自學輔導廣播講座

數學講義

乙班

①

新知識出版社

書號：新 033
數學講義 ·乙班·

編　　者：上海人民廣播電台
　　　　　自學輔導廣播講座

出版者：新知識出版社
上海市書刊出版業營業許可證出〇一五號
（上海淮海中路一六七〇弄三二號）

印刷者：中國科學公司
（上海延安中路五三七號）

總經售：新華書店

開本：787×1092　1/32
字數：37,000
印張：1　13/16
定價：1,600元

印數：1—25,000本
一九五四年九月第一版
一九五四年九月第一次印刷

第一單元　數的概念的擴展和恒等變換

一　代數式和正負數

1. 文字的使用　算術中所有的數，它們之間除了所代表的數量不同以外，它們的性質却是相同的。並且在演算中也可以看出，數與數之間還存在着一定的關係。學習代數，首先要懂得並且會使用代數符號(文字)來表示這兩種性質。

(1) 表示數的共同性質——用文字 a 或 b 來代表任何兩個數在運算中的一般性；而不像算術中用數字 3 或 5，只是代表兩個特殊的數值。

例如我們用‘乘數的位置互換，其積不變’這一個適合任何數的事實來說：以文字 a 代表一個乘數，b 代表另一乘數，便可以寫成下面的等式：

$$a \times b = b \times a;$$

或寫成，　$$ab = ba。$$

(2) 組成計算式子——在演算中根據已知條件，用文字表示數與數之間的一定關係。

例如習題：求 520 的 3% 是多少？我們都會得解：

$$520 \text{ 的 } 3\% \text{ 是 } \frac{520}{100} \times 3 = 5.2 \times 3 = 15.6。$$

如果我們使用文字，就可以簡括地把由百分率求任何數的百

分數的演算，寫成一般形式。

設　　　　a 代表任何數，$p\%$ 代表百分率；

那末，就可寫成：

$$a \times p\%。$$

倘使再用 x 代表算得的百分數值，就可以寫成等式：

$$x = a \times p\%。$$

因此，使用文字與計算符號來一般地表示數與數之間的某種一定關係，寫出各種法則和公式，是必要的，因爲這樣就使我們的敘述更簡單清楚。

例如：

(1) 兩數 x 與 y 的和與差的相乘積，就可以寫成

$$(x+y)(x-y)。$$

(2) 在測定矩形面積時，若以 h 代表它的高，b 代表它的底，S 代表它的面積，就可寫成

$$S = bh。$$

2. 代數式　將文字（或數字與文字）用計算符號連接起來的式子，就叫代數式。爲了方便，代數式常簡稱做式或式子。

例如：$a+b-c$；ab；$a \times p\%$；$2x+1$ 等都是代數式。

計算代數式的數值——即將文字所代替的數值代入代數式中演算所得的結果，叫做該代數式的值。

如　　　　$a=5$，$b=3$，$c=2$，　則

$$a+b-c=5+3-2=6。$$

或 $x = 3$， 則 $2x + 1 = 7$。

3. 代數中所研究的六種算法 共有以下六種：加、減、乘、除、乘方與開方。其中第五種——乘方與第六種——開方，要特別加以說明。

乘方是乘法中的一種特殊情形，是幾個相同的數相連乘的乘積；這所得的乘積叫做乘方，相同乘數的個數叫做指數，而相乘的數叫做底數。若是相同的二個數相乘，其乘積就叫該數的二乘方（又名二次冪），或叫平方；若相同的三個數連乘，其乘積叫做該數的三乘方（三次冪），或叫立方；餘類推。一般規定，指數寫在底數的右上角，用小型字寫出來。例如，

5 的二乘方是 5×5 的相乘積，可寫成 $5^2 = 25$。

$\frac{1}{2}$ 的三乘方是 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 的連乘積，可寫成 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$。

乘方，我們在實際計算中時常遇到它。回想一下許多算面積、算體積的例子，都有二乘方和三乘方的數出現。譬如：圓的面積，$S = \pi R^2$；立方體的體積，$V = l^3$。可是，不要以爲我們在實用上只能遇見二乘方和三乘方，而更高次的乘方只是在代數練習中纔有。工程師計算各種材料的强度時，就常要用四乘方；至於另外一些計算（例如求汽管的直徑），甚至要用六乘方。不僅如此，就是我們碰上一個實際問題，也要用較高次乘方。譬如，有一個問題：一星期裏面晴天和陰天的變化能有幾種情形？

我們可以這樣理解。這星期的第一天也許是晴的，也許是陰

的；現在已經有兩種情形。

在兩天裏面，可能的陰晴次序如下：

晴和晴　　　　陰和晴

晴和陰　　　　陰和陰

兩天裏面一共有 2^2 種不同的變化。在三天裏面，前兩天的每一種都可以和第三天的兩種配合，所有變化的數目是

$$2^2 \times 2 = 2^3$$

在四天裏，變化的數目是

$$2^3 \times 2 = 2^4$$

同理，在五天裏面可以有 2^5 種變化，在六天裏面有 2^6 種，故最後知道一星期有 $2^7 = 128$ 種不同的變化。

關於第六種——開方，我們留到後面再講。

代數中各種計算進行的次序，一般與算術中相似，規定如下：即首先乘方與開方，然後再乘除，最後是加減。

4. 兩種相對意義的量——正負數　有一個問題，溫度計夜半指示 26°，但在正午是 32°，問從夜半至正午，溫度是怎樣變化的及相差若干度？

在這問題中，所給的條件不充分；應當指出溫度計在夜半所指示的是零上 26°，還是零下 26°；同樣在正午的溫度也須要指示清楚。譬如溫度計在夜半與正午所指示的都是零上，則在此時間內的溫度是由 26° 上升至 32°，也就是增加 6°；若溫度計在夜半所指示的是零下 26°，而正午是零上 32°，則溫度上升 26° + 32° 即 58°。

在這問題內所說的數(溫度)是有兩個方向的,溫度可以從零點往上計算,也可以從零點往下計算。所以我們可以認爲:從零點往上計算的溫度是正數,並用符號'+'表示;相對的,從零點往下計算的溫度便認爲是負數,而以符號'−'來表示(前者的符號,爲簡便起見可以不寫)。

根據這個概念,現在我們把問題改爲:溫度計在夜半指示 $+26°$,而在正午指示 $+32°$,問從夜半到正午溫度是怎樣變化的及相差幾度?這樣,問題內的條件便完全了;很明顯地,溫度上升 $32°-26°$ 即 $6°$。

除這個實例以外,還有很多具有兩種相對意義的數量如盈餘和虧損、收入和支出等等。

現在,我們從下列二方面來說明代數學中的正負數。

(1) 什麼叫正負數、零、絕對值?在算術中所研究的數,只能當作不管方向的量(偶爾也有計算距離的問題,但只是計算其長短,而不考慮距離的方向)。但在代數學中的數,不但能表示出數值的大小,並且還能指出方向。因而就某種意義把數量用'+'號表示;與其相反的,就用'−'號表示。

所以某數前置有'+'號時,便叫做正數;若數的前面是'−'號,則叫做負數。如:

$+10,\ +\frac{1}{2},\ +0.3$ ……………都是正數。

$-8,\ -\frac{5}{7},\ -3.25$ ……………都是負數。

還有，0（零）不算正數也不算負數。所以 $+0$，-0，和不加符號的 0 都是同等的。

正數、負數與零都叫做相對數；與算術的數的區別，僅在數字前面的符號。

代數中正負數的絕對值規定如下：正數的絕對值是指這個數本身，例如 $|7| = 7$；負數的絕對值是指與它相反的正數，例如 $|-7| = 7$；零的絕對值還是零，即 $|0| = 0$。

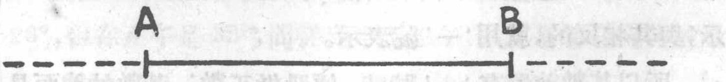
兩個相對數的絕對值與符號都相同時，這兩數叫做相等。

（2）在數軸上數的表示　在一直綫上取一綫段（第一圖），命一端是 A 點，其他一端是 B 點，在此綫段內可以看出：

（i）它的長度；

（ii）方向。

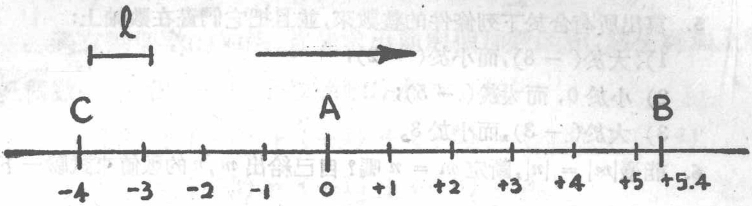
但方向只有兩個，一為由 A 點向 B 點，一為由 B 點向 A 點。假若我們將所取的綫段看做由 A 向 B 的方向，則我們說 A 點是綫段的原點，B 點是終點。



第　一　圖

利用此類綫段，我們可以將相對數用以下的方法很明顯地表示出來：取任意一條直綫，規定這條直綫的正方向（第二圖），普通取從左向右的方向（如箭頭所示）為正方向，相反的方向——從右向左——作為負方向；然後取任一綫段 l（圖上所示）作長度單位。譬

如要表示正數 $+5.4$；則在直綫上取任意一點 A 作爲綫段的原點，然後由此點向右取一綫段等於 l 的 5.4 倍得 AB，它的長度代表 5.4，它的方向爲正，故綫段終點 B 很明顯地表示 $+5.4$。現在從原點 A 向左方取 l 的 4 倍得綫段 AC，它的長度代表 4，它的方向爲負，這個綫段的終點 C 即表示 -4。



第　二　圖

同樣，我們可將所有的正負數在同一直綫上表示出來；即以 A 點爲 0，則在 A 點右方直綫上的各個點就表示着各個正數，而在 A 點左方的表示着各個負數。這樣的直綫叫做數軸。在數軸上某綫段的長度就表示該數的絕對值。

很明顯，以零點爲中心，在數軸右邊有一個正數值，則在左邊一定也有一個對應的負數值，它們之間符號相反而絕對值相等，例如 $+3$ 與 -3；$+\frac{1}{2}$ 與 $-\frac{1}{2}$；……這些互相對應的數，我們叫它做相反的數。

習　題　一

1. 把比 m 大 1 的那個數寫出來。比 n 小 4 的那個數寫出來。

2. 1) 寫出按自然順序在 a 後的兩個整數。若 $a=7$,說出這兩數來。

2) 寫出按自然順序在 m 前的兩個整數。若 $m=5$,說出這兩數來。

3. 在三位數內百位數字爲 a,十位數字爲 b,個位數字爲 c,問此數應如何表示?

4. 混合兩種茶,第一種茶取 a 公斤,第二種茶取 b 公斤,第一種茶每公斤價 m 元,第二種茶每公斤價 n 元,問每公斤混合茶的價值應如何表示?

5. 寫出所有合於下列條件的整數來,並且把它們畫在數軸上:

1) 大於 (-8),而小於 (-2);

2) 小於 0,而大於 (-5);

3) 大於 (-3),而小於 3。

6. 能憑 $|m|=|n|$,斷定 $m=n$ 嗎?自己給出 m,n 的數值來試驗一下。

二 正負數及整式的四則

5. 正負數的加法 明確了正負數在代數中的性質,我們可以歸納出這樣的結論:

(1) 同號兩數相加,加其絕對值,原符號不變。如:

$$(+200)+(+150)=+350;$$

或
$$(-200)+(-150)=-350。$$

(2) 異號兩數相加,可求出絕對值的差,符號用絕對值大的數的符號。如:

$$(+200)+(-150)=+50;$$

或
$$(-200)+(+150)=-50。$$

從這裏我們可以瞭解正負數加法的兩個特例:

(1) 兩個相反的數之和等於零。如：

$(+5)+(-5)=0$；$(+a)+(-a)=0$。

(2) 某數加上零，或零加上某數，仍等於某數。如：

$(+25)+0=+25$；　$(-25)+0=-25$；

$0+(+3.5)=+3.5$；　$0+(-3.5)=-3.5$；

$(+a)+0=+a$；　$(-a)+0=-a$。

遇有幾個數的加法，首先求出前兩個加數的和，然後再加上第三個數……。但不必完全按照順序相加。如：

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3)=(+3)+(-4)+(+3)=(-1)+(+3)=2\text{。}$$

6. 正負數的減法　同算術數一樣，從兩數之和及其中的一個加數求另一加數的運算，叫做減法。此已知和叫做被減數，已知的加數叫做減數，而所求的另一加數叫做差。

我們知道在全部正負數減法中，都可用減數的相反數加被減數，來代替減法。換句話說，正負數的減法可以換成加法的形式來計算。由此我們可以得出下列法則：

減去某數，可將該數的符號改變與被減數相加。如：

$(+1000)-(+400)=(+1000)+(-400)=+600$。

或　$(-100)-(+800)=(-100)+(-800)=-900$。

根據這個法則，我們可用雙重符號的公式簡括地表達出來：

$$-(+a)=-a;\quad -(-a)=+a\text{。}$$

由此，用正負數可將任意兩數差寫成和的形式；同樣地，任意

兩數和也可以寫成差的形式。所以，在代數內一切正負數的加減法，都可以寫成加法的形式，這種方法叫代數加法。

加數可能是正數、負數或零，其和叫代數和。它與算術和相異之處即爲算術和中的加數都是普通的數，即算術數。

同樣，相對數的差叫代數差。例如：

(1) 將 $10-2-3+7$ 寫成代數和，就是 $10+(-2)+(-3)+7$。

(2) 將 $10+8$ 寫成代數差，就是 $10-(-8)$。

在算術中比較數值大小的概念，仍然可以擴充到正負數裏；也就是不論 a、b 爲正數或負數，如果 $a-b$ 爲正值，則 $a>b$；如 $a-b$ 爲負值，則 $a<b$。根據這個道理，我們可得下面的結論：

(1) 一切正數都大於零，更大於一切負數。如：

$$8>0, \quad 8>-10。$$

因爲，$8-0$ 與 $8-(-10)$，它們的差，都是正數。

(2) 一切負數都小於零，更小於正數。如：

$$-5<0, \quad -5<+2。$$

因爲，$-5-0$ 與 $-5-(+2)$，它們的差，都是負數。

(3) 兩個負數，其中絕對值小者，其值大。如：

$$-5>-12。$$

因爲，$-5-(-12)$ 之差等於 $+7$。

7. 正負數加減法的主要性質 算術中加減法的性質，與代數中正負數加減法的性質是一致的。

(1) 交換加數的位置，其和不變（加法交換律）。如：

$$(-10)+(-2)+(+40)=+28, \quad 而$$

$$(-2)+(+40)+(-10)=+28。$$

(2) 幾個數相加，可任意結合，然後將和相加，其結果不變（加法結合律）。如：

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3。$$

我們將式中第二個和第三個數相加，用其和代替，即

$$(+3)+(-1)=+2,$$

則 $(-4)+(+2)+(+5)=+3$。

(3) 向某數加幾個數之和，可用單個加數逐一相加。如：

$40+[20+(-5)+(+7)]=40+(+22)=62$。

但我們先向 40 加 20，然後加 -5，最後再加 $+7$，

$40+20=60$，$60+(-5)=55$，$55+(+7)=62$，

結果仍然相同。

(4) 從某數減幾個數之和，可以逐一減去各個數。如：

$$20-[10+(-4)+(-3)]=17。$$

但我們從 20 中先減去 10，再減去 (-4)，最後再減去 (-3)，

$20-10=10$，$10-(-4)=14$，$14-(-3)=17$，

結果仍然相同。

8. 正負數的乘法　在正負數的乘法中，我們可以歸納成以下各點：

(1) 求兩正負數的乘積，應將它們的絕對值相乘，再在此乘積

的絕對值之前，如兩數同號時，則置‘＋’號，異號時，則置‘－’號。如：

$$(+a)\cdot(+b)=+ab;\quad (-a)\cdot(+b)=-ab;$$

$$(+a)\cdot(-b)=-ab;\quad (-a)\cdot(-b)=+ab。$$

(2) 若乘數之一爲零，則乘積永遠等於零。如：

$$5\times 0=0;\qquad (-4)\times 0=0;$$

$$a\times 0=0;\qquad (-a)\times 0=0。$$

(3) 若三個數以上的乘積，則可將首兩個數先乘，再依次相乘，求其乘積。在這裏，我們特別要注意乘積的符號。若各乘數都是正數，則積亦爲正；但若乘數中有一部或全部是負數時，則負數的個數是偶數時，乘積爲正，是奇數時，乘積爲負。例如：

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6,$$

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60,$$

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240;\cdots\cdots$$

9. 正負數的除法　正負數的除法定義與算術中的除法定義相同，所要注意的是商的符號。我們提出下列兩點來：

(1) 兩數相除時，用除數的絕對值除被除數的絕對值，若兩數的符號相同時，其商爲正；符號相異時，其商爲負。

從這裏很明顯地可以知道，正負數除法的符號法則與乘法的符號法則相同。

(2) 當被除數或除數爲‘0’的時候，我們特別要注意。

(i) 若被除數爲零，但除數不等於零，則商一定爲零。如：

$0 \div (-2) = 0$, 因爲 $(-2) \times 0 = 0$;

$0 \div \frac{3}{4} = 0$, 因爲 $\frac{3}{4} \times 0 = 0$;……。

(ii) 若除數爲零,但被除數不是零,則不可能相除。如:

$(+5) \div 0$, $(-0.3) \div 0$……都不能相除。

因爲,我們都知道,用 0 乘任何數仍等於 0,此外不可能得出任何別的數,當然不可能等於 $+5$, -0.3 等的。

(iii) 如被除數與除數都爲零,在這種情況下,談論商數是無意義的;因爲任何數乘以零,其結果都仍是零。所以我們不能寫出 $\frac{0}{0}$ 的任何確定數值,它是沒有意義的。

10. 正負數乘除法的主要性質 算術中乘除的性質,同時也適用於正負數。

(1) 交換乘數的位置,其積不變(乘法交換律)。如:

$(-5)\cdot(+2) = -10$, 與 $(+2)\cdot(-5) = -10$;

$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{9}{20}$, 與 $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{9}{20}$。

(2) 幾個乘數相乘,其中乘數可以任意結合,其積不變(乘法結合律)。如:

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2) = (-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)]$$
$$= (+3)\cdot[(-5)\cdot(-2)]。$$

(3) 某數用幾個數的積相乘,可用第一個乘數乘該數,得數再乘以第二個乘數,依此類推。同樣,某數被幾個乘數的積相除,可用

第一個乘數除該數，所得結果，再除以第二數，依此類推。

可用公式來表示它們：

$$a(bc)=(ab)c=abc。$$

$$a\div(bc)=(a\div b)\div c。$$

(4) 若被除數與除數同時乘以（或除以）相同的數（但不得為零），其商之值不變。如：

$$\frac{5}{0.8}=\frac{5\times 3}{0.8\times 3}=\frac{15}{2.4}$$

寫成公式，

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}。$$

同理，且因除以某數卽等於乘此數的倒數，故可以證明被除數與除數同時除以相同的數時，其商之值不變。但必須注意，我們所用的乘數（或除數）不可為零，因為這樣所得的商是無意義的。

11. 中國古代的正負術 遠在紀元前二百餘年，漢張蒼等刪補的九章算術卷八方程章中有：「正負術曰：同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之；其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。」此術前半就是現在的正負數減法法則。卽是：同號相減，異號相加，由零減去正數得負數，由零減去負數得正數。後半是現在的正負數加法法則。卽是：異號相減，同號相加，零加以正數得正數，零加以負數得負數。

元朱世傑著算學啓蒙（公元1299年），卷首總括中亦有：「明正負術：其同名相減，則異名相加，正無入負之，負無入正之；其異名

相減，則同名相加，正無人正之，負無入負之。」更在明乘除段中有：「同名相乘爲正，異名相乘爲負。」在開方釋鎖門除述正負數乘法外，並有「同名相除所得爲正，異名相除所得爲負。」故在加減以外又說明了正負數的乘除法。此書並將九章算術正負術中的「除」字改爲「減」字。將「益」字改爲「加」字，比較容易懂些。

習　題　二

1. 應用交換律與結合律，以最簡捷的方法計算下列各和：

   1) $(-12)+(+11)+(-8)+(+39)$。

   2) $\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+(-0.5)+\left(+1\frac{1}{6}\right)$。

2. 演算：

   1) $6-[(-3)+(-7)]-[(-1)-(-5)-(-8)]$。

   2) $(-5.2)+(-3.8)-\{(-1.2)-[(-0.5)+(-0.7)]\}$。

3. 1) 一數加 10 得 (-17)，求此數。

   2) 假若一數增加 (-4)，另一數減少 (-7)，問兩數的和變了多少？

4. 演算：

   1) $\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-16)+(+0.5)\cdot(-5)\cdot(-4)$。

   2) $(-1)-\left(-5\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{4}{11}\right)$。

5. 演算：

$$(-12)\div[(-3)+(-15)]\div(+5)。$$

6. 求下列各數的倒數：

   1) $\left(-\frac{1}{4}\right)$；　2) (-0.01)；　3) $(+1)$。

7. 問 a 爲何值時才能够：1) $a<2a$；　2) $a=2a$；　3) $a>2a$。