

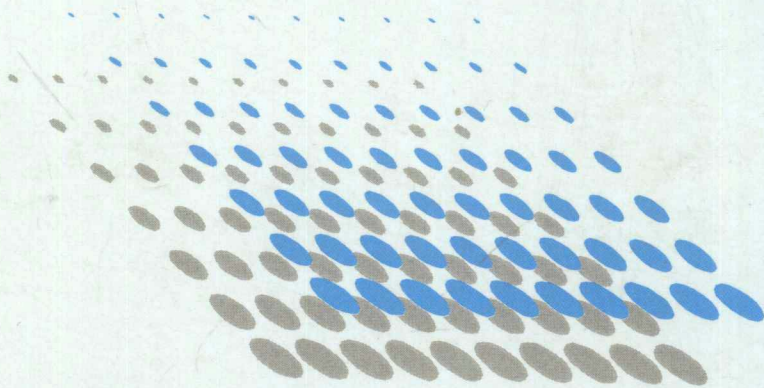


新编21世纪高职高专公共课系列规划教材

应用数学基础

(下册)

北京希望电子出版社 总策划
段 锋 主 编
谭仕炯 吴贤初 副主编



 科学出版社
www.sciencep.com



新编21世纪高职高专公共课系列规划教材

029
D921

应用数学基础

(下册)

北京希望电子出版社 总策划
段 锋 主 编
谭仕炯 吴贤初 副主编

内 容 简 介

《应用数学基础》是三年制中专和五年制高职各专业必修的一门公共课程。本书包括上下两册，上册是三年制中专和五年制高职的公用教材，下册是高职各不同专业的选修内容。上册的内容包括：直角坐标系，集合与不等式，函数，指数函数与对数函数，三角函数与反三角函数，直线与圆，数列，空间图形，排列组合与随机事件的概率；下册的内容包括：统计初步，复数，极限，导数及其应用，微积分初步。为方便学生对所学内容进行自测和检验，每一章都配有大量习题。

本书充分考虑了学生的年龄特点和接受能力，尽量做到由浅入深，循序渐进，简化理论，突出技能，通俗直观，难易适中。

本书可作为三年制中专和五年制高职的公共课教材，也可作为各高职高专学校相关专业的教材，还可供数学爱好者参考。

需要本书或技术支持的读者，请与北京清河 6 号信箱（邮编：100085）发行部联系，电话：010-82702660 010-82702658 010-62978181 转 103，传真：010-82702698，E-mail: tbd@bhp.com.cn。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础（下册）/ 段锋主编. —北京：科学出版社，

2005.8

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材

ISBN 7-03-005506-3

I. 应... II. 段... III. 高等学校：技术学校—教材

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 038436 号

责任编辑：王超辉

/ 责任校对：孙 红

责任印刷：朝 阳

/ 封面设计：刘孝琼

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京市朝阳区印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2005 年 8 月第一次印刷 印张：10

印数：1-3000 册 字数：225 000

总定价：39.00 元（本册 15.00 元）

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材编委会

主 任： 沈复兴 全国高等师范学校计算机教育研究会副理事长

北京师范大学信息科学学院院长

副主任： 唐汝元 湖南张家界航空职业技术学院副院长

刘小芹 湖北武汉职业技术学院副院长

刘南平 天津职业大学电子信息工程学院副院长

陆卫民 中国科学出版集团北京希望电子出版社社长

委 员： （按姓氏笔画为序）

邓泽银	田健龙	刘晓魁	向长喜	朱国军	吴贤初	周承华
欧阳广	罗文华	罗立红	胡红宇	胡远萍	赵征桥	徐刚强
郭国强	彭 勇	彭晓兰	曾凡秩	曾庆柏	蔡朝曦	魏道德

秘 书： 李节阳

总 序

一本好书，是人生前进的阶梯；一套好教材，就是教学成功的保证。为满足培养应用型人才的需要，我们成立了本编委会。在明确高职高专应用型人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系的框架下，我们组织编写了本套规划教材。

为了使本套教材能够达成目标，编委会做了大量的前期调研工作，在广泛了解各高职高专的教学现状、学生水平、培养目标的情况下，认真探讨了课程设置，研究了课程体系。为了编写出符合教学需求的好教材，我们除了聘请一批有关方面的知名专家、教授作为本套教材的主审和编委外，还组织了一批具备较高的学术水平、丰富的教学经验、较强的管理实践能力的学术带头人和骨干教师来承担具体编写工作，从而编写出特色鲜明、适用性强的教材，以真正满足目前高职高专应用型人才培养的需要。教材编写采用整体规划、分步实施、在实践中检验提高的方式，分期分批地启动编写计划。编写大纲以及教材编写方式的确定均经过编委会多次认真讨论，以确保该套教材的高质量和实用性。

本套规划教材的主要特点是：

(1) 以服务教学为最高宗旨，认真做好教学内容的取舍、教学方法的选取、教学成果的检验工作。本套教材在教学过程中的有益反馈，都将及时体现在后续版本。

(2) 充分考虑高职高专的人才培养目标，充分吸取已有教材的优点，并注意有所创新。在阐述好基本理论的基础上，突出务实；努力做到内容新颖，科学规范，结构严谨，理论联系实践。

(3) 教材中注意结合当前的具体问题做出分析，使学生能比较熟练地应用所学知识解决实际问题；从而努力做到既注重培养学生分析问题的能力，更注重培养学生解决问题的能力。

(4) 教材在内容编排上，力求由浅入深，循序渐进；举一反三，突出重点；语言简练，通俗易懂。采用模块化结构；兼顾不同层次的需求，在具体授课时可根据具体教学计划适当取舍内容。

(5) 大部分教材配有电子教案，从而更好地服务教学。

为编写本套教材，作者们付出了艰辛的劳动，编委会的各位专家进行了悉心的指导和认真的审定。丛书中参考、借鉴了国内外同类的优秀教材和专著，在此一并表示感谢。

我们衷心希望更多的优秀教师参与到教材建设中来，真诚希望广大教师、学生与读者朋友在使用本丛书过程中提出宝贵意见和建议。

若有投稿或建议，请发电子邮件到 textbook@bhp.com.cn。谢谢！

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材编委会

前 言

《应用数学基础》是三年制中专和五年制高职各专业必修的一门公共课程,是学生提高文化素质和学习专业知识的重要基础。

本书是为适应新形势下职业教育的特点而编写的。本书的编写以职业教育的培养目标为根本依据,遵循“突出重点,兼顾完备,强化技能,立足实用”的原则。我们认为,职业教育下的数学课程的开设目的,并不是要培养学生较高的数学素养,而应该把重点放在培养与各专业相适应的数学技能上,如图像分析、数形结合、简单的逻辑推理、图形计算、空间想象等等,因此,我们对这本书的内容的处理,在保证体系完备的前提下,对有的理论性较强或实用性不强的内容采取了简介、注释等不同的方式予以介绍,而对于各知识点的处理,也尽量体现理论为次、原理简单、突出应用的原则,即在使学生理解基本原理的基础上,会计算,会画图,会分析,会推理。本书的内容与九年制义务教育三年制初中数学相衔接。内容的编写充分注意了学生的年龄特点和接受能力,尽量做到由浅入深,循序渐进,简化理论,突出技能,通俗直观,难易适中。

本书包括上下两册,上册是三年制中专和五年制高职的公用教材,下册是高职各不同专业的选修内容。全书内容总授课时数为 288 节(包括习题课),三年制中专按 4 节/周开设两个学期,五年制高职按 4 节/周开设四个学期。上册的内容包括直角坐标系,集合与不等式,函数,指数函数与对数函数,三角函数与反三角函数,直线与圆,数列,空间图形,排列组合与随机事件的概率;下册的内容包括统计初步,复数,极限,导数及其应用,微积分初步。

书中的每一节,一般都在主要知识点后或这一节后配有“练习题”供课堂练习使用,每一节后配有“习题”,供课后作业使用。每一章后面都配有自测题,以供学生对本章所学内容进行自测和检验使用。

每一章后都有本章内容小结,包括本章的主要内容和应注意的问题,供复习本章时选用。

本书主编为段锋同志,副主编为谭仕炯和吴贤初同志。全书由段锋统稿。本套书第 1、2 章由杨芬同志编写,第 3、4 章由魏玉明同志编写,第 5 章由孙擎同志编写,第 6 章由余雪桂同志编写,第 7 章和第 12 章由段锋同志编写,第 8 章由郑文娟同志编写,第 9 章由袁秀玉同志编写,第 10 章由范良君同志编写,第 11 章由张兰同志编写,第 13 章由邓泽银同志编写,第 14 章由谭仕炯同志编

写。本书在编写过程中得到了有关领导和同志的大力支持，在这里向所有支持我们编写工作的领导和同志表示衷心的感谢。

由于经验不足，加之水平有限，同时我们希望在該套书的编写中体现出我们对职业教育下数学教学目的的理解，而这种理解当然是不成熟的和缺乏实践检验的，因此书中难免有错误和不足的地方，还有很多编写方法和处理方式值得商榷。真诚希望广大读者和同行提出宝贵意见，以便我们对該书的改进，我们将期待着广大读者和同行毫不吝惜的意见和建议，批评与指正。

编 者

目 录

第 10 章 统计初步	1
10.1 离散型随机变量	1
10.1.1 随机变量	1
10.1.2 离散型随机变量的分布列	2
10.2 离散型随机变量的期望与方差	4
10.2.1 期望	4
10.2.2 方差	6
10.3 随机抽样	8
10.4 总体分布的估计	13
10.5 正态分布	17
本章小结	20
自测题 10	21
第 11 章 复数	23
11.1 复数的概念	23
11.1.1 复数的定义	23
11.1.2 复数的几何表示	25
11.2 复数的四则运算	30
11.2.1 复数的加法与减法	30
11.2.2 复数的乘法与除法	31
11.3 复数的三角形式	33
11.3.1 复数的三角形式	33
11.3.2 复数三角形式的乘除运算	36
本章小结	39
自测题 11	40
第 12 章 极限	44
12.1 数列的极限	44
12.1.1 数列的极限定义	44
12.1.2 数列极限的运算	46
12.2 函数的极限	48
12.2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	48
12.2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	50
12.2.3 函数极限的四则运算	52
12.3 无穷大与无穷小	54
12.3.1 无穷大与无穷小的定义	54
12.3.2 无穷小性质的简介	56
12.3.3 具有极限的函数与无穷小	

的关系	56
12.4 两个重要极限	57
12.4.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	57
12.4.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	58
12.5 初等函数的连续性	61
12.5.1 初等函数	61
12.5.2 函数的连续性的定义	62
12.5.3 初等函数的连续性	64
12.5.4 闭区间上连续函数的最值性质	66
本章小结	67
自测题 12	70
第 13 章 导数及其应用	71
13.1 导数的概念	71
13.1.1 瞬时速度	71
13.1.2 曲线的切线	72
13.1.3 导数的定义	73
13.1.4 导数的几何意义	74
13.1.5 导函数	74
13.1.6 几个常用函数的导数	75
13.1.7 函数可导与连续的关系	76
13.2 函数的和、差、积、商的求导法则	77
13.3 复合函数的求导法则	80
13.4 隐函数求导法则	83
13.5 二阶导数	86
13.6 微分	88
13.7 函数的单调性	90
13.7.1 拉格朗日中值定理	90
13.7.2 两个重要推论	90
13.7.3 函数的单调性	91
13.8 函数的极值	93
13.8.1 函数极值的定义	93
13.8.2 函数的判断和求法	93
13.9 函数的最大值和最小值	95
13.9.1 闭区间上连续函数的最大值	

和最小值	95	14.4 微积分基本公式	116
13.9.2 实际问题中的最值举例	96	14.5 定积分的换元法与分部积分法	117
13.10 导数在经济上的应用	97	14.5.1 定积分的换元法	117
13.10.1 边际概念	97	14.5.2 定积分的分部积分法	118
13.10.2 边际成本	97	14.6 定积分在几何上的应用	120
13.10.3 边际收入	98	14.6.1 微元法	120
13.10.4 边际利润	99	14.6.2 平面图形的面积	121
13.10.5 最大利润	99	14.6.3 旋转体的体积	122
本章小结	100	14.7 定积分在物理上的应用	124
自测题 13	102	14.7.1 变力做功问题	124
第 14 章 积分及其应用	104	14.7.2 液体的静压力	125
14.1 不定积分	104	14.7.3 平均值	126
14.1.1 不定积分的概念	104	14.8 定积分在经济问题中的应用举例	128
14.1.2 基本积分公式	105	本章小结	130
14.1.3 不定积分的性质	106	自测题 14	131
14.2 不定积分的积分方法	108	附录 习题参考答案	133
14.2.1 第一类换元积分法 (凑微分法)	108	第 10 章	133
14.2.2 第二类换元积分法	110	第 11 章	137
14.2.3 分部积分法	111	第 12 章	138
14.3 定积分	113	第 13 章	139
14.3.1 定积分的实际背景	113	第 14 章	143
14.3.2 定积分的概念	114	附表 1 随机数表	146
14.3.3 定积分的几何意义	115	附表 2 标准正态分布	150
14.3.4 定积分的性质	115		

第 10 章 统计初步

10.1 离散型随机变量

10.1.1 随机变量

先看下面的问题：

某人射击一次，可能出现命中 0 环，命中 1 环，…，命中 10 环等结果，即可能出现的结果可以由 0, 1, …, 10 这 11 个数表示。

某次产品检验，在可能含有次品的 100 件产品中任意抽取 4 件，那么其中含有的次品可能是 0 件、1 件、2 件、3 件、4 件，即可能出现的结果可以由 0、1、2、3、4 这 5 个数表示。

在上面射击的随机试验中，可能出现的结果都可以用一个数即“环数”来表示，这个数在随机试验前是无法预先确定的，在不同随机试验中，结果可能有变化，就是说，这种随机试验的结果可以用一个变量来表示。在产品检验的随机试验中，结果也可以用“次品数”这个变量来表示。

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量。随机变量常用希腊字母 ξ 、 η 等表示。

例如，上面射击的命中环数是一个随机变量：

$\xi=0$ ，表示命中 0 环；

$\xi=1$ ，表示命中 1 环；

……

$\xi=10$ ，表示命中 10 环。

上面产品检验所取 4 件产品中含有的次品也是一个随机变量：

$\eta=0$ ，表示含有 0 个次品；

$\eta=1$ ，表示含有 1 个次品；

$\eta=2$ ，表示含有 2 个次品；

$\eta=3$ ，表示含有 3 个次品；

$\eta=4$ ，表示含有 4 个次品。

在上面的射击、产品的检验等例子中，对于随机变量可能取的值，我们可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量。

有的随机变量，它可以取某一区间内的一切值，看下面的例子：

(1) 某一自动装置无故障运转的时间 ξ 是一个随机变量，它可以取区间 $(0, +\infty)$ 内的一切值。

(2) 某林厂树木最高达 30m，则此林场树木的高度 η 是一个随机变量，它可以取 $(0,$

30)内的一切值.

在上面的无故障运转的时间、树木高度等例子中, 随机变量以取某一区间内的一切值, 这样的随机变量叫做连续型随机变量.

练习

1. 写出下列各随机变量可能取的值, 并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果:

- (1) 从 10 张已编号的卡片 (从 1 号到 10 号) 中任取一张, 被取的卡片的号数;
- (2) 一个袋中装有 5 个白球和 5 个黑球, 从中任取 3 个, 其中所含白球的个数;
- (3) 抛掷两个骰子所得点数之和;
- (4) 接连不断地射击, 首次命中目标需要的射击次数.

2. 举出一些随机变量的例子, 并指出是离散型随机变量, 还是连续型随机变量.

10.1.2 离散型随机变量的分布列

抛掷一个骰子, 设得到的点数为 ξ , 则 ξ 可能取的值有

1, 2, 3, 4, 5, 6

虽然在抛掷骰子之前, 我们不能确定随机变量 ξ 会取哪一个值, 但是却知道 ξ 取各值的概率等于 $\frac{1}{6}$ (见下表).

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

表中指出了随机变量 ξ 可能取的值, 以 ξ 取这些值的概率. 此表从概率的角度指出了随机变量在随机试验中取值的分布状况, 称为随机变量 ξ 的概率分布.

一般地, 设离散型随机变量 ξ 可能取的值为

$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$,

ξ 取每一个值 $x_i (i=1, 2, \dots)$, 概率 $P(\xi=x_i)=p_i$, 则称表达式

ξ	x_1	x_2	...	x_i	...
P	p_1	p_2	...	p_i	...

为随机变量 ξ 的概率分布, 简称为 ξ 的分布列.

由概率的性质可知, 任一离散型随机变量的分布列都具有下面两个性质:

(1) $p_i \geq 0, i=1, 2, \dots$;

(2) $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

例 某一射手射击所得的环数 ξ 的分布列如下:

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

求此射手“射击一次命中环数 ≥ 7 ”的概率。

分析：“射击一次命中环数 ≥ 7 ”是指互斥事件“ $\xi=7$ ”、“ $\xi=8$ ”、“ $\xi=9$ ”、“ $\xi=10$ ”的和，根据互斥事件的概率加法公式，可以求得此射手“射击一次命中环数 ≥ 7 ”的概率。

解 根据射手射击所得的环数 ξ 的分布列，有

$$P(\xi=7)=0.09$$

$$P(\xi=8)=0.28$$

$$P(\xi=9)=0.29$$

$$P(\xi=10)=0.22$$

所求的概率为

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 7) &= 0.09 + 0.28 + 0.29 + 0.22 \\ &= 0.88. \end{aligned}$$

一般地，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和。

练习

ξ	1	0
P	0.7	0.3

1. 篮球运动员在比赛中每次罚球中得1分，罚不中得0分。已知运动员罚球命中的概率为0.7，求他罚球1次得分的分布列。

ξ	0	1	2	3	4	...	15
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$

2. 袋中共有50个大小相同的球，其中记上0号的5个，记上*n*号的有*n*个($n=1, 2, \dots, 9$)。现从袋中任取一个球，求所取球的号数的分布列以及取出的球的号数是偶数的概率。

3. 抛掷5枚硬币，求出得到正面向上的次数 ξ 的分布列。

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

习题 10-1

1. 写出下列随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果：

(1) 袋中有大小相同的红球10个，白球5个。从袋中每次任意取出1个球，直到取出的球是白球为止所需要的取球次数： $\xi = 1, 2, 3, 4, \dots, 11$

(2) 袋中有大小完全相同的红球10个，白球5个。从袋中每次任意取出一个球，若取出一个白球则结束；若取出一个红球则放回袋中继续从袋中任意取出一球，直到取出的球是白球为止所需要的取球次数： $\xi = 1, 2, 3, 4, \dots$

(3) 从标有1、2、3、4、5、6的6张卡片中任取2张，所取卡片的数之和；共有 C_6^2 种组合

(4) 某人每天早晨在某公共汽车站等某一路车的时间。 $\xi = t$

2. 从编号为1, 2, ..., 20的20个大小完全相同的球中任意取一个球，求所取球的号数的分布列。 $\xi = 1, \dots, 20$ $P = \frac{1}{20}$

3. 某射手射击击中目标的概率为0.9，求从开始射击到击中目标所需要的射击次数 ξ 的概率分布。 $\xi = 1, \dots, n$ 24事件

4. 连续抛掷两个骰子，求所得的两个骰子的点数之和的概率分布。 $\xi = 2, \dots, 12$ 有序

5. 已知随机变量 ξ 所有可能取值是1, 2, ..., *n*，且取这些值的概率依次是*k*, 2*k*, ..., *nk*，求常数*k*的值。 $\sum_{k=1}^n k = 1$

10.2 离散型随机变量的期望与方差

对于离散型随机变量,确定了它的分布列,就掌握了随机变量取值的统计规律.在实际问题中,我们还常常希望通过数字来反映随机变量的某个方面的特征,最常用的有期望与方差.

10.2.1 期望

某射手射击所得环数 ξ 的分布列如下:

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

在 n 次射击之前,虽然不能确定各次射击所得的环数,但可以根据已知的分布列估计 n 次射击的平均环数.

根据这个射手射击所得环数 ξ 的分布列,在 n 次射击中,预计有大约

$$P(\xi=4) \times n = 0.02n \quad \text{次得 4 环,}$$

$$P(\xi=5) \times n = 0.04n \quad \text{次得 5 环,}$$

.....

$$P(\xi=10) \times n = 0.22n \quad \text{次得 10 环.}$$

n 次射击的总环数约等于

$$4 \times 0.02 \times n + 5 \times 0.04 \times n + \dots + 10 \times 0.22 \times n$$

$$= (4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 + \dots + 10 \times 0.22) \times n$$

从而 n 次射击的平均环数等于

$$4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 + \dots + 10 \times 0.22 = 8.32.$$

类似地,对任一射手,若已知其射击所得环数 ξ 的分布列,即已知各个 $P(\xi)$ ($i=0,1,2,\dots,10$),则可预计他任意 n 次射击的平均环数是

$$E\xi = 0 \times P(\xi=0) + 1 \times P(\xi=1) + \dots + 10 \times P(\xi=10).$$

我们称之为此射手射击所得的环数 ξ 的期望,它刻画了随机变量 ξ 所取的平均值,从一个方面反映了射手的射击水平.

一般地,若离散型随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

则称

$$E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + \dots$$

为 ξ 的数学期望或平均数、(均值) 又简称为期望.它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

例 1 篮球运动员在比赛中每次罚球命中得 1 分,罚不中得 0 分.已知某运动员罚球命中的概率为 0.7,求他罚球 1 次的得分 ξ 的期望.

ξ	1	0
P	0.7	0.3

$$E\xi = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 = 0.7$$

解 因为 $P(\xi=1)=0.7$, $P(\xi=0)=0.3$, 所以

$$\begin{aligned} E(\xi=1) &= 1 \times P(\xi=1) + 0 \times P(\xi=0) \\ &= 1 \times 0.7 + 0 \times 0.3 \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

例2 随机抛掷一个骰子, 求所得骰子的点数 ξ 的期望.

解 抛掷骰子所得点数 ξ 的概率分布为

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以

$$\begin{aligned} E\xi &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} \\ &= 3.5. \end{aligned}$$

例3 有一批数量很大的产品, 其次品率是 15%. 对这批产品进行抽查, 每次抽出 1 件, 如果抽出次品, 则抽查终止, 否则继续抽查, 直到抽出次品, 但抽查次数最多不超过 10 次. 求抽查次数 ξ 的期望 (结果保留 3 位有效数字).

解 抽查次数 ξ 取 1~10 的整数, 从这批数量很大的产品中每次抽取一件检查的试验可以认为是彼此独立的, 取出次品的概率是 0.15, 取出正品的概率是 0.85, 前 $k-1$ 次取出正品而第 k 次 ($k=1, 2, \dots, 9$) 取出次品的概率

$$P(\xi=k) = 0.85^{k-1} \times 0.15, (k=1, 2, \dots, 9);$$

需要抽查 10 次即前 9 次取出的都是正品的概率

$$P(\xi=10) = 0.85^9.$$

由此可得 ξ 的概率分布如下:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.15	0.1275	0.1084	0.0783	0.0566	0.0481	0.5566	0.0481	0.0409	0.316

根据以上的概率分布, 可得 ξ 的期望

$$\begin{aligned} E\xi &= 1 \times 0.15 + 2 \times 0.1275 + \dots + 10 \times 0.2316 \\ &= 5.35. \end{aligned}$$

练习

1. 离散型随机变量的期望一定是它在试验中出现的概率最大的值吗? 举例说明你的判断.
2. 已知随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

求 $E\xi$.

3. 抛掷一枚硬币, 规定正面向上得 1 分, 反面向上时得 -1 分, 求得分 η 的期望.

4. 一个袋子里装有大小相同的 5 个白球和 5 个黑球, 从中任取 4 个, 求其中所含白球个数的期望.

5. 一名射手击中靶心的概率是 0.9, 他连续射击 10 次, 如果每次射击的结果互不影响, 求他击中靶心的次数的期望.

10.2.2 方差

在初中代数中曾经介绍过一组数据的方差. 设在一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中, 各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方分别是 $(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$, 那么

$$S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$$

叫做这组数据的方差. 方差说明了这组数据的波动情况.

类似地, 如果离散型随机变量所有可能取的值是

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

且取这些值的概率分别是

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

那么, 把

$$D\xi = (x_1 - E\xi)^2 \cdot p_1 + (x_2 - E\xi)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - E\xi)^2 \cdot p_n + \dots$$

叫做随机变量 ξ 的均方差, 简称为方差. 式中 $E\xi$ 是随机变量 ξ 的期望, $D\xi$ 的算术平方根

$\sqrt{D\xi}$ 叫做随机变量 ξ 的标准差, 记作 $\sigma\xi$. 随机变量的方差与标准差都反映了随机变量取

值的稳定与波动、集中与离散的程度. 其中标准差与随机变量本身有相同的单位.

例 4 已知离散型随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	1	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

求 ξ 的期望、方差与标准差.

$$\begin{aligned} \text{解 } E\xi &= 1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{1}{7} + \dots + 7 \times \frac{1}{7} \\ &= (1+2+\dots+7) \times \frac{1}{7} \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$D\xi = (1-4)^2 \times \frac{1}{7} + (2-4)^2 \times \frac{1}{7} + \dots + (7-4)^2 \times \frac{1}{7}$$

$$= (3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + \dots + 3^2) \times \frac{1}{7}$$

$$= 4.$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = 2.$$

例5 甲、乙两名射手在同一条件下进行射击，分布列如下表：

射手甲			
击中环数 ξ_1	8	9	10
概率 P	0.2	0.6	0.2

射手乙			
击中环数 ξ_2	8	9	10
概率 P	0.4	0.2	0.4

用击中环数的期望与方差分析比较两名射手的射击的水平.

解 $E\xi_1 = 8 \times 0.2 + 9 \times 0.6 + 10 \times 0.2 = 9.$

$$D\xi_1 = (8-9)^2 \times 0.2 + (9-9)^2 \times 0.6 + (10-9)^2 \times 0.2$$

$$= 0.4.$$

$$E\xi_2 = 8 \times 0.4 + 9 \times 0.2 + 10 \times 0.4 = 9.$$

$$D\xi_2 = (8-9)^2 \times 0.4 + (9-9)^2 \times 0.2 + (10-9)^2 \times 0.4$$

$$= 0.8.$$

由以上可知， $E\xi_1 = E\xi_2$ ， $D\xi_1 < D\xi_2$ 。所以，在射击之前，可以预测甲、乙两名射手所得环数的平均值很接近，均在9环左右。但射手甲所得环数比较集中，得9环较多，而射手乙所得环数比较分散，得8环和10环的次数要多些。

练习

1. 已知随机变量的分布列如下表：

ξ	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求 $D\xi$ 。

2. 设随机变量 ξ 满足 $P(\xi=c)=1$ ，求 $D\xi$ 。

3. 设随机变量 ξ 满足 $P(\xi=1)=p$ ， $P(\xi=0)=1-p$ ，求 $E\xi$ 和 $D\xi$ 。

4. 方差在实际中有什么用？举例说明。

习题 10-2

1. 一个盒子里装有5张卡片，分别标有数2、3、4、5、6；另一个盒子里则装有分别标有3、4、5、6、7五个数的5张卡片。

(1) 从第1个盒子里任意取出一张卡片，求此卡片上的数的期望。

(2) 从两个盒子里各任意取一张卡片，求所取出的两张卡片的数之和的期望。

2. 一批数量较大的商品的次品率为6%，从中任意地陆续取出20件，求其中次品数 ξ

的期望。

3. 抛掷两个骰子, 当至少有一个 5 点或一个 6 点出现时, 就说这次试验成功. 求在 30 次试验中成功次数 η 的期望。

4. 有甲乙两种棉花, 从中各抽取等量的样品进行检验, 结果如下:

$\xi_{\text{甲}}$	28	29	30	31	32
P	0.1	0.15	0.5	0.15	0.1

$\xi_{\text{乙}}$	28	29	30	31	32
P	0.13	0.17	0.4	0.17	0.13

其中 ξ 表示纤维长度 (单位: mm), 试根据纤维长度的期望与方差比较两种棉花的质量。

$$E\xi_{\text{甲}} = 30$$

$$E\xi_{\text{乙}} = 30$$

$$D\xi_{\text{甲}} =$$

$$D\xi_{\text{乙}} =$$

10.3 随机抽样

抽样方法

在初中, 我们学习过一些统计知识, 了解统计的基本思想方法是用样本估计总体, 即通常不是直接去研究总体, 而是通过从总体中抽取一个样本, 根据样本的情况去估计总体的相应情况。例如, 我们通常用样本平均数去估计总体平均数。这样, 样本的抽取是否得当, 对于研究总体来说十分关键。

那么, 怎样从总体中抽取样本呢? 怎样使所抽取的样本能更充分地反映总体的情况呢? 下面介绍 3 种常用的抽样方法。

10.3.1.1 简单随机抽样

假定一个总体含有 6 个个体, 要通过逐个抽取的方法从中抽取一个容量为 3 的样本。如果第 1 次抽取时每个个体被抽到的概率都是 $\frac{1}{6}$; 第 2 次抽取时, 余下的每个个体被抽到的概率都是 $\frac{1}{5}$; 第 3 次抽取时, 余下的每个个体被抽到的概率都是 $\frac{1}{4}$, 那么就说这种抽样为简单随机抽样。

一般地, 设一个总体的个体数为 N 。如果通过逐个抽取的方法从中抽取一个样本, 且每次抽取时各个个体被抽到的概率相等, 就称这样的抽样为简单随机抽样。

在上面的例子中, 如果把先后抽取 3 个个体看成是一次完整的抽样过程, 那么我们关心的是: 在整个抽样过程中, 每个个体被抽取的概率是否相等?

一般地, 对于简单随机抽样来说, 我们关心的是: 整个抽样过程中每个个体被抽到的概率是否相等?

例如, 要用简单随机抽样从含有 6 个个体的总体中抽取一个容量为 2 的样本。抽样过程中, 总体中的每个个体被抽到的概率是否相等?

回答是肯定的。事实上, 对于总体中的任意指定的个体 a 来说, 在从总体中抽取第 1 个