21世纪高等学校规划教材

微积分

WEI JI FEN

《微积分》编写组

WEI JI FEN

WEI JI FEN

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

微积分

《微积分》编写组
黄立宏　主　审

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本教材内容包括集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数与微分、不定积分、定积分、一元函数微分学和积分学的应用、空间解析几何和向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程等.各节后配有适量的习题,书末附有习题答案便于教学.

本书内容丰富,条理清楚,重点突出,难点分散,例题较多,在内容取舍上既注重了微积分在传统领域中的知识内容,又加强了它在经济应用中的内容介绍.

本书可作为大学经管、文史、外语类本科生数学教材,也适合各类需要提高数学素质和能力的经济管理人员及有关人员的自学用书或参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/《微积分》编写组编.—北京:北京邮电大学出版社,2009

ISBN 978-7-5635-1883-8

Ⅰ.微… Ⅱ.微… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 030146 号

书　　名	微积分
主　　编	《微积分》编写组
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	21
字　　数	434 千字
版　　次	2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1883-8　　定价:32.00 元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有　侵权必究

前　言

随着我国社会主义经济建设的不断发展，数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显，数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，对高等学校经管、文史、外语类等各专业人才的数学素养要求越来越高. 微积分是高等数学基础课程之一，这门课程的思想和方法，是人类文明发展史上理性智慧的结晶. 它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供一种思维的训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才必需的文化素质和修养.

本教材以提高高等学校经管、文史、外语类专业学生的数学素质为目的，渗透了不少现代数学观点，着力培养和提高学生应用数学方法解决经济问题的能力. 在内容选取上既注重微积分在传统领域中的知识内容，又加强了它在经济应用中的内容介绍. 在叙述上力求清楚易懂，以几何意义对概念和定理加以解释说明，便于读者对相关概念和定理的理解和掌握.

本教材内容包括集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数与微分、不定积分、定积分、一元函数微分学和积分学的应用、空间解析几何和向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程等. 各节后配有适量的习题，书末附有习题答案.

本教材由《微积分》编写组编，参加编写的人员有曹定华、李建平、任玉平、刘长荣、王宏. 黄立宏教授认真审查了此书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.

教材编写过程中疏忽在所难免，不妥之处敬请广大读者批评指正！

编　者

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　函　数

微积分的主要研究对象是函数. 通常人们应用两种方法研究函数. 一种方法是代数方法和几何方法的综合运用. 用这种方法一般只能研究函数的简单性质,并且有时会变得很复杂. 例如,初等数学应用这种方法研究了函数的单调性、奇偶性、周期性等性质. 另一种方法是应用微积分的方法,或者说是极限的方法. 用此方法能够研究函数的许多深刻性质,其过程相对简单. 微积分是用极限的方法研究函数的一门基础数学课程. 因此,在介绍微积分之前,首先介绍函数的概念及相关知识.

第一节　函数的概念及其基本性质

一、集合及其运算

自从德国数学家康托尔(Georg Cantor,1845—1918)在19世纪末创立集合论以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为现代数学的基础和语言. 一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体. 组成集合的各个对象称为该集合的元素.

习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 用 $a\in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素,读作"a 属于 A";用 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}$)表示 a 不是集合 A 中的元素,读作"a 不属于 A". 含有有限多个元素的集合称为有限集;含有无限多个元素的集合称为无限集;不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

集合的表示方法有两种:列举法和描述法. 列举法是把集合中的所有元素一一列出,写在一个花括号内的一种方法. 如 $A=\{-1,1\}$,$B=\{0,1,2\}$ 等. 描述法是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质的一种方法. 如 $C=\{x\mid x^2-1\geqslant 0\}$,$D=\{x\mid \sin x=0\}$ 等.

一般地,用 **N** 表示自然数集,用 **Z** 表示整数集,用 **Q** 表示有理数集,用 **R** 表示实数集.

对于集合 A 和 B,若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素,即若 $a\in A$,则 $a\in B$,这时就称 A 是 B 的一个子集,记作 $A\subseteq B$,读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A");若 $A\subseteq B$,且存在 $b\in B$,使得 $b\notin A$,则称 A 是 B 的一个真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

规定:$\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A,B 相等,记作 $A=B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素,反过来,B 中的元素也都是 A 中的元素,即 A,B 中的元素完全一样.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

设 A,B 是两个集合，称$\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合.

称$\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合.

称$\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合.

集合的运算满足下述基本法则：

定理 1 设 A,B,C 为三个集合，则

(1) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$； **（交换律）**

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$； **（结合律）**

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$； **（分配律）**

(4) $A\cup A=A, A\cap A=A$； **（幂等律）**

(5) $A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$；

若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B, A\cap B=A$. **（吸收律）**

特别地，由于 $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，所以有

$$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A.$$

二、区间与邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，记$(a,b)=\{x|a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为开区间；记$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为闭区间；记$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左闭右开区间；记$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左开右闭区间；$a,b$ 分别称为区间的左端点和右端点.

另外，我们还记$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b,x\in\mathbf{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x|a<x,x\in\mathbf{R}\}$，等等.

设 $x_0\in\mathbf{R},\delta>0$，记 $U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，称为 x_0 的 δ 邻域，其中 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 容易知道，

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

记 $\mathring{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)-\{x_0\}=\{x|0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为 x_0 的去心 δ 邻域.

当不必知道邻域的半径 δ 的具体值时，常将 x_0 的邻域和去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$.

三、函数的概念

定义 1 **设 D 为非空实数集,若存在对应法则 f,使得对任意的 $x\in D$,按照对应法则 f,都有唯一确定的 $y\in \mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数,简称函数. D 称为 f 的定义域,记作 $D(f)$(或 D_f). 对于 $x\in D(f)$,称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域,记作 $f(D)$ 或 $\mathbf{R}_f$(或 $\mathbf{R}(f)$),即**

$$\mathbf{R}_f = \{f(x) \mid x \in D(f)\}.$$

应该注意,在定义 1 中,函数是 f,它是一个对应法则,规定了 $D(f)$ 中的 x 对应于哪个实数 y. 而 $f(x)$(即 y)则是函数值,是在对应法则 f 的规定下 x 所对应的值 y,这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因,我们习惯上也把 $f(x)$(或 y)称为 x 的函数,x 称为自变量,y 称为因变量.

由定义 1 可知,确定一个函数需确定其定义域和对应法则,因此,我们称定义域和对应法则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应法则都相同,则称这两个函数相同.

函数的表示法一般有三种:表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点,表格法一目了然;图像法形象直观;解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

例 1 求 $\varphi(x)=\ln(\arcsin x)^2$ 和 $g(x)=2\ln \arcsin x$ 的定义域,并判断它们是否为同一个函数.

解 在中学时我们就已知道,对于用解析式表示的函数 $f(x)$,若其定义域未给出,则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此,要使 $\varphi(x)$ 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \arcsin x \neq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

故 $D(\varphi)=[-1,0)\cup(0,1]$.

要使 $g(x)$ 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \arcsin x > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x > 0, \end{cases}$$

故 $D(g)=(0,1]$. 由于 $D(\varphi)\neq D(g)$,可见 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \\ x^2+1, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$,并作出函数图形.

解 这是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个函数,在定义域的不同部分上,函数的表达式不同,这种函数称为分段函数. 当 $x<0$ 时,对应的函数值 $f(x)=x-1$(即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$);而当 $x\geqslant 0$ 时,对应的函数值 $f(x)=x^2+1$(即用 x^2+1 来计算 $f(x)$). 所以

$$f(-1) = (-1) - 1 = -2,$$
$$f(0) = 0^2 + 1 = 1,$$
$$f(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

函数图形可分段描绘，并注意空心点和实心点的区别(如图 1-1).

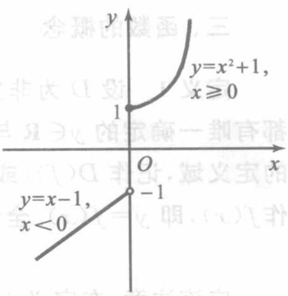


图 1-1

四、复合函数和反函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$，$u\in U$，而 $u=\varphi(x)$，$x\in X$，此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为对任取 $x\in X$，由 u 是 x 的函数，可确定唯一的一个 u 与之对应，又由于 y 是 u 的函数，对由 x 所确定的 u(当 $u\in U$ 时)，又可确定唯一一个 y 与 u 对应，即 $x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y$，所以由函数的定义知 y 是 x 的函数. 其函数式可通过代入运算得到：将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中，得 $y=f(\varphi(x))$，称为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数.

例 3 设 $y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=\sin x$，则它们构成的复合函数为 $y=f(\varphi(x))=\ln\sin x$.

可见，若给出两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，要求复合函数只需做代入运算即可. 但应注意，并非任何两个函数都能构成复合函数.

例 4 设 $y=f(u)=\ln(u-2)$，$u=\varphi(x)=\sin x$，问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否构成复合函数 $f(\varphi(x))$？

解 将 $u=\sin x$ 代入到 $y=\ln(u-2)$，得 $y=\ln(\sin x-2)$. 由于 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$\sin x-2<0$，故函数的定义域为空集，所以不能构成复合函数.

通过例 3、例 4 可以发现，要使 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 能够构成复合函数 $f(\varphi(x))$，关键是要保证代入后的函数式要有意义，或者说要保证 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y=f(u)$ 的定义域内. 这样，我们就可得到复合函数的定义.

定义 2 **若 $y=f(u)$ 的定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，且 $U\cap U^*\neq\varnothing$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，称它为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数，记作 $f(\varphi(x))$. u 称为中间变量.**

例 5 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，求复合函数 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 用 $\varphi(x)$ 代替，得

$$f(\varphi(x))=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}.$$

同理，
$$\varphi(f(x))=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+x^2}{1+2x^2}}.$$

2. 反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要，选定其中一个为自变量，那么另一个就是因变量或函数. 例如，在圆面积公式 $S=\pi r^2$ 中，圆面积 S 是随半径 r 的变化而变化的，或者说任给一个 $r>0$，就有唯一确定的 S 与之对应，因此 S 是 r 的函数，r 是自变量，S 是因变量. 但如果是由圆面积 S 的值来确定半径 r，则可从 $S=\pi r^2$ 中解出 r，得 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. 可见 r 是随 S 的变化而变化的，或者说，任给一个 $S>0$，就有唯一确定的 r 与之对应，按函数的定义，r 是S 的函数. 这时，自变量为 S，因变量为 r. 我们称 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$为 $S=\pi r^2$ 的反函数.

若设 $y=f(x)$的定义域为 X，值域为 $Y=\{f(x)\mid x\in X\}$，且 $f(x)$满足：对任意的 x_1，$x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 此时，对任意的 $y\in Y$，必存在唯一确定的 $x\in X$ 满足 $y=f(x)$，换言之，对 Y 中的任何一个 y，通过函数$y=f(x)$可以反解出唯一的一个 x，使得 y 与这个 x 相对应，根据函数的定义，x 是 y 的函数. 这个函数的自变量是 y，因变量是 x，定义域是 Y，值域是 X. 称之为$y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

显见，若 $x=f^{-1}(y)$是 $y=f(x)$的反函数，则 $y=f(x)$是 $x=f^{-1}(y)$的反函数，即它们互为反函数；$x=f^{-1}(y)$的定义域和值域分别是 $y=f(x)$的值域和定义域. 另外易验证 $f^{-1}(f(x))=x, x\in X$；$f(f^{-1}(y))=y, y\in Y$.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$中，y 是自变量，x 是因变量，由于习惯上常用 x 作为自变量，y 作为因变量，因此，反函数 $x=f^{-1}(y), y\in Y$ 常记作 $y=f^{-1}(x), x\in Y$.

关于反函数还有如下常用结论：

(1) $y=f(x)$(定义域为 X，值域为 Y)存在反函数 $y=f^{-1}(x)(x\in Y)$的充要条件是对任意的 $x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

(2) 若 $y=f(x), x\in X$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，则在同一直角坐标系 xOy 中，$y=f(x)$和 $y=f^{-1}(x)$的函数图形关于直线 $y=x$ 对称.

这是因为若点 $P(a,b)$是 $y=f(x)$的函数图形上的点，即 $b=f(a)$，由反函数定义知，$a=f^{-1}(b)$，因此点 $Q(b,a)$是 $y=f^{-1}(x)$的函数图形上的点；反之，若点 $Q(b,a)$是 $y=f^{-1}(x)$的函数图形上的点，则 $P(a,b)$是 $y=f(x)$的函数图形上的点. 因点$P(a,b)$与 $Q(b,a)$关于直线 $y=x$对称(即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ)，故上述结论(2)正确(如图 1-2).

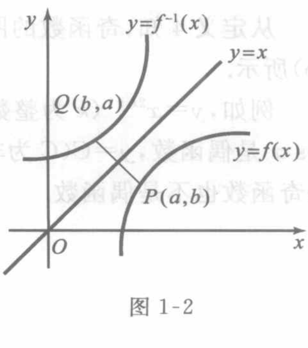


图 1-2

例 6 求下列函数的反函数：

(1) $y=2^x+1$；(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x<0,\\ x^2+1, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$

解(1) 由 $y=2^x+1$ 得 $2^x=y-1$，两边取对数得

$$x=\log_2(y-1).$$

交换 x,y 的位置，得反函数

$$y = \log_2(x-1).$$

(2) 当$-1 \leqslant x < 0$时,由$y=\sqrt{1-x^2}$得

$$x = -\sqrt{1-y^2}, 0 \leqslant y < 1;$$

当$0 \leqslant x < 2$时,由$y=x^2+1$得

$$x = \sqrt{y-1}, 1 \leqslant y < 5.$$

于是,有

$$x = \begin{cases} -\sqrt{1-y^2}, & 0 \leqslant y < 1, \\ \sqrt{y-1}, & 1 \leqslant y < 5. \end{cases}$$

交换x,y的位置,得反函数

$$y = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \sqrt{x-1}, & 1 \leqslant x < 5. \end{cases}$$

五、函数的基本性质

1. 单调性

定义 3　设函数$f(x)$在区间D上有定义,对任意的$x_1, x_2 \in D$,且$x_1 < x_2$,

(1) 若有$f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称$f(x)$在D内是单调递增的;

(2) 若有$f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称$f(x)$在D内是单调递减的.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数,区间D称为单调增(减)区间.当上述不等号为严格不等号时,分别称为严格单调递增和严格单调递减.

例如,$y=x^3$在定义域$\mathbf{R}$内是单调递增函数;$y=x^2$在定义域$\mathbf{R}$内不是单调函数,但$(-\infty,0]$是其单调减区间,$[0,+\infty)$是其单调增区间.

易见,若$f(x)$是(a,b)内的严格单调函数,则$f(x)$在(a,b)内存在反函数$y=f^{-1}(x)$.这是因为对任意的$x_1,x_2 \in (a,b)$,若$x_1 \neq x_2$,则因$f(x)$严格单调,必有$f(x_1) \neq f(x_2)$,故存在反函数.

2. 奇偶性

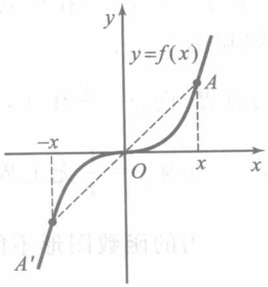
定义 4　设函数$f(x)$的定义域$D(f)$关于原点对称(即若$x \in D$,则$-x \in D$),对于任意的$x \in D$,

(1) 若有$f(-x) = -f(x)$,则称$f(x)$为D内的奇函数;

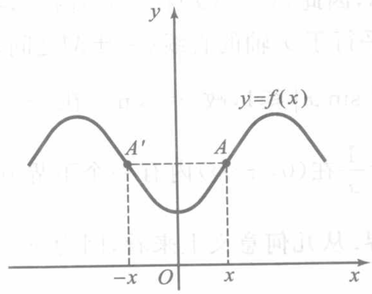
(2) 若有$f(-x) = f(x)$,则称$f(x)$为D内的偶函数.

从定义 4 知,奇函数的图形关于原点对称,而偶函数的图形关于y轴对称,如图 1-3(a)与(b)所示.

例如,$y=x^{2k+1}$(k为整数)为奇函数,$y=x^{2k}$(k为整数)为偶函数,$y=\sin x$是奇函数,$y=\cos x$是偶函数,$y=C$(C为非零常数)是偶函数,$y=0$既是奇函数也是偶函数,$y=x^2+x$既不是奇函数也不是偶函数.



(a)



(b)

图 1-3

例 7　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　　　(2) $g(x)=x^2\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解　(1) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(2) $g(-x)=(-x)^2\cdot\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=x^2\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$,

所以 $g(x)$是偶函数.

3. 有界性

定义 5　设函数 $f(x)$在实数集 D 内有定义，如果存在正数 M，使得对任意的$x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$在 D 内有界，或称 $f(x)$在 D 内为有界函数；否则称 $f(x)$在 D 内无界，或称 $f(x)$在 D 内为无界函数.

定义 6　设函数 $f(x)$在实数集 D 内有定义，若存在实数 A，使得对任意的$x\in D$，都有

$$f(x)\leqslant A\quad(\text{或 } f(x)\geqslant A)$$

成立，则称 $f(x)$在 D 内有上界（或有下界），也称 $f(x)$是 D 内有上界（或有下界）的函数. A 称为 $f(x)$在 D 内的一个上界（下界）.

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数. 即函数在 D 内有界的充要条件是该函数在 D 内既有上界又有下界.

若 $f(x)$在 D 内有一个上界（或下界）A，则对任何 $C>0$，$A+C$（或 $A-C$）都是 $f(x)$在 D 内的上界（或下界）. 可见，$f(x)$在 D 内的上界（或下界）有无穷多个.

有界函数的几何意义：设 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界，即存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in(a,b)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，或$-M\leqslant f(x)\leqslant M$. 注意到 $f(x)$表示函数 $y=f(x)$的图形上点$(x,$

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com