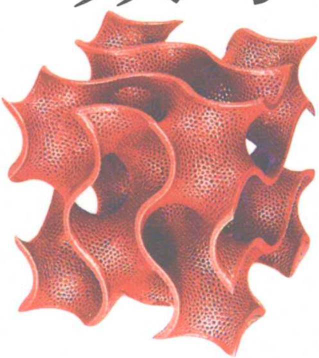
教师基本功丛书 · 数学教师卷

◎编著 任升录 黄根初
沈全洪 尹德好

数学作业的设计与评价

ShuXueZuoYeDeSheJiYuPinJia



华东师范大学出版社

教师基本功丛书
数学教师卷

数学 作业的设计与评价

编著　任升录　黄根初　沈全洪　尹德好

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学作业的设计与评价/任升录等编著.—上海:华东师范大学出版社,2009
(教师基本功丛书·数学教师卷)
ISBN 978-7-5617-7239-3

Ⅰ.数… Ⅱ.任… Ⅲ.数学课—教学研究—中小学
Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第185368号

教师基本功丛书·数学教师卷
数学作业的设计与评价

编　著　任升录　黄根初　沈全洪　尹德好
策划组稿　李文革
审读编辑　平　萍　曹祖红
封面设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏句容排印厂
开　本　890×1240　32开
印　张　8
字　数　209千字
版　次　2009年10月第一版
印　次　2009年10月第一次
印　数　3100
书　号　ISBN 978-7-5617-7239-3/G·4190
定　价　16.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

前　言

本书的读者对象为中小学教师和普通教育研究人员。

数学作业的设计与评价是数学教学的重要组成部分。本书从我国中小学数学作业的现状出发,结合案例,对数学作业的各个环节进行了分析。具体包括设计、布置、批改、管理、讲评五部分,都是具有很强的教师个性实践特征的内容。

全书共分四章。第一章是数学作业的概论,主要对数学作业的现状、意义和类型作了描述性分析。第二章介绍数学作业设计的意义、原则以及如何设计不同课型的数学作业。第三章结合案例对作业布置的要求、批改的意义和原则、批改的方法以及作业的管理进行了较为详细的分析。第四章主要介绍作业讲评的原则、内容,并结合实例简要介绍讲评的方法。考虑到本书的主要读者对象,在写作过程中尽量贴近教学实际,注重实践操作,能用实例的地方尽量用实例说明。

全书的整体构思由任升录、黄根初、沈全洪共同讨论形成,任升录列出写作提纲。全书初稿第一章由任升录完成,第二章由黄根初完成,第三章由尹德好和任升录共同完成,第四章由沈全洪完成,蔡莉娜参与了部分内容的编写。最后由任升录作了统稿和润饰。评价思想贯穿全书,全书各章既是有机联系的整体,又自成体系。

作业凝聚着老师们辛勤的劳动,包含着深深的师生情怀。中小学教师都要为自己的学生准备作业,每一位数学教师对作业的设计与批改都有自己的理解,形成了约定俗成的操作方法,讲评的实践经验也十分丰富。本书的作者都长期在中小学第一线从事数学教

学和教学研究工作，因此，全书内容是作者教学中做法和思考的一种反映。

华东师范大学出版社基础教育分社李文革先生对本书的选题与出版给予了很多具体的指导和建议，上海市静安区教育学院在成书过程中给予了切实的关怀。上海市华东模范中学徐鑫老师和成梁老师、上海市培明中学敖金昱老师和桂齐复老师、上海市民立中学陈洁玉老师、上海市育才初级中学王进敬老师和但水平老师等为本书的编写提供了部分素材和案例，在此谨致以谢意。

本书在编著过程中，参阅了很多文献，并引用了其中的一些材料，一般在引用时都已注明出处，个别案例是取自一些学校的网上材料，也都注明了来源。由于写作时间跨度较长，有些文献未在正文中一一列出标明，谨在书后参考文献中列出，在此表示衷心的感谢！

由于编著者水平和资料所限，加上作业设计与评价的多元化特征，书中难免存在瑕疵和争议，祈请专家与同行不吝赐教，并欢迎广大读者批评指正。

任升录

2009年9月于上海

目　录

第一章 数学作业概论

第一节 数学作业的现状分析

作业一直是学校教学工作的一个重要组成部分。近年来，随着“减负”、“增效”问题引起人们的关注，对作业的看法已经成了争论的焦点。拥护者认为作业特别是家庭作业可以鼓励学生的主动性，培养独立学习的技能，让学生有时间巩固、应用和适当拓展在学校所学的知识；批评者认为作业侵占了学生太多的时间，使他们不能自由参加课外活动或户外活动。

一、数学作业的案例呈现

对作业的意见虽然很难统一，但对它的性质和目的还是有大体一致的看法：它是正式布置的学校功课。关于家庭作业的问题，在这几十年间不断引起教育者和家长的讨论和思考。这些讨论中包含了三个基本的问题：家庭作业是否有助于学生的学习？布置多少家庭作业才是合适的？布置什么类型的家庭作业才是最好的？[①] 我们从两类案例开始展开讨论。

① 施良方，崔允漷主编.《教学理论：课堂教学的原理、策略与研究》. 华东师大出版社，1999 年 8 月，第 360 页

（一）数学特级教师的作业设计案例

数学特级教师设计作业的方式、方法对于我们进行作业研究具有指导意义，特别是他们在具体操作中所积累的宝贵经验，成为教师进行作业设计时的坐标，因此通过对他们所设计的作业进行分析和研究，可以为作业研究提供实践方面的参考。

案例："线段的垂直平分线"作业（课堂）[①]

1. 基础性诊断作业

问题：在公路的同侧有两个村庄，现要在公路上建一车站，使车站距两村的距离相等，如何确定车站的位置？

数学化处理：把公路命名为 L，把两个村庄命名为 A、B，待建的车站命名为 C。学生画出草图，经过讨论分析，得出：(1)车站 C 在公路 L 上；(2)车站 C 到 A、B 两村的距离相等。解决问题的关键在于找出所有满足条件(2)的点。

2. 发展性诊断作业

问题：能否找到一个点，使它到 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 的距离相等？这样的点若存在，有几个？如何找？在什么位置？

处理：引导学生运用集合的思想，采用交轨方法展开讨论，交流学生相互讨论的结果，教师完善。

3. 理解性诊断作业

(1) 如图 1，DE 是 $\triangle ABC$ 边 AB 的垂直平分线，交 AB、BC 于 D、E。若 $BD=3$，则 $AD=$________；若 $\angle B=40^\circ$，$\angle BAC=70^\circ$，则 $\angle CAE=$________。

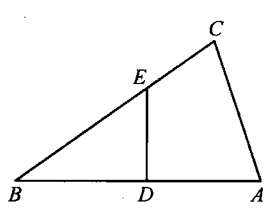


图 1

(2) 已知线段 AB，1）若 $CA=CB$，问：过 C 点的直线是不是线段 AB 的垂直平分线？为什么？2）若 $CA=CB$，$DA=$

---

① 赵公明."线段垂直平分线"教案,《中学数学名师教学艺术》(雷玲主编).华东师大出版社,2008 年 3 月,第 161 页

DB，问：过 C 和 D 两点的直线是不是线段 AB 的垂直平分线？为什么？

(3) 已知：如图 2 所示，在△ABC 中，边 AB、BC 的垂直平分线相交于点 P。求证：$PA = PB = PC$。

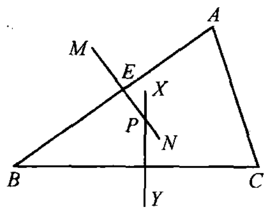


图 2

4. 自主性诊断作业

已知：∠AOB 和∠AOB 内两点 C、D，(1)求作∠AOB 的平分线；(2)求作点 P，使 $PC = PD$，且 P 点到∠AOB 两边的距离相等。

案例分析：本作业设计按照 4 个阶梯设计，层次分明，重心突出，围绕“线段垂直平分线”与“到线段两个端点距离相等的所有点”之间的关系，以及应用于解决一些点的位置等问题，通过恰当的作业，让学生掌握线段的垂直平分线定理、逆定理，并能够进行有关应用。通过各有训练侧重点的组合，教师较为清晰地把握了学生学习过程中存在的问题，较为准确地对学生进行有效的诊断，较为准确地提升学生的思维水平，从而有效地提高教学质量，最大可能地促进学生的发展。

虽然本设计是用于课堂作业，但是对于一般作业的设计与讲评具有很好的启发意义。

每位学生都有自己的期望，老师对学生也有期望。老师应尊重学生自己的期望，给学生一些机会，让他自己去体验，学生就会懂得珍惜。给学生一些困难，让他自己去解决，学生就会生长勇气。给学生一些问题，让他自己去找答案，学生就会增长智慧。给学生一些条件，让他自己去锻炼，学生就会懂得成长。给学生一片空间，让他自己向前走，学生就会成为自己发展和成长的主人。老师为学生搭建“成功阶梯”，即每一位学生通过自己的努力克服了困难后而取得学习的新收获、成长的新起点、发展的新高度，最大限度地促进学生自主学习。[①]

① 赵公明. 课堂教学艺术之一：“备”学生的妙招，《中学数学名师教学艺术》(雷玲主编). 华东师大出版社，2008 年 3 月，第 149—150 页

（二）成熟数学教师的作业布置与批改案例

成熟数学教师一般指在同一学段从事数学教学工作 5 年以上的、能够独立承担教育教学工作的教师。他们的作业设计与评价水平从一个方面反映了当前教师的普遍水平，对我们真实了解数学作业的现状具有一定的研究意义。

案例：上海市某重点中学高中教龄 8 年的一级中学教师，在高一指数方程和对数方程三节课所布置的课后作业。

2009 年 2 月 12 日，指数方程和对数方程第一节课（基本内容）课后作业：

1. 解指数方程 $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^{x}$。

2. 解指数方程 $3^{x}-3^{-|x|}=2$。

3. 解方程 $(\log_4 x)^2-\dfrac{1}{2}|\log_2 x|-2=0$。

4. 已知 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0,\ a\neq 1)$，解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$。

5. 已知 $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$，$f(\lg a)=\sqrt{10}$，求 a。

说明：上海高中教材把《幂函数、指数函数和对数函数》分为上、下两部分，其中“下”包括对数、对数函数的图象和性质、简单的指数方程与对数方程等内容，在高一第二学期开始阶段教授。由于是重点中学，学生水平普遍较高，所以教学进度较快、深度较深，课本配套练习基本上都在课堂上处理完毕，非常基本的习题由学生自行处理。课后作业绝大多数是教师额外编选的习题，难度起点是课本练习，整体难度高于课本要求。

2009 年 2 月 13 日，指数方程和对数方程第二节课（提高内容）课后作业：

1. 已知 $25^x-a\cdot 5^x+a=0$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围。

2. 已知 $4^x+a\cdot 2^x+a+1=0$ 有实数解，求 a 的取值范围。

3. 已知方程 $\ln^2 x-\ln x^2-2=0$ 的两根为 α、$\beta(\alpha>\beta)$，1）求

$\alpha\cdot\beta$; 2)求$\frac{\alpha}{\beta}$。

4. 若关于 x 的方程 $\lg(ax)\cdot\lg(ax^2)=4$ 有两个小于 1 的正根，求 a 的取值范围。

5. 已知 $f(x)=x^2\lg a+2x+4\lg a$ 的最大值为 3，求 a。

6. 关于 x 的方程 $\log_2 x+1=2\log_2(x-a)$ 恰有一解，求 a 的取值范围。

说明：由于 2 月 13 日是星期五，老师另外还印发了一份周末练习卷，包含填空题 13 道、选择题 5 道、解答题 6 道，内容涉及指数函数、对数函数以及指数方程和对数方程的内容，具有相当的综合性，还有一道具有实际意义的应用题。

2009 年 2 月 16 日，指数方程和对数方程第三节课（提高内容）课后作业：

1. 解方程 $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$。

2. 已知 $f(x)=\log_a x\ (2\leqslant x\leqslant 4)$ 最大值比最小值大 2，求 a。

3. 已知 $f(x)=x^2-x+k$，满足 $\log_2 f(a)=2$，$f(\log_2 a)=k$ $(a>0,\ a\neq 1)$，求 $f(\log_2 x)$ 的最小值及相应的 x。

4. 在圆内，1 弧度的圆心角所对的弦长为 2，则这个圆心角所对的弧长为多少？

5. 扇形 OAB 的面积为 1 cm^2，周长为 4 cm，求它的圆心角和弦 AB 的长。

说明：由于星期一的数学课在下午，老师已经对周末训练卷作了批阅，所以上课开始的半节课订正讲评了该卷几道学生出错较多的题目，后半节课讲授新课《弧度制》，所以选择了 3 道复习性的题目，加上 2 道新课题目。

学生作业情况扫描与分析

说明：为保持学生作业原貌，按照学生原始作业本顺序自然扫描，没有做进一步的加工。

1. $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^{x}$

解 $5^{x-1}\cdot 5^{3x}\cdot 2^{3x}=2^{3x}$

$x-1+3x=0$

$x=\frac{1}{4}$

2. $3^{x}-3^{-|x|}=2$

解 1° $x\geq 0$

$3^{x}-3^{-x}=2$

$3^{2x}-1=2\cdot 3^{x}$

$3^{2x}-2\cdot 3^{x}-1=0$

设 $3^{x}=t$ $(t>0)$

$t^{2}-2t-1=0$

$t=1+\sqrt{2}$ $t=1-\sqrt{2}$ (舍) $3^{x}=1+\sqrt{2}$ $x=\log_{3}(1+\sqrt{2})$

2° $x<0$ $0=2$ 无解 ∴ $x=\log_{3}(1+\sqrt{2})$

3. $(\log_{4}x)^{2}-\frac{1}{2}|\log_{2}x|-2=0$

解 $(\log_{4}x)^{2}-|\log_{4}x|-2=0$

$(|\log_{4}x|+1)(|\log_{4}x|-2)=0$

∴ $|\log_{4}x|+1=0$ 或 $|\log_{4}x|-2=0$

$|\log_{4}x|=-1$ (舍去) $|\log_{4}x|=2$

∴ $x=16$ 或 $x=\frac{1}{16}$

经检验 $x=16$ 或 $x=\frac{1}{16}$ 是方程的解

4. 已知 $f(x)=\log_{a}(a^{x}-1)$ $(a>0, a\neq 1)$

解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$

解 $y=\log_{a}(a^{x}-1)$

$a^{y}=a^{x}-1$

$a^{x}=a^{y}+1$

$x=\log_{a}(a^{y}+1)$

∴ $f^{-1}(x)=\log_{a}(a^{x}+1)$

∴ $\log_{a}(a^{2x}-1)=\log_{a}(a^{x}+1)$

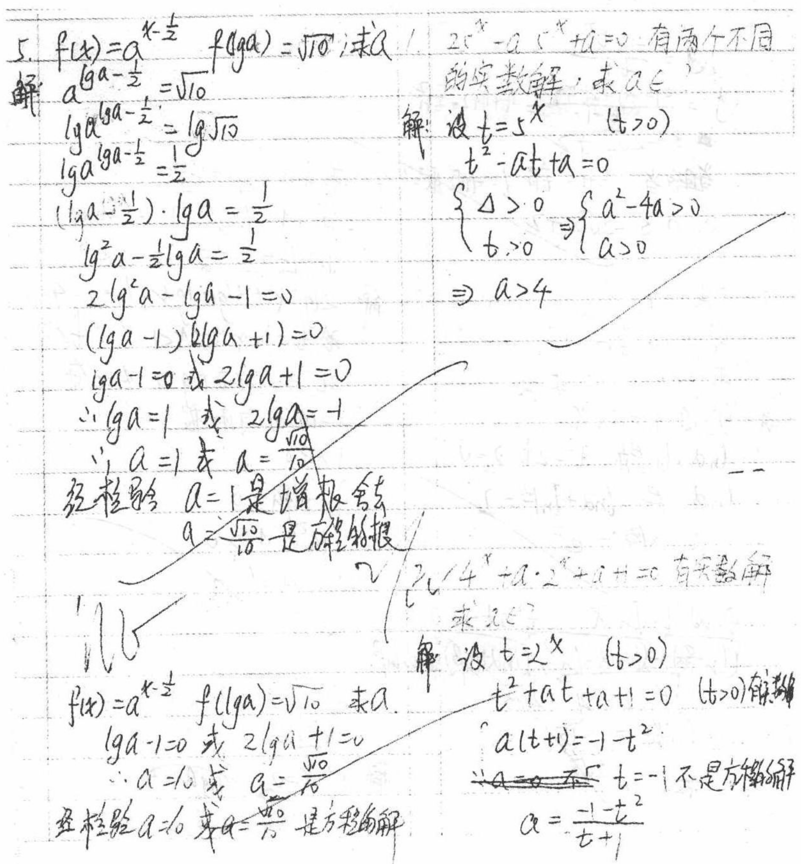
$a^{2x}-1=a^{x}+1$

$a^{2x}-a^{x}-2=0$

$a^{x}=2$ 或 $a^{x}=-1$ (舍)

∴ $x=\log_{a}2$

经检验 $x=\log_{a}2$ 是方程根



5. $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$ $f(\lg a)=\sqrt{10}$ 求 a

解 $a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

$\lg a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\lg\sqrt{10}$

$\lg a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$(\lg a-\frac{1}{2})\cdot\lg a=\frac{1}{2}$

$\lg^2 a-\frac{1}{2}\lg a=\frac{1}{2}$

$2\lg^2 a-\lg a-1=0$

$(\lg a-1)(2\lg a+1)=0$

$\lg a-1=0$ 或 $2\lg a+1=0$

$\therefore \lg a=1$ 或 $2\lg a=-1$

$\therefore a=1$ 或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$

经检验 $a=1$ 是增根舍去

$a=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 是方程的根

$f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$ $f(\lg a)=\sqrt{10}$ 求 a.

$\lg a-1=0$ 或 $2\lg a+1=0$

$\therefore a=10$ 或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$

经检验 $a=10$ 或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 是方程的解

$25^x-a\cdot 5^x+a=0$ 有两个不同的实数解，求 $a\in$

解 设 $t=5^x$ $(t>0)$

$t^2-at+a=0$

$\begin{cases}\Delta>0\\ t>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-4a>0\\ a>0\end{cases}$

$\Rightarrow a>4$

2. $4^x+a\cdot 2^x+a+1=0$ 有实数解 求 $a\in$

解 设 $t=2^x$ $(t>0)$

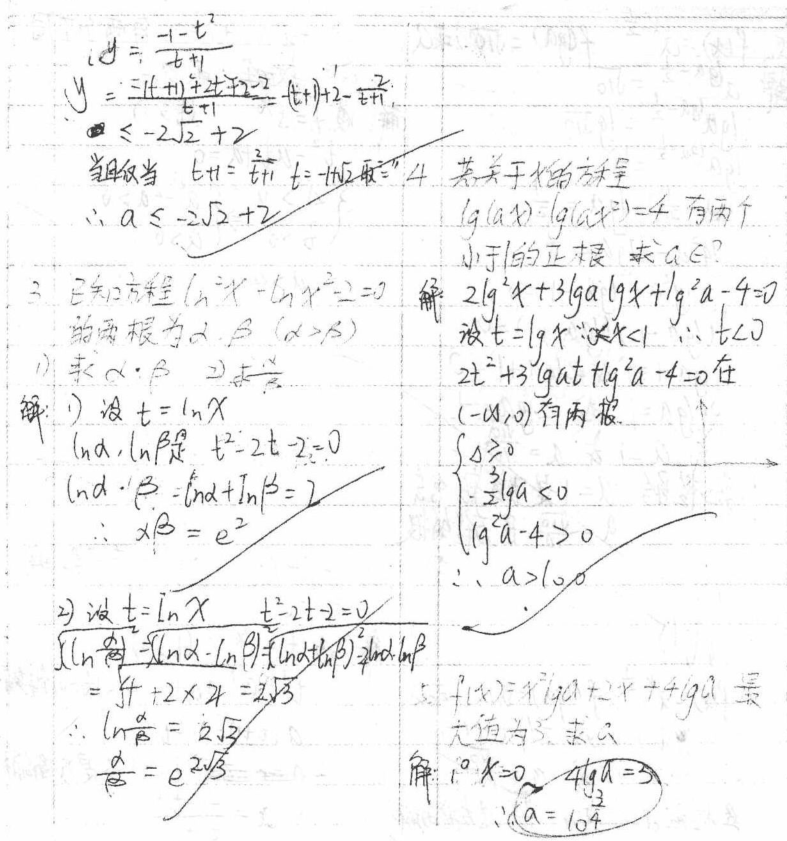
$t^2+at+a+1=0$ $(t>0)$ 有解

$a(t+1)=-1-t^2$

$\because$ $t=-1$ 不是方程的解

$a=\frac{-1-t^2}{t+1}$

分析：本次作业学生前 4 道完全正确，书写也比较规范，表明该生对绝对值的意义、因式分解、指数方程和对数方程的基本解法都已经很好地掌握。第 5 题的解答在总体上也是正确的，只是由 $\lg a=1$ 错误得出 $a=1$，这是对以 10 为底的常用对数不熟悉。我们看到在订正时，学生整题解答都重新写了一遍，题目也重新抄了一遍，经了解这是老师的要求。



$\therefore y=\frac{-1-t^2}{t+1}$

$y=\frac{-(t+1)^2+2(t+1)-2}{t+1}=-(t+1)+2-\frac{2}{t+1}$

$\le -2\sqrt{2}+2$

当且仅当 $t+1=\frac{2}{t+1}$ $t=-1+\sqrt{2}$ 取"="

$\therefore a\le -2\sqrt{2}+2$

3. 已知方程 $\ln^2 x-\ln x^2-2=0$ 的两根为 α、β $(\alpha>\beta)$

1) 求 $\alpha\cdot\beta$ 2) 求 $\frac{\alpha}{\beta}$

解: 1) 设 $t=\ln x$

$\ln\alpha$, $\ln\beta$ 是 $t^2-2t-2=0$

$\ln\alpha\cdot\beta=\ln\alpha+\ln\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=e^2$

2) 设 $t=\ln x$ $t^2-2t-2=0$

$\sqrt{(\ln\frac{\alpha}{\beta})^2}=\sqrt{(\ln\alpha-\ln\beta)^2}=\sqrt{(\ln\alpha+\ln\beta)^2-4\ln\alpha\ln\beta}$

$=\sqrt{4+2\times4}=2\sqrt{3}$

$\therefore \ln\frac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{3}$

$\frac{\alpha}{\beta}=e^{2\sqrt{3}}$

4. 若关于x的方程 $\lg(ax)\cdot\lg(ax^2)=4$ 有两个小于1的正根 求 $a\in$?

解 $2\lg^2x+3\lg a\lg x+\lg^2a-4=0$

设 $t=\lg x$ $\because 0<x<1$ $\therefore t<0$

$2t^2+3\lg a\,t+\lg^2a-4=0$ 在 $(-\infty,0)$ 有两根

$\begin{cases}\Delta\ge0\\ -\frac{3}{2}\lg a<0\\ \lg^2a-4>0\end{cases}$

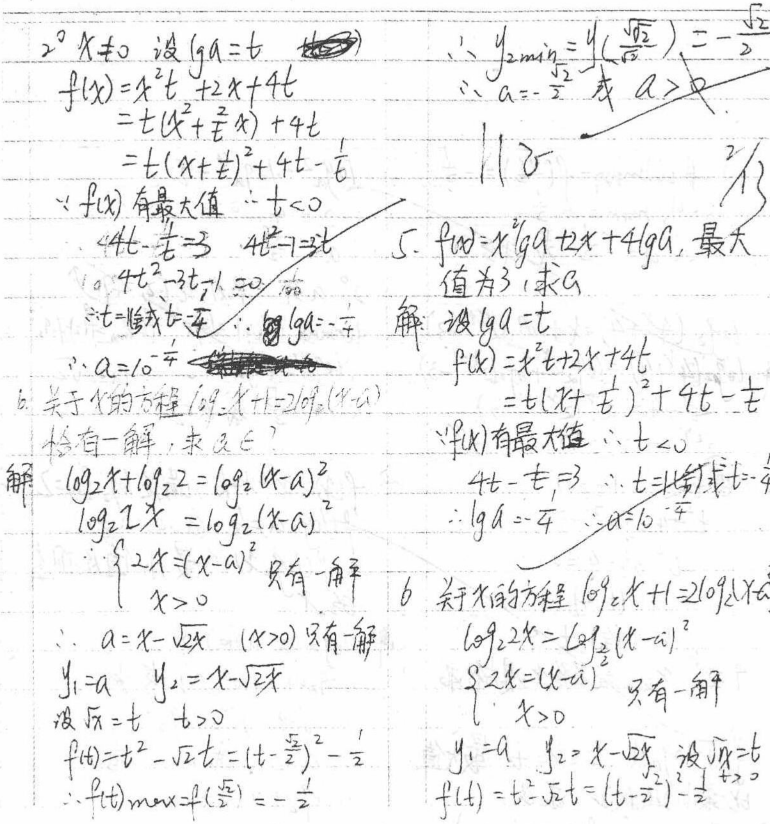
$\therefore a>100$

5. $f(x)=x^2\lg a+2x+4\lg a$ 最大值为3 求a

解 1° $x=0$ $4\lg a=3$

$\therefore a=10^{\frac{3}{4}}$

分析:本次6道题都是难度较大且不单纯是解方程问题。第5题所犯的错误,不是因为解方程不会,而是对函数最大值的意义理解不正确所致,从后面的订正来看这一问题并没有得到解决。说明批改作业时仅圈出错误所在处,而不研究错误的本质,效果是不好的。



2° $x\neq 0$ 设 $\lg a=t$

$f(x)=x^2t+2x+4t$

$=t(x^2+\frac{2}{t}x)+4t$

$=t(x+\frac{1}{t})^2+4t-\frac{1}{t}$

$\because f(x)$ 有最大值 $\therefore t<0$

$4t-\frac{1}{t}=3$　$4t^2-1=3t$

$\therefore 4t^2-3t-1=0$

$\therefore t=1$(舍)或 $t=-\frac{1}{4}$　$\therefore \lg a=-\frac{1}{4}$

$\therefore a=10^{-\frac{1}{4}}$

6. 关于 x 的方程 $\log_2 x+1=2\log_2(x-a)$ 恰有一解，求 $a\in$?

解 $\log_2 x+\log_2 2=\log_2(x-a)^2$

$\log_2 2x=\log_2(x-a)^2$

$\therefore \begin{cases}2x=(x-a)^2\\ x>0\end{cases}$ 只有一解

$\therefore a=x-\sqrt{2x}$ $(x>0)$ 只有一解

$y_1=a$　$y_2=x-\sqrt{2x}$

设 $\sqrt{x}=t$　$t>0$

$f(t)=t^2-\sqrt{2}t=(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{1}{2}$

$\therefore f(t)_{max}=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{1}{2}$

$\therefore y_{2min}=y(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a>0$

5. $f(x)=x^2\lg a+2x+4\lg a$，最大值为3，求 a

解 设 $\lg a=t$

$f(x)=x^2t+2x+4t$

$=t(x+\frac{1}{t})^2+4t-\frac{1}{t}$

$\because f(x)$ 有最大值 $\therefore t<0$

$4t-\frac{1}{t}=3$　$\therefore t=1$(舍)或 $t=-\frac{1}{4}$

$\therefore \lg a=-\frac{1}{4}$　$\therefore a=10^{-\frac{1}{4}}$

6 关于 x 的方程 $\log_2 x+1=2\log_2(x-a)$

$\log_2 2x=\log_2(x-a)^2$

$\begin{cases}2x=(x-a)^2\\ x>0\end{cases}$ 只有一解

$y_1=a$　$y_2=x-\sqrt{2x}$　设 $\sqrt{x}=t$　$t>0$

$f(t)=t^2-\sqrt{2}t=(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{1}{2}$

分析：第 6 题学生的解法很巧妙，把方程只有一解问题转化为两个函数 $y_1=a$ 和 $y_2=x-\sqrt{2x}$ 图象的交点问题，但是画图或者对最值理解有问题，导致解答不对，这一点我们可以借助该生的订正得到肯定。老师批改时，如果对学生的巧妙解法适当肯定，这种及时的鼓励，会更好地激发学生对数学的兴趣。按部就班，严格规范，一成不变的批改，虽说学生能够完全按照老师的要求完成作业与订正，从班级的层面上能够提高整体水平，学生个人也能够得到扎实的训练，但是对学生精细化学习和个性化提高帮助不大。在批改和讲评环节还有很多事情可做。