轨道半径为 $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$. 已知质子带电 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 求原子核 (即质子) 在电子所在处产生的场强.

7-3 在坐标原点及 $(\sqrt{3}, 0)$ 点分别放置电量 $Q_1 = -2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 及 $Q_2 = 1.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 的点电荷, 求点 $P(\sqrt{3}, -1)$ 处的场强 (坐标单位为 m).

7-4 一根玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形, 其上均匀分布电荷 q . 求半圆中心 O 点的场强.

7-5 线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电直线, 分别弯成如图 7-6 所示的两种形状. 若圆弧半径为 R , 求图中 O 点的场强.

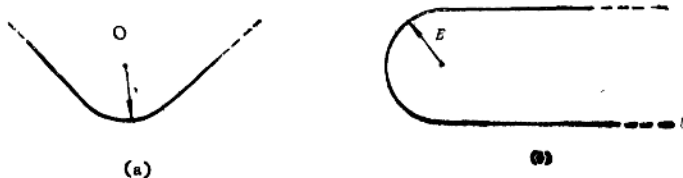


图 7-6

7-6 一均匀带电为 q 半径为 R 的圆环, (1) 求轴线上离环心为 x 处的场强 E , (2) 画出 $E-x$ 曲线; (3) 轴线上什么地方场强最大? 它的数值是多少?

§ 7-2 高斯定理

预习要点

1. 电场中场强分布的形象描述——电力线及其特点;
2. 电场强度通量的概念及计算公式;
3. 高斯定理的内容、数学表达式及它在描述静电场性质上的意义;
4. 应用高斯定理计算某些特殊分布电荷的场强的基本方法.

电力线 为了形象地描述电场中场强的分布情况, 我们可作出一些假想的线——电力线, 并对电力线作出如下规定:

1. 电力线上每一点的切线方向和该点场强E的方向一致。因此，电力线的方向就可反映场强方向的分布情况。

2. 通过电场中某点垂直于该点场强方向单位面积的电力线数目——**电力线密度**，等于该点处场强E的大小。设通过电场中某点垂直于该点场强方向的无限小面元 dS_{\perp} 的电力线数为 $d\Phi_e$ ，则有

$$E = \text{电力线密度} = \frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}}$$

这样，电力线稀疏处表示场强小，电力线稠密处表示场强大。因此，电力线的疏密就可反映场强大小的分布情况。

电力线只是形象描述场强分布的一种手段，它实际上是不存在的，但借助实验可将电力线显示出来。例如在水平玻璃板上撒些细小的石膏晶粒，或在油上浮些草籽，放在电场中，它们就会沿电力线排列起来。图7-7是根据实验显示结果和关于电力线的规定作出的几种常见的带电体系的电力线图。从这些电力线图可以看出电力线有下列基本性质：

1. 电力线起自正电荷（或来自无穷远处），止于负电荷（或伸向无穷远处），不会在没有电荷的地方中断；电力线也不会形成闭合线。
2. 若带电体系中正负电荷一样多，则由正电荷出发的全部电力线都集中到负电荷上去。
3. 在没有点电荷的空间里，任何两条电力线不会相交。

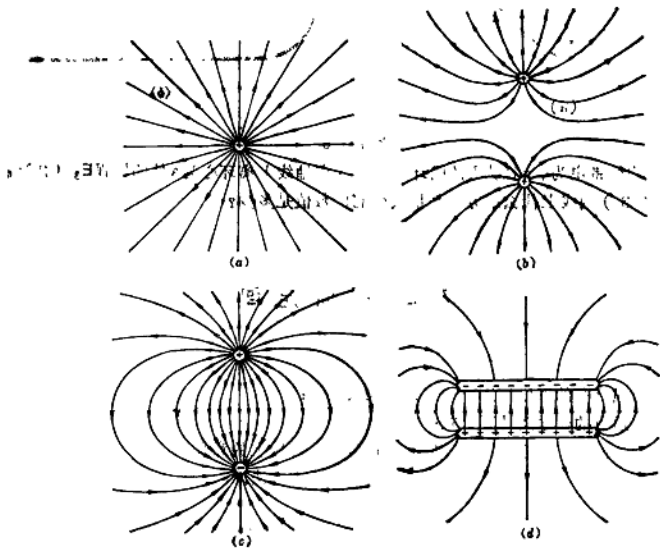


图7-7

电力线的这些性质反映了静电场的特征。

电场强度通量 通过电场中任意一个曲面的电力线数目称为这个曲面的**电场强度通量**，简称为**电通量**或**E通量**，用 Φ_e 表示。

根据电力线密度的定义，在匀强电场 E 中，若所取平面 S 与场强方向垂直，如图7-8(a)所示，则通过该平面的E通量 $\Phi_e = ES$ 。若所取平面与 E 不垂直，设平面法线单位矢量 n 与 E 的夹角为 θ ，如图7-8(b)所示，则通过平面的E通量为 $\Phi = ES \cos\theta$ 。由于 n 与 E 的夹角 θ 可以是锐角，也可以是钝角，所以通过 S 的E通量可正可负。当 θ 为锐角时， $\Phi_e > 0$ ； θ 为钝角时， $\Phi_e < 0$ ， $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $\Phi_e = 0$ 。

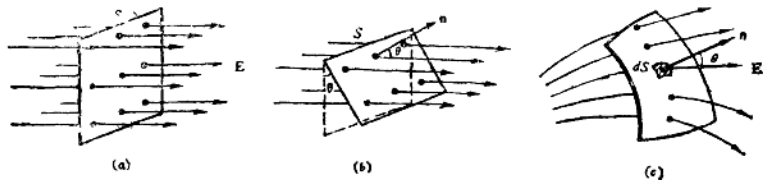


图 7-8

对非匀强电场中的任意曲面 S ，如图7-8(c)所示，计算E通量，应先在曲面 S 上取无限小面元矢量 $dS = dS n$ ，通过 dS 的元通量为

$$d\Phi_e = E \cos\theta dS = E \cdot dS$$

通过整个曲面 S 的E通量为：

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S E \cdot dS = \int_S E \cos\theta dS \quad (7-7)$$

式中代表对整个曲面 S 取积分。

若曲面 S 是闭合曲面，通过它的电通量记为

$$\Phi_e = \oint_S E \cdot dS = \oint_S E \cos\theta dS$$

对给定的闭合曲面来说， Φ 的正负取决于面元法线单位矢量 n 的方向。我们规定：对于**闭合曲面**，总是取自内向外方向为面元法线单位矢量 n 的正向。因此，有电力线穿出闭合曲面时，E通量为正；有电力线穿入闭合曲面时，E通量为负；如果穿出和穿入闭合曲面的电力线数相等，则E通量 $\Phi_e = 0$ 。

高斯定理 先将真空中的高斯 (C. F. Gauss 1777-1855) 定理的内容表述如下：

通过任一闭合曲面 S 的E通量，等于该曲面所包围的所有电荷电量的代数和 $\sum q_i$ 除以 ϵ_0 ，与闭合曲面外的电荷无关。其数学表达式为

$$\Phi_e = \oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (7-8)$$

习惯上将式(7-8)中取积分的闭合曲面 S 称为高斯面。式(7-8)中的 E 应该是闭合曲面内外所有电荷在闭合曲面上产生的场强的矢量和。

高斯定理可以由库仑定律和场强迭加原理导出。本书只通过对几种特殊情况的分析归纳加以说明。

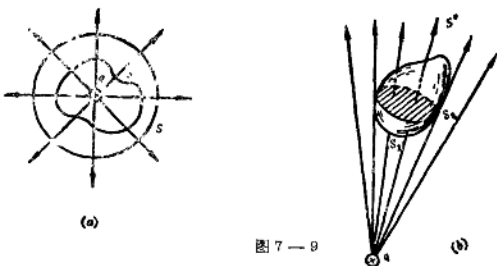


图 7-9

1. 通过包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S 的电通量为 q/ϵ_0 。

在点电荷 q 激发的电场中以 q 为球心, r 为半径作球面 S , 如图7-9(a)所示。由点电荷场强公式知, 球面 S 上各点的场强大小都相等: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, 各点场强的方向都沿相应的半径向外, 处处与球面正交, 即球面上任一面积元 dS 的法线单位矢量 n 与 E 的夹角 $\theta = 0$ 。因此, 通过 dS 的 E 通量为

$$d\Phi_e = E \cdot dS = E dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$

通过整个闭合球面 S 的 E 通量为

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7-8a)$$

注意, 上式所得结果与所取球面的半径 r 无关。这就是说, 对以 q 为中心的任意大小的闭合球面来说, 通过球面的 E 通量的量值都为 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 。

仍如图7-9(a)所示, S' 为包围点电荷 q 的任意曲面, 在 S' 与球面 S 之间无其它电荷时, 由于电力线不会在没有电荷的地方中断, 所以通过 S' 面的电力线必定全部通过球面 S , 即通过曲面 S' 和球面 S 的电力线数目相等。因此, 通过包围点电荷 q 的任意曲面 S' 的 E 通量也为 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 。

2. 通过不包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S 的 E 通量必为零。

如图7-9(b)所示, 点电荷 q 在闭合曲面 S'' 外面时, 穿入该曲面的电力线数与穿出该曲面的电力线数相等。因此, 通过整个曲面的 E 通量为零。

3. 若闭合曲面 S 内包围有 n 个点电荷时, 根据场强迭加原理和式(7-8a), 读者自己

应能证明通过 S 面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

根据高斯定理,任一闭合曲面内包围的净电荷不为零而有多余的正电荷时, $\sum q_i > 0$, 则 $\Phi_e > 0$, 必有电力线从此面穿出; 包围有多余的负电荷时, $\sum q_i < 0$, 则 $\Phi_e < 0$, 必有电力线从此面穿入。由于此闭合曲面可任意缩小直至趋于零, 因此, 电力线必起自正电荷, 称为场的源头; 电力线又必止于负电荷, 称为场的尾闾。电力线不会在没有电荷的地方中断, 静电场是一种有源场。

由高斯定理还可知, 从每个正电荷 q 将发出 q/ϵ_0 根电力线, 将有 q/ϵ_0 根电力线终止于负电荷 $-q$ 。因此, 在带电体系中如有等量的正负电荷, 电力线就从正电荷出发到负电荷终止; 若正电荷多于负电荷, 或根本没有负电荷, 则从多余正电荷发出的电力线只能延伸到无穷远; 若负电荷多于正电荷, 或根本没有正电荷, 则终止于多余负电荷的电力线只能来自无穷远。

可见, 高斯定理以精确的数学形式描述了电力线的一些基本性质, 从而揭示了静电场的场强分布规律, 反映了静电场的一个重要特性(有源场), 高斯定理是静电场的基本规律之一。

应用高斯定理计算场强 高斯定理建立了静电场中通过任一闭合曲面的 \mathbf{E} 通量与该曲面所包围的电量之间的数量关系, 使我们有可能利用它来计算场强。但是, 由于高斯定理给出的只是通过某一闭合曲面之 \mathbf{E} 通量 Φ_e , 它是 \mathbf{E} 矢量在整个闭合曲面 S 上的积分, 而不是给出场强 \mathbf{E} 。所以, 应用高斯定理计算场强, 只有选择合适的高斯面, 使通过该面的电通量积分式 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 可以写成包含有电场强度 E 的代数式, 才有可能。这往往要求电场具有某些特殊的对称性, 应用高斯定理计算场强的基本步骤是:

1. 分析给定问题中的场强分布是否具有某种特殊对称性(例如球对称、轴对称或面对称等), 明确 \mathbf{E} 的方向分布, 判断能否应用高斯定理求解, 即能否找到合适的高斯面 S 使积分 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 易于算出(通常要求 \mathbf{E} 有可能提到积分号外);

2. 如果可以利用高斯定理求解, 则通过待求场强的场点作一恰当的高斯面。所谓恰当就是应使此高斯面各部分的法线 \mathbf{n} 方向与 \mathbf{E} 成垂直(这一部分的 $\Phi_e = 0$)或平行, 并且应使得法线 \mathbf{n} 方向与 \mathbf{E} 平行的这部分高斯面上的各点 \mathbf{E} 的大小相等(使 \mathbf{E} 有可能从积分号内提出);

3. 计算积分 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, 求出它的含有 E 的代数式;

4. 算出所作高斯面内所包围的带电系统的电量的代数和 $\sum q_i$;

5. 由高斯定理 $\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$ 即可求出 \mathbf{E} 。

例 7-4 求均匀带正电球壳内外的场强, 设球壳带电量为 q 、半径为 R 。

解 如图 7-10 所示, 考察任一场点 P 。对于带电球壳上的任一面无 dS 都存在另一面无 dS' , 二者关于 OP 联线对称, 它们在 P 点产生的无场强 $d\mathbf{E}$ 和 $d\mathbf{E}'$ 也关于 OP 对称。因此,

$dE + dE'$ 必定沿 OP 连线。整个带电球壳都可以分割为类似的对称面元, P 点的总场强 E 也一定沿 OP 连线, 即沿球壳半径向外; 并且在半径为 $r = OP$ 的球面上各点 E 的大小必定相等。可见, 由于电荷均匀分布在球壳上, 此带电体系激发的电场场强分布也具有球对称性。这种对称性对球壳内外的场点都是适用的。

根据场强分布的球对称性, 取高斯面为通过 P 点的与球壳同心的球面, 通过此高斯面的 E 通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint dS = 4\pi r^2 E$$

$$\text{当 } r > R \text{ 时, } \sum q_i = q \text{ 则 } 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ 或 } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0$$

(\mathbf{r}_0 为球面径向单位矢量)

这表明: 均匀带电球壳在外部空间产生的电场, 与其上电荷全部集中在球心的点电荷产生的电场一样。

$$\text{当 } r < R \text{ 时, } \sum_{(S_N)} q_i = 0, \text{ 则 } 4\pi r^2 E = 0, \therefore E = 0$$

这表明: 均匀带电球壳内部空间的场强处处为零。均匀带电球壳内外的 $E-r$ 关系曲线如图 7-10 所示。

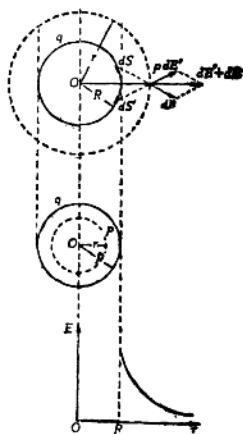


图 7-10

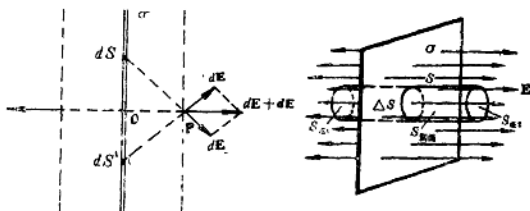


图 7-11

例 7-5 求均匀带正电的无限大平面薄板的场强, 设电荷的面密度为 σ 。

解 如图 7-11 所示, 考察任一场点 P , OP 连线与带电平板垂直。由于带电平板是无限大的, 所以可将带电平板分割为一对对关于 OP 联线对称的面元, 它们在 P 点产生的场强也关于 OP 对称。基于这种对称性知, 两侧与平板等距离的平行平面上的点的场强大小相等, 方向处处与平板垂直, 并指向两侧。我们取图示中的圆柱表面作为高斯面, 其侧面与带电平板垂直, 两底面与带电平板平行并与带电平板等距离, 两底面积都为 ΔS , 圆柱侧面上面元的法线 \mathbf{n} 都与 \mathbf{E} 垂直, 因此 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$; 两底面上面元的法线 \mathbf{n} 都与 \mathbf{E} 平行, 因此 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$ 。

通过此圆柱高斯面的E通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + 2 \int_{S_{\text{底}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{S_{\text{底}}} E dS \\ &= 2E \int_{S_{\text{底}}} dS = 2E \Delta S\end{aligned}$$

此圆柱高斯面所包围的带电平板部分的电量 $q = \sigma \Delta S$, 根据高斯定理有 $2E \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0$, 故得无限大带电平面薄板外任一点处的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

上式表明, 无限大带电平板两侧都是匀强电场。这一结论对均匀带负电的无限大带电平面薄板也适用, 不过场强方向是从两侧指向平板。

利用上述结果, 读者自己应能证明: 带等量异号电荷的一对无限大平行平面薄板之间的场强为:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (7-9)$$

外部的场强则为零。这一结果将经常用到。

习 题

7-7 一点电荷 q 处在球形高斯面的中心, 试问在下列情况中穿过此高斯面的电通量是否会发生变化:

- (1) 将第二个点电荷置于高斯球面外附近;
- (2) 将第二个点电荷置于高斯球面内;
- (3) 将原来的点电荷移离高斯球面的中心, 但仍在高斯面内。

7-8 对于两个相距较近均匀带电球体所产生的电场, 能否用高斯定理求空间场强的分布? 如果这两个球体其中一个带电的导体球, 另一个是不带电的导体球, 又能否用高斯定理求空间场强分布? 为什么?

7-9 通过一个闭合曲面的E通量为零, 是否在此闭合曲面上的场强处处为零? 若通过一个闭合曲面的E通量不为零, 是否在此闭合曲面上的场强一定处处不为零? 请说理由。

7-10 两个均匀的带电同心球面, 内球面带有电量 q_1 , 外球面带有电量 q_2 , 两球面之间的区域中距球心为 r 的点的场强为 $\frac{3000}{r^2} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, 方向沿球面半径指向球心, 外球面之外距球心为 r 的点的场强为 $\frac{2000}{r^2} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, 方向沿球面半径向外。试求 q_1 和 q_2 各等于多少?

7-11 两无限长同轴圆柱面, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$) 带有等量异号电荷, 每单位长度为 λ , 试分别求出: (1) $r < R_1$; (2) $r > R_2$; (3) $R_1 < r < R_2$ 三区域中高轴线为 r 处的电场强度。

7-12 有一块厚为 b 的非金属大平板, 电荷均匀分布在整个体积中, 电荷体密度为 ρ 。试

证明高板中心平面距离为 X 处 ($X \ll \frac{b}{2}$) 的场强等于 $\frac{\rho}{\epsilon_0} X$ 。

7-13 一半径为 R 的均匀带电球体，其体密度 $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ ， ρ_0 为一常数， r 为空间点至球心的距离。试求球内、球外场强的分布。

7-14 用高斯定理求均匀带正电的无限长细棒外的场强分布，设棒上电荷的线密度为 λ 。

§ 7-3 电 势

预习要点

1. 电场力做功的特点、场强环路定理的内容、数学表达式及它所反映的静电场的特性；
2. 电势和电势差的定义、点电荷电场中的电势公式、电势迭加原理及其应用；
3. 等势面的意义、梯度的概念、场强与电势梯度的关系。

场强环路定理 电荷受电场力作用运动时电场力要作功，电场力作功具有什么特点？

如图 7-12 所示，设有一点电荷 q 位于 O 点，一试验电荷 q_0 在 q 所激发的电场中经任意曲线 acb 由 a 点运动到 b 点，电场力所作的功为

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_a^b E \cos \alpha dl$$

式中 α 为 \mathbf{E} 与位移元 $d\mathbf{l}$ 间的夹角。用 r 表示 q_0 运动路径上任一点 C 与 O 点的距离，由图可见 $dl \cos \alpha = dr$ 。又

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad \text{则}$$

$$W_{ab} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

式中 r_a 、 r_b 分别为 q_0 运动路径起点 a 和终点 b 与 O 点的距离。上式表明，单个点电荷的电场力对试验电荷所作的功与路径无关，只与试验电荷所带电量以及路径的起点和终点的位置有关。

任意带电体系产生的电场都可视为点电荷组的合电场。根据场强迭加原理和合力功的计算方法，试验电荷在电场中移动时，合电场力对试验电荷所作的功等于各个点电荷的电场力所作的功的代数和。由于每一个点电荷的电场力所作的功与路径无关，所以合电场力的功也与路径无关。因此，可得如下结论：

试验电荷在任何静电场中移动时，电场力所作的功，仅与此试验电荷电量的大小以及路径的起点和终点的位置有关，而与路径无关。这表明静电场力是保守力。

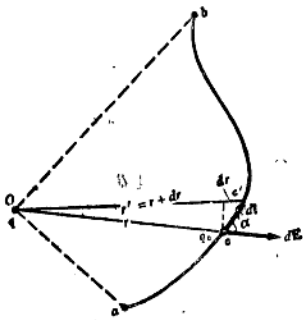


图 7-12