

俄罗斯数学
教材选译

连续介质力学

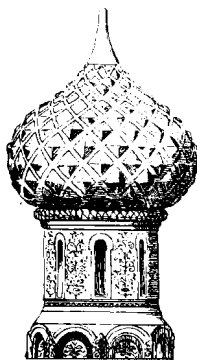
(第二卷) (第6版)

□ Л. И. 谢多夫 著

□ 李植 译



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

连续介质力学

(第二卷) (第6版)

□ Л. И. 谢多夫 著

□ 李植 译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2007-3074 号

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. Т. 2

Л. И. Седов

Лань, 2004

Originally published in Russian under the title

Continuum Mechanics. Vol. 2

Copyright © 2004 by L. I. Sedov

All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学. 第2卷: 第6版 / (俄罗斯)谢多夫
著; 李植译. —北京: 高等教育出版社, 2009.7

ISBN 978-7-04-022633-1

I. 连… II. ①谢… ②李… III. 连续介质力学—高等
学校—教材 IV. O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 110365 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 李 鹏 封面设计 王凌波
责任绘图 黄建英 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京民族印务有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2009年7月第1版
印 张	28.5	印 次	2009年7月第1次印刷
字 数	560 000	定 价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 22633-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为

主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005年10月

译者序

本书作者 Л. И. 谢多夫的名字对国内许多读者来说并不陌生, 其代表作《力学中的相似方法与量纲理论》的中译本早在 1982 年就由科学出版社出版. 现在, 他的另外一本享誉世界的著作《连续介质力学》(共 2 卷) 的中译本由高等教育出版社出版, 这对相关专业的学生、教师 and 研究人员来说无疑是一件喜事.

作为俄罗斯科学院院士和莫斯科大学流体力学学派的领袖, Л. И. 谢多夫在大量从事科学研究和社会活动的同时仍然极其重视教育工作, 在他的学生中有 4 位院士、50 多位博士和 130 多位副博士¹⁾. Л. И. 谢多夫曾经多次表示, 在所获得的所有职位和称号中, 他最看重莫斯科大学教授的头衔, 所以在他的西装上总是别着一枚莫斯科大学授予的荣誉徽章. 这本书就是 Л. И. 谢多夫多年来教学工作的结晶. 正是在他的推动下, 从 20 世纪 60 年代开始, 连续介质力学成为莫斯科大学力学数学系力学专业和数学专业的必修课, 整个课程体系也相应发生了根本变革, 逐渐形成了以理论力学、连续介质力学和控制力学这 3 门必修课为核心的力学专业新教学计划并沿用至今. 实际教学效果表明, 这样的新教学计划反映了学科的发展趋势, 对培养掌握现代化知识体系的高级人才功不可没.

本书是专门为力学专业大学生编写的教材, 第一卷重点讲述如何建立连续介质的数学模型, 第二卷则把这种思路融汇到流体力学、弹性力学、塑性力学等连续介质力学分支. 作者是建立连续介质数学模型的大家, 他的经验和思路很好地融合在全书的内容里. 全书材料的取舍和叙述方式都经过作者的精心设计. 在译者看来, 书中独具特色的部分一是对张量的介绍和自然而严谨的处理方法, 二是对连续介质热力

¹⁾ 俄罗斯的副博士 (кандидат наук) 学位相当于我们通常所说的博士 (Ph. D.) 学位, 而俄罗斯的博士 (доктор наук) 学位则是更高一级的学位, 一般要求学位获得者在相关领域具有非同寻常的贡献.

学的简要介绍, 三是对问题提法的全面论述, 四是用热力学方法建立连续介质模型. 此外, 读者可以看到, 书中有大段的文字 (而不是公式) 详细地从各个角度甚至从哲学层面上论述建立数学模型的本质、意义、假设和方法, 这也是此书明显有别于其他教材的地方. 因此, 把这本书介绍到中国来具有重要意义.

在第二卷中, 流体力学占相当多的篇幅, 内容上也相对完整, 基本覆盖了经典流体力学的主要概念和方法, 并且包括从理论分析到实际应用的大量实例. 因此, 本书完全可以当做流体力学的教学参考书. 值得一提的是, 作者详细论述了理想流体模型的实际意义. 相对而言, 本书对弹性力学、塑性力学的介绍不够全面, 但相关内容仍然独具特色, 尤其是利用热力学方法建立弹塑性力学本构关系的部分相当精彩, 这样的论述方法在其他书中很难见到.

在 20 世纪 90 年代在莫斯科大学力学数学系留学期间, 译者作为一名力学专业的本科生完整地上过由 E. B. 洛马金教授主讲的连续介质力学课程. 课程持续 3 个学期, 主要内容与 Л. И. 谢多夫的《连续介质力学》基本一致. 译者至今还清晰地记得当时上课记笔记、课后仔细阅读这本教材并与笔记内容进行对照的情景. 初次学习连续介质力学这样的课程无疑有一定困难, 但 Л. И. 谢多夫的教材对译者很有帮助. 当时的感觉是, 这门课和教材都很难, 但是经过仔细思考可以接受和掌握. 译者在后来的研究和教学工作中又多次阅读过这本书的相应章节, 例如在北京大学为力学专业学生讲授流体力学时, 尤其是在介绍张量和建立流体模型时主要参考了这本书的讲法, 取得了很好的教学效果. 这本书的可贵之处在于, 对学生而言, 书的内容丰富而经典, 有一定难度但又不是高不可攀; 对教师而言, 这是一本可以常置案头的参考书. 这就是此书多年来能够不断再版并被译为多种文字的根本原因, 译者相信其中文版同样能够在很长一段时间内使读者受益.

译者在留学期间与 Л. И. 谢多夫院士建立了很好的私人关系. Л. И. 谢多夫曾经多次表示, 虽然他的《连续介质力学》已经被翻译为英文、法文、日文和越南文, 但一直没有中文版是一件非常遗憾的事情, 因为中国是一个大国, 有众多的科技人员和大学生. 他相信这本书对中国科技界是有用的参考书, 因此, 他委托译者来翻译《连续介质力学》. 1999 年秋天, 在译者回国后不久, Л. И. 谢多夫院士以 92 岁高龄辞世. 惊闻噩耗之余, 译者发誓要精心完成他的遗愿. 在一些准备工作之后, 从 2002 年起, 译者开始认真地进行翻译工作. 历经多年辛苦工作, 中译本第一卷在 2007 年出版, 第二卷在 2009 年出版, 希望能够得到广大读者的认可. 2007 年是 Л. И. 谢多夫的百年寿辰, 2009 年是他逝世十周年, 谨以此书纪念这位为科学和教育事业做出重大贡献的科学家!

本书涉及物理、数学等领域的大量专业术语, 译者尽可能使术语的翻译规范化, 但也遇到了大量困难. 困难之一是中文术语本身就不统一, 在不同领域有不同的习惯和用法. 译者主要使用全国自然科学名词审定委员会公布的《力学名词 1993》、《物理学名词 1996》和《数学名词 1993》(以下统一简称为《名词》) 和相应国家标准作

为翻译标准,同时还参考了科学出版社出版的《物理学词典》等工具书和词典,以及其他一些俄文书的中译本。不过,考虑到学科的特点和译者所掌握的一些文献中的使用习惯,仍有个别名词没有按照国家标准翻译,例如在张量分析中广为使用的协变和逆变(《名词》中为共变和反变),量纲分析中的无量纲量(在国家标准中为量纲一的量),等等。原书使用的个别术语已经过时,译者一般依照原文翻译,但在该术语第一次出现时在脚注中注明其标准名称,例如热力学中的内能现在改为热力学能;少量没有按照原文直接翻译的名词则在脚注中加以说明。此外,激波和冲击波(击波)都是表示突跃压缩的术语,译文采用前者,因为这是流体力学中更为常见的用法,尽管俄文 ударная волна 从字面上直接翻译就是冲击波。书后的人名译名对照表是由译者添加的。

中文版完全保持了原书的排版风格,尤其是小标题的样式与原书一致,这被认为是原书的一个有益于阅读的重要特点。除了改正一些印刷错误和明显的疏漏,译者还增加了一些注释并重新制作了索引。为了便于读者查阅书中引用的俄文文献,译者尽可能找到相应中文版或英文版并将其列在俄文文献之后。由于原书历经多次修订和增补,部分公式的编号出现多种形式(例如用带撇号的数字或用字母表示),所以在中文版中按照形式统一的原则对正文中的公式编号进行了调整,并且去掉了那些不被前后文引用的编号。此外,译者还对个别表示同一个量的不同符号进行了统一化处理。总之,上述变化使中文版更加规范,也使读者更加容易掌握本书的内容。

译者非常感谢莫斯科大学力学数学系的 М. Э. 埃格利特教授的大量无私帮助,她不但不厌其烦地回答了关于本书的方方面面的问题(包括俄文理解的问题),还专门写了中文版序。М. Э. 埃格利特教授是 Л. И. 谢多夫院士的学生,是连续介质力学领域的著名学者,长期讲授连续介质力学、流体力学等课程,曾经多次参加本书俄文版的编辑和修订工作。由她撰写的序言特别有助于读者认识本书的意义。

译者的导师 Н. Р. 西布加图林教授在生前一直关心本书的翻译工作并提出了一些具体建议,他的儿子 И. Н. 西布加图林博士为本书版权问题的解决提供了大量帮助,译者在此对 Н. Р. 西布加图林教授表示深深的怀念,对 И. Н. 西布加图林博士表示感谢。

在第二卷的翻译过程中,译者继续得到了北京大学力学系的许多同事和学生的热心帮助。陈国谦教授一直支持和鼓励译者的翻译工作。黄克服副教授特别支持为力学系本科生开设连续介质力学课程的计划,他阅读了第九章和第十章的部分译稿并提出了一些有益的建议。吴介之教授阅读了第八章中与涡旋运动有关的内容,纠正了个别术语的错误译法并帮助译者补充了少量译注。励争副教授耐心回答了译者关于材料力学的一些问题,甚至亲自做实验进行验证。力学系的本科生谢玉阅读了第八章全部译稿和第九章部分译稿并提出了大量有助于完善文字表述的建议。博士研究生李厚国帮助录入了第九章的数学公式。译者对他们深表感谢。

这里要特别感谢苏卫东副教授的无私帮助。在全书两卷的翻译过程中,译者时

常与他讨论相关问题,每次都获益匪浅.他阅读了大部分译稿,对译文提出了大量极有价值的修改建议,对部分疑难问题提出了独到的见解,还亲自为第八章撰写了部分译注.

译者还要感谢高等教育出版社的帮助,感谢相关编辑的支持和宽容.编辑赵天夫和李鹏仔细审阅了第二卷全部译文并提出了大量恰当的修改建议,编审张小萍女士对最终的译稿提出了一些有价值的建议,他们在最大程度上完善了译文的质量.

最后,译者恳请广大读者对译文中不够准确甚至错误的地方予以指正.

李植

北京, 2009年7月

zhili@pku.edu.cn

中文版序

近年来, 由于计算机的普及和数值方法的广泛发展, 如何在数学上提出问题成为头等重要的事情, 这要求我们能够用数学方法描述所研究的现象, 即建立其数学模型. 经典的连续介质模型和它们所能够描述的效应是在流体力学、水力学、弹性力学、塑性力学、蠕变力学、材料力学等连续介质力学分支中进行研究的. 然而, 实际应用越来越经常要求力学领域的工程和研究人員能够建立复杂连续介质的新模型, 能够研究复杂的物理和化学过程, 能够提出并解决关于各种介质在新条件下的物理行为的新问题. 因此, 我们不仅要理解连续介质力学中的个别已知的具体模型和规律, 而且要理解连续介质力学基本概念和定律本身的意义. 正是由于上述原因, 连续介质力学才从一系列单独的专门学科中独立出来, 而连续介质力学课程也被许多大学列为必修课程.

本书是连续介质力学领域的杰出学者、俄罗斯科学院院士、国立莫斯科大学教授 Л. И. 谢多夫所著连续介质力学教材的中译本, 该教材在俄国得到了广泛使用. Л. И. 谢多夫发表了 200 多篇学术论文, 撰写了多部专著和教材, 其中最为著名就是本书和《力学中的相似方法与量纲理论》¹⁾, 后者已经出版 10 次, 被译为多种语言. 在 20 世纪 60 年代, Л. И. 谢多夫是理解在力学专业大学生教学计划中引入连续介质力学课程的必要性和重要性的最初几个人之一. 他率先为莫斯科大学力学数学系学生讲授连续介质力学, 该课程持续 3 个学期, 包括 70 次讲座. 此后, 这一课程成为莫斯科大学力学数学系力学专业学生的传统课程, 而为数学专业学生讲授时则删减部分内容. 现在奉献给读者的这套两卷本教材就是基于该课程的授课内容撰写的.

¹⁾ Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 10-е изд. Москва: Наука, 1987 (俄文第八版的中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982).

本书是连续介质领域的基本教材之一，俄文版已经出版 5 次，英文版已经出版 2 次，此外还有其他语言的一些版本。

本书的主旨不仅在于描述连续介质的经典模型和规律，而且在于阐明建立数学模型的一般基础，使读者能够理解最前沿的问题。在第一卷中首先引入了一些基本概念，用来在数学上描述连续介质的平衡和运动，并且描述方法与介质的具体性质无关。这些概念是：对时间的物质导数（随体导数），有限应变张量，小应变张量，应变率张量，应力张量，等等。在这一部分中有非常重要的一节专门解释张量的概念。在引入张量时，基矢量被明确地写在张量的记号中。这种定义方法有助于更深刻地理解张量的本质和运算法则，尤其是在使用曲线坐标系的时候。由于热力学在建立连续介质模型时起重要作用，在第一卷中还有一章专门讲述连续介质热力学。书中给出了普适的物理守恒定律，并由此导出了相应微分方程和包括激波条件在内的间断面条件。引入了经典的流体模型和弹性体模型，详细讨论了连续介质与电磁场的相互作用。第一卷最后一章论述提出具体问题的共同基础，其中包括量纲分析、现象的相似和模拟。

第一卷的附录是作者的 2 篇论文，其中研究非线性张量函数理论的附录一具有特别重要的实际价值。

第二卷论述了连续介质的具体模型——理想流体、黏性流体、弹性介质和塑性介质，研究了流体力学、空气动力学、弹性力学、塑性力学和裂纹理论的基本问题和一般规律，给出了提出具体问题并进一步求解的一些实例。这里值得特别强调关于非线性弹性力学的部分内容。

书中没有用于自学的练习和习题。如果读者希望通过求解习题来加深对课程的理解，可以参阅由 Л. И. 谢多夫的一些同事和学生合编的《连续介质力学学习题集》¹⁾，其中包含 1000 余道题目。该习题集可以看作是对 Л. И. 谢多夫的这套教材的补充。

对力学、数学和物理学专业的大学生、研究生以及工程师和研究人员来说，本书无疑是一本有用的参考书。

М. Э. 埃格利特
莫斯科，2007 年 7 月

¹⁾ Механика сплошных сред в задачах. Т. 1, 2. Под ред. М. Э. Эглит. Москва: Московский лицей, 1996 (Eglit M. E., Hodges D. H., eds. Continuum Mechanics via Problems and Exercises. Parts I, II. Singapore: World Scientific, 1996).

第二卷第二版序和第四版序

第二版序

在第二版中更正了已经发现的印刷错误, 并补充了以下内容.

在第八章 §8 中更详细地发展了固体在不可压缩理想流体中运动时的流体动力学阻力和推力理论, 例如, 详细讨论了在固体后面形成空腔时和从固体向前喷出射流时流体对固体的作用力.

在第八章中还增加了关于气泡在液体中的振动的一节 (§19). 最近, 无论是在理论研究中, 还是在大量实际应用中, 含有气泡的液体的运动都备受关注.

在第十一章 §2 中补充了缝隙或裂纹端点附近存在应力集中时对弹性解应力场的详细分析. 这些结果有助于更详尽地揭示导致准脆性材料断裂和能量消耗的物理机制的本质, 而这些现象都与裂纹的发展有关. 对这个问题的相关讨论被补充在第十一章 §3 的最后.

Л. И. 谢多夫
莫斯科, 1973 年 3 月

第四版序

在第四版中更正了在以前各版中发现的印刷错误, 并补充了各种说明和更准确的解释.

Л. И. 谢多夫
莫斯科, 1982 年 12 月

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序	i
译者序	iii
中文版序	vii
第二卷第二版序和第四版序	ix
第八章 流体力学	1
§ 1. 流体静力学	1
§ 2. 理想流体定常运动的一般理论·伯努利积分	12
§ 3. 不可压缩流体在重力场中的伯努利积分	16
§ 4. 空化现象	20
§ 5. 完全气体绝热流动的伯努利积分	23
§ 6. 可压缩性对流管形状的影响·拉瓦尔喷管的基本理论	29
§ 7. 定常运动的积分关系式对有限物质体的应用	35
§ 8. 定常运动的流体与被绕流物体之间的相互作用	42
§ 9. 流体机械的基本部件	63
§ 10. 喷气推进理论基础	85
§ 11. 理想流体的势流·柯西—拉格朗日积分	104

§ 12. 不可压缩流体的势流·调和函数的性质	110
§ 13. 圆球在无界不可压缩理想流体中的运动问题	126
§ 14. 刚体在无界不可压缩理想流体中运动的相关运动学问题	130
§ 15. 刚体在流体中运动时流体的动能、动量和动量矩·附加质量理论基础	134
§ 16. 无界理想流体对位于其中的运动刚体的作用力	139
§ 17. 气体中的小扰动	146
§ 18. 有限振幅平面波(黎曼波)的传播	153
§ 19. 气泡在液体中的振动	158
§ 20. 圆球在不可压缩黏性流体中的运动	175
§ 21. 不可压缩黏性流体在柱形管中的运动	181
§ 22. 流体的湍流运动	186
§ 23. 层流边界层方程	194
§ 24. 不可压缩流体的平板边界层·布拉修斯问题	198
§ 25. 边界层流动的某些重要效应	202
§ 26. 根据给定的涡量和散度计算速度场	205
§ 27. 涡量场的一些重要实例	214
§ 28. 圆柱形涡的动力学理论	224
§ 29. 连续分布的涡在理想流体中的运动	229
§ 30. 涡量在不可压缩黏性流体中的扩散	232
第九章 弹性力学	235
§ 1. 引言	235
§ 2. 弹性体模型	236
§ 3. 弹性杆单轴拉伸问题	250
§ 4. 弹性材料圆管在内部和外部压强作用下的应变和应力(拉梅问题)	258
§ 5. 弹性力学问题的提法·克拉珀龙方程·唯一性定理·圣维南原理	264
§ 6. 弹性杆弯曲问题	271
§ 7. 直杆的扭转	275
§ 8. 梁的弯曲问题中的材料力学方法	290
§ 9. 弹性力学中的变分方法	298
§ 10. 各向同性弹性体中的弹性波	306
第十章 塑性力学	315
§ 1. 弹性体模型无法描述的某些固体变形现象	315
§ 2. 残余应变·加载曲面	321
§ 3. 塑性力学的基本关系式	326

§ 4. 塑性体模型的一些实例	342
§ 5. 理想弹塑性材料柱形杆的扭转问题	349
第十一章 弹性力学平面问题理论和裂纹理论引论.	363
§ 1. 弹性力学平面问题.	363
§ 2. 应力集中.	381
§ 3. 裂纹理论.	403
参考文献	422
人名译名对照表	428
索 引	431

第八章 流体力学

§ 1. 流体静力学

我们来研究流体静力学的某些问题, 即液体和气体相对于选定的坐标系平衡的一些理论¹⁾.

流体静力学的结果和方法对许多实际重要的问题有重大意义. 流体静力学研究海水的平衡, 大气的平衡, 流体对漂浮在水面上的船舶、悬浮在水中的潜艇和悬浮在空气中的气球的作用力, 漂浮在水面的船舶的稳定性等诸多问题.

平衡方程 在平衡状态下 ($\mathbf{v} = 0$), 从连续性方程得 $\partial\rho/\partial t = 0$. 这表示密度场在所取参考系中是定常的, 即 $\rho = \rho(x, y, z)$. 容易看出, 欧拉方程和纳维—斯托克斯方程在平衡状态下都归结为同一个方程

$$\text{grad } p = \rho\mathbf{F}, \quad (1.1)$$

它在笛卡儿坐标下的形式为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z, \quad (1.2)$$

式中 F_x, F_y, F_z 表示外质量力密度 (其中一般包括惯性力密度) 在坐标轴上的投影.

如果 $F_x = F_y = F_z = 0$, 即如果没有外质量力, 则 $\text{grad } p = 0$, 所以压强 p 在流体中的所有点都是相同的. 这个结论称为帕斯卡定律²⁾.

¹⁾ 通常研究相对于惯性或非惯性笛卡儿坐标系的平衡, 换言之, 通常研究相对于某个刚体的平衡, 在下文中也是如此.

²⁾ 此定律的通常表述是: 静止液体中任何一点的压强变化会在瞬间大小不变地传至液体各点. 这实质上是说, 若 p 满足平衡方程, 则 $p + C$ 仍满足平衡方程, 式中 C 是任意常压强. ——译注

外力密度的条件 从方程 (1.1) 可见, 质量力密度矢量场 \mathbf{F} 在平衡状态下不可能是任意的. 其实, 在可压缩流体的一般情况下, 密度 ρ 是待求量, 从 (1.1) 得

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p = \rho \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \mathbf{F},$$

因为对于任何作为变量的矢量 \mathbf{a} 和标量 c 都成立公式 $\operatorname{rot} c\mathbf{a} = c \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} c \times \mathbf{a}$. 由此可见

$$\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0. \quad (1.3)$$

关系式 (1.3) 是在力场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 作用下可能实现平衡的必要条件.

可以证明, 对于满足条件 (1.3) 的给定的力场 \mathbf{F} , 可以求出满足平衡方程 (1.2) 的密度场 $\rho(x, y, z)$ 和压强场 $p(x, y, z)$ 这两个标量场¹⁾.

如果密度 $\rho = \text{const}$ (均匀不可压缩流体), 则 $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, 所以质量力应当是有势的, 设其势函数为 \mathcal{U} , 即 $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathcal{U}$. 因此, 均匀不可压缩流体只有在有势的外质量力场中才能够处于平衡状态.

在可压缩流体的一般情况下, 若质量力场是有势的, 从 (1.1) 得

$$dp = \rho d\mathcal{U}. \quad (1.4)$$

由此可见, 对于有势质量力场中的平衡状态, 密度和压强仅是 \mathcal{U} 的函数. 其实, 根据 (1.4), 当 $\mathcal{U} = \text{const}$ 时有 $p = \text{const}$, 即 $p = p(\mathcal{U})$, 又因为 $dp/d\mathcal{U} = \rho$, 所以 $\rho = \rho(\mathcal{U})$.

从间断的一般理论²⁾ 可知, 在静止流体中只可能有密度间断面, 而压强应当是连续的. 从压强 p 和势函数 \mathcal{U} 的连续性可得, 当 $\rho_1 \neq \rho_2$ 时, 关系式 (1.4) 只有在 $d\mathcal{U} = dp = 0$ 时才能够沿间断面成立, 即, 静止流体中的密度间断面应当是等势面 $\mathcal{U} = \text{const}$.

重力场中的平衡 我们来研究流体在重力场中的平衡. 选取 z 轴方向竖直向上的坐标系, 则 $F_x = F_y = 0$, $F_z = -g$, $\mathcal{U} = -gz + \text{const}$, 并且 $p = p(z)$, $\rho = \rho(z)$. 因此, 当只有重力作用时, 静止流体中的等压面和等密度面是水平面. 从状态方程 $f(p, \rho, T) = 0$ 可得, 静止重流体中的温度也只依赖于坐标 z , $T = T(z)$.

根据 (1.4), $dp/dz = -\rho g < 0$, 因此压强随着高度的增加而减小. 对于 z 和 z_0 这两个高度上的压强差, 由 (1.4) 可得

$$p - p_0 = - \int_{z_0}^z \rho g dz = - \int_{z_0}^z \gamma dz, \quad (1.5)$$

¹⁾ 由 (1.3) 可知, 给定的力场 \mathbf{F} 可以表示为 $\mathbf{F} = \eta \operatorname{grad} \xi$, 式中 η 和 ξ 是坐标的已知函数. 只要取 $\rho = G(\xi)/\eta$, $p = \int G(\xi) d\xi$, 式中 $G(\xi)$ 是任意函数, 即可满足平衡方程. 因此, 仅由给定的力场 \mathbf{F} 不能唯一决定 p 和 ρ , 但能决定它们的结构. ——译注

²⁾ 见第一卷第七章 §4.