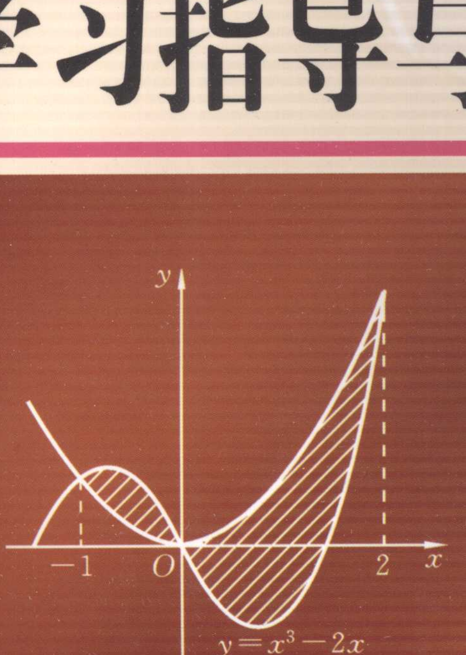
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

高教版《高等数学》（第六版）（同济大学应用数学系主编）

高等数学
学习指导与同步练习

王建国　何建军　主编



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

高等数学
学习指导与同步练习

高教版《高等数学》(第六版)(同济大学数学系)

主　编　王建国　何建军

副主编　罗志斌　刘　建　李小昭

　　　　兰丽英　郭玉芳

华中科技大学出版社

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与同步练习/王建国 何建军 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2009 年 8 月

ISBN 978-7-5609-5482-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①王… ②何… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 104558 号

高等数学学习指导与同步练习 王建国 何建军 主编

策划编辑:周芬娜

责任编辑:桂 林 周芬娜 封面设计:潘 群

责任校对:张 琳 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:通山金地印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:16.5 字数:400 000

版次:2009 年 8 月第 1 版 印次:2009 年 8 月第 1 次印刷 定价:20.00 元

ISBN 978-7-5609-5482-0/O·490

前　言

本书是结合培养应用型人才掌握必备高等数学知识而与同济大学《高等数学》第六版相配套的学习指导与同步练习，旨在帮助高等工科院校学生学习掌握和运用必备的高等数学知识，提高学生分析问题和解决问题的能力，同时经过足够的训练更好地掌握教材内容．本书内容与教材相呼应，是对教材内容的一种补充和深化，其章节划分也与教材相同．每节内容结构上由五部分组成，即知识结构、主要内容、重难点解析、典型例题、同步训练．其中，知识结构以图表的形式清晰地展示出本节的知识点之间的关联；主要内容是对本节所涉及的基本概念、重要定理及性质进行系统的总结；重难点解析是指出重要定义和定理的理解应用所要注意的方面；典型例题精选了一些常见的题目并给出了详细的解答；同步训练中给出了一些不同难度、不同风格的习题供学生训练使用．另外在本书例题和训练题中我们还适当选取了少量的考研真题．

本书是在结合培养应用型人才，经历了多年的教学实践，根据教学实践中积累的经验，以及注重博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少精华的基础上编写而成的．参加本书编写的有：王建国（第一、四、六、十章）、何建军（第三、八、十二章）、罗志斌（第七章）、刘建（第十一章）、李小昭（第二章）、兰丽英（第五章）、郭玉芳（第九章），另外钟师鹏、邱洋青、邱崇洋、张小平、肖芸芸等老师也参加了本书的编写工作．全书由王建国、何建军策划、统稿和定稿．

由于我们水平所限，解题方法的指导有可能不是很到位，加之时间仓促，不足之处在所难免，真心希望同行和读者提出宝贵意见，以便我们不断改进提高．

编　者

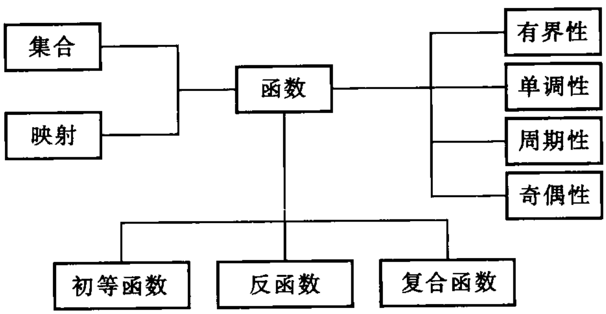
2009 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

知识结构



主要内容

定义 1　集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的全体,组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

定义 2　以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$. 设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$. 点 a 称为这个邻域的中心,δ 称为这个邻域的半径.

定义 3　设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中的每个元素 x,按照法则 f,在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f:X\to Y$,其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$,而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像,集合 X 称为映射 f 的定义域,X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}.$$

注　映射存在一对一和多对一两种情况. 在不同的数学分支中,映射有不同的惯用名称.

定义 4　设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为 $y=$

$f(x), x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.

注 函数是从实数集到实数集的映射.函数的两个基本要素:定义域和对应法则.

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$在 X 上有界.如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 X 上无界.

注 如果对任意正数 M,总存在 $x_0\in X$,有 $|f(x_0)|>M$,那么 $f(x)$在 X 上无界.

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$.如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的;如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的.单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

定义 7 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.如果对于任一 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为偶函数.如果对于任一 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为奇函数.

定义 8 设函数 $f(x)$的定义域为 D.如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x+l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,l 称为 $f(x)$的周期,通常周期函数的周期是指最小正周期.

定义 9 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$在 D 上有定义,且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数:$y=f[g(x)], x\in D$,称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的复合函数,它的定义域为 D,u 称为中间变量.

重难点解析

1. 关于函数的定义

在现行高等学校的《高等数学》教材中,关于函数的定义大致分为两类.

其一类,在某个变化过程中,有两个变量 x 和 y,如果变量 y 的变化依赖于变量 x 的变化,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

此类定义属于“依赖关系”定义.我国现行初中数学教材中函数的定义属于这一类.此定义强调“变化过程”,其变量不能脱离“变化过程”而“自变”,也不能在“变化过程”中固定不变,因此有一定的局限性.如常数函数就不能根据此定义进行解释,因为此时无论 x 取什么值,对应的变量 y 的值不随 x 的变化而变化.

其二类,设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果按照某个法则 f,对于每一个数 $x\in D$,变量 y 都有唯一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

此类定义属于“集合对应”定义,也就是本书与一般教材所使用的定义.在此定义之下,已经不存在“依赖关系”定义的局限性.

在函数的定义中并没有限制对应关系用何种形式来表达,通常情况下函数解析法的表达形式有如下几种.

(1) 显函数:把因变量 y 用含有自变量 x 的解析式 $y=f(x)$直接表示出来的函数称为显函数.

(2) 隐函数:自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则由二元方程 $f(x,y)=0$ 所确定

的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

(3) 分段函数:如果函数在其定义域的不同部分,对应法则由不同的解析式表达,则称这种函数为分段函数.

(4) 参数方程确定的函数:如果变量 x 与变量 y 之间的对应法则由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

所确定,则称这种函数为参数方程确定的函数,或称为参数式函数.

2. 关于分段函数

分段函数是按照表达函数的外在形式来定义的. 对于分段函数 $y=f(x)$,不论它被分成多少段,它总表示一个函数,而不是几个函数. 分段函数的定义域 D 是自变量在各段上的值的全体所构成的集合. 求分段函数的函数值时,必须要注意自变量的值落在定义域 D 的哪一段内,再决定由哪个对应法则来计算. 比较常见和著名的分段函数有:

(1) 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

(2) 符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

(3) 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in \mathbf{Q}, \\ 0, & x\in \mathbf{Q}^C, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数集.

3. 关于函数的复合

“复合”是由简单函数构造复杂函数的一种重要方法. 由于在讨论函数的性质时,往往是先通过“分解”复杂函数为简单函数,再讨论简单函数的相应性质,最后讨论“复合”的复杂函数的有关性质. 只有当函数 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 的值域有公共部分时,两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 才能复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$. 也就是说,不是任意两个函数都可以复合.

与函数的复合相对应的是把复杂函数分解为简单函数. 依照函数值计算的次序,把复合函数的分解方式划分为从内向外和从外向内两种. 所谓从内向外是指从最内层开始进行复合函数的逐步分解;所谓从外向内是指从最外层开始进行复合函数的逐步分解. 通常分解到只能用四则运算表示时就不再分. 从某种意义上来说,在本课程的学习中,分解显得比复合更重要,其中从外向内的分解比从内向外的分解又显得更重要.

4. 关于反函数的存在性

首先,并不是每一个函数都有反函数;其次,教材中的反函数存在定理的条件是充分条件而不是必要条件,即一个函数不满足该定理的条件也可能存在反函数. 如

$$y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -x, & 0\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$$

在定义域上显然不是单调函数,但是却有反函数

$$y=\begin{cases}x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -x, & -3\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

5. 关于初等函数

由常数和五类基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可以用一个式子表示的函数,称为初等函数.本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

一般而言,分段函数不是初等函数.但是也有个别的分段函数是初等函数,如绝对值函数经恒等变形,可以变成 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$,显然是一个初等函数.

典型例题

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln(2x^2-x)$ 的定义域.

解 为了使函数有意义,自变量 x 必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\\ 2x^2-x>0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x\neq 0,\\ x<0 \text{ 或 } x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

解得 $-1\leqslant x<0$ 或 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1$.所以函数的定义域为 $[-1,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$.

例 2 函数 $f(x)=\ln x^2$ 和 $g(y)=2\ln y$ 是否表示同一函数,为什么?

分析 如果两个函数的定义域和对应法则都相同,那么这两个函数就是相同的,此时二者的值域一定相同.与函数表达形式及自变量用什么符号表示没有直接关系,否则就是不同的函数.

解 $f(x)$ 的定义域 $D_f=\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 0\}$,$g(x)$ 的定义域 $D_g=\{y\in\mathbf{R}\mid y>0\}$,二者定义域不同,所以不是表示同一函数.

例 3 设 T 是函数 $f(x)$ 的周期,a,b 是常数,且 $a>0$,证明:$p=\dfrac{T}{a}$ 是函数 $\varphi(x)=f(ax+b)$ 的最小正周期.

分析 先证明 p 是周期,再证明它是最小正周期.

证 (1) 对任意 x 有

$$\varphi(x+p)=f[a(x+p)+b]=f(ax+b+ap)=f(ax+b+T)=f(ax+b)=\varphi(x),$$

所以 $p=\dfrac{T}{a}$ 是 $\varphi(x)$ 的周期.

(2) 设 q 是 $\varphi(x)$ 的任意一周期,则

$$f(aq+x)=f\left[a\left(\frac{x-b}{a}+q\right)+b\right]=\varphi\left(\frac{x-b}{a}+q\right)=\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)=f\left(a\times\frac{x-b}{a}+b\right)=f(x),$$

即 aq 是 $f(x)$ 的周期. 又由已知 $aq\geqslant T$,所以 $q\geqslant\dfrac{T}{a}$.

综上所述,$p=\dfrac{T}{a}$ 是 $\varphi(x)$ 的最小正周期.

例 4 设 $f(x+1)=x^2+x+3$,求 $f(x)$.

分析 首先把 $x+1$ 看成一个整体,用拼凑法,再用换元法求解函数的表达式.

解 方法一:$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+3$,则 $f(x)=x^2-x+3$.

方法二:令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,代入得

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+3=u^2-u+3,$$

所以

$$f(x)=x^2-x+3.$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\geqslant 1,\\ x^2, & |x|<1,\end{cases}$ $g(x)=2\lg x$,求 $f(g(x))$,$g(f(x))$.

分析 考查怎样求两个函数的复合函数 $f\circ g(x)=f(g(x))$,且一定要写出其定义域.

解 (1) $f(g(x))=\begin{cases}2\lg x, & |\lg x|\geqslant 1,\\ (2\lg x)^2, & |\lg x|<1\end{cases}=\begin{cases}4\lg^2 x, & \dfrac{1}{10}<x<10,\\ 2\lg x, & \text{其它}.\end{cases}$

(2) $g(f(x))=2\lg f(x)$,故必须 $f(x)>0$.

当 $|x|\geqslant 1$,即 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时,有 $f(x)=x$,显然 $x\leqslant -1$,$\lg x$ 无意义,所以

$$g(f(x))=2\lg f(x)=2\lg x\quad(x\geqslant 1).$$

当 $|x|<1$,即 $-1<x<1$ 时,$f(x)=x^2$,显然 $f(0)=0$ 不符合 $f(x)>0$ 这一要求,故 $x=0$ 不在 $g(f(x))$ 定义域内. 所以

$$g(f(x))=2\lg f(x)=2\lg x^2\quad(-1<x<0\text{ 或 }0<x<1).$$

故 $g(f(x))=\begin{cases}2\lg x, & x\geqslant 1,\\ 2\lg x^2, & -1<x<0\text{ 或 }0<x<1.\end{cases}$

例 6 把函数 $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 分解为最简单的函数.

解 按从内向外和从外向内两类方式进行分解.

从内向外:最先作四则运算,则令 $v=x^2+1$;其次作幂运算,则令 $u=v^{-\frac{1}{2}}$;接着作正弦运算,则令 $t=\sin u$;最后作乘方运算,则令 $y=t^2$.

从外向内:最后作乘方运算,则令 $y=t^2$;朝前作正弦运算,则令 $t=\sin u$;再朝前作幂运算,则令 $u=v^{-\frac{1}{2}}$;最先作四则运算,则令 $v=x^2+1$.

综上所述,所给函数可以分解为

$$y=t^2,\quad t=\sin u,\quad u=v^{-\frac{1}{2}},\quad v=x^2+1.$$

例 7 江西省赣州市出租车按以下规定收费:排气量为 1.6 L(含 1.6 L)以上的捷达、桑塔纳、富康、奇瑞等出租车,当行驶里程不超过 2 km 时,一律收起步费 4 元;当行驶里程超过 2 km 且不超过 8 km 时,超起步公里的里程,每增加 1 km 加 1.4 元;单程空驶 8 km 外可收 50%的空驶费,试写出车费 C 与行驶里程 s 之间的函数关系.

分析　以 $C=C(s)$ 表示这个函数，其中 s 的单位是 km，C 的单位是元，由题意，s 分了三个区间段，$C(s)$ 是一个分段函数.

解　按上述规定，当 $0\leqslant s\leqslant 2$ 时，　　$C(s)=4$；

当 $2\leqslant s\leqslant 8$ 时，　　$C(s)=4+1.4(s-2)=1.4s+1.2$；

当 $s>8$ 时，　　$C(s)=4+1.4(s-2)+\frac{1}{2}[4+1.4(s-2)]=2.1s+1.8.$

或写作

$$C(s)=\begin{cases}4, & 0\leqslant s\leqslant 2,\\ 1.4s+1.2, & 2\leqslant s\leqslant 8,\\ 2.1s+1.8, & s>8.\end{cases}$$

例 8　甲城火车站对乘车到乙城的旅客行李按以下规定收费：当行李不超过 50 kg 时，按基本运费计算，每千克收 0.15 元；当超过 50 kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求甲城到乙城的行李费 y(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系式.

分析　y 可以表示成 x 的分段函数.

解　由题意，甲城到乙城的行李费 y(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0.15, & x\leqslant 50,\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50.\end{cases}$$

例 9　按照银行规定，某种外币一年期存款的年利率为 4.2%，半年期存款的年利率为 4.0%. 每笔存款到期后，银行自动将其转存为同样期限的存款. 设总数为 A 单位的该种外币存入银行，两年后取出，问存何种期限的存款能有较多的收益，多多少？

分析　若存期为一年，则一年后外币的本金加利息再存入下一年中. 若存期为半年，则每隔半年本金加利息再存入下一个半年，两年中共存了四次.

解　若存期为一年，则两年后的收益为 $A(1+4.2\%)^2=1.085764A$，若存期为半年，则两年后的收益为 $A\left(1+\frac{4.0\%}{2}\right)^4=1.0824322A$. 显然存一年期的存款收益较多，约多 $0.0033A$.

同 步 训 练

1. 设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

2. 函数 $y=\frac{1}{x^3}$ 在区间(0,1)内(　　).

A. 有界且单调增加　　B. 无界且单调增加

C. 有界且单调减少　　D. 无界且单调减少

3. 下列结论正确的是(　　).

A. $y=5^x$ 与 $y=-5^x$ 的图形关于原点对称

B. $y=5^x$ 与 $y=5^{-x}$ 的图形关于 x 轴对称

C. $y=5^x$ 与 $y=-5^x$ 的图形关于 y 轴对称

D. $y=5^x$ 与 $y=\log_5 x$ 的图形关于 $y=x$ 轴对称

4. 下列各组函数能组成复合函数 $f(\varphi(x))$ 的是(　　).

A. $y=f(u)=\ln u, u=j(x)=\sin x-2$

B. $y=f(u)=\sqrt{u}, u=j(x)=-x, x>0$

C. $y=f(u)=\dfrac{1}{u-u^2}, u=j(x)=\sin^2 x+\cos^2 x-1$

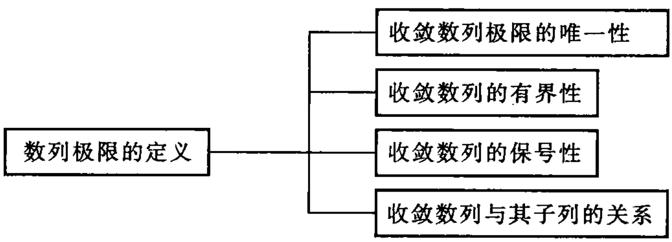
D. $y=f(u)=\arccos u, u=j(x)=1+x^2$

5. 函数 $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$ 的定义域为______.

6. 设 $f(x-1)=x^2+3x+5$,则 $f(x)=$______.

第二节　数列的极限

知识结构



主要内容

1. 数列极限的定义

定义 1　按照一定的顺序排列起来的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列,记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项,第 n 项称为数列的通项.

定义 2　设 $\{x_n\}$ 为一数列,如果存在常数 a,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,或 $x_n\to a\ (n\to\infty)$. 如果这样的 a 不存在,则称该数列的极限不存在或者该数列发散.

注　如果让数列中的元素与实数轴上的点一一对应,那么若某个数列存在极限,这表示当 n 足够大时,落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内的点有无穷多个.

2. 收敛数列的性质

性质 1(极限的唯一性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限唯一.

性质 2(收敛数列的有界性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其必定有界. 即存在 $M>0$,使得 $|x_n|\leqslant M, \forall n\in\mathbf{N}$.

推论　如果数列 $\{x_n\}$ 无界,则其必发散.

性质 3(收敛数列的保号性)　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数

$N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论 1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $x_n\geqslant y_n$，则 $a\geqslant b$.

推论 2 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>b$（或 $a<b$），则当 n 充分大时，有 $x_n>b$（或 $x_n<b$）.

特别地，若 $b=0$，则当 n 充分大时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

性质 4（收敛数列与其子数列间的关系） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子列也收敛，且极限也是 a.

重难点解析

数列的极限表示当项数无限增大时，其通项变化的总趋势是无限接近某个常数. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 又可以叙述为：当项数 n 无限增大时，通项 x_n 与某点 a 的距离 $|x_n-a|$ 可以小于预先任意取定的正数 ε.

数列极限的另一种几何解释：任给 $\varepsilon>0$，若在 $U(a,\varepsilon)$ 之外数列中的项至多只有有限个，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

典 型 例 题

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-5)^n}{2^{n+1}+(-5)^{n+1}}$.

分析 求数列的极限.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(-5)^n}{2^{n+1}+(-5)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}+1}=\frac{1}{5}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 因为 $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，由夹逼准则：原式$=1$.

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解 由于 $$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\,\frac{k+1}{k},$$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\,\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

同 步 训 练

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2-1}{4n^3+2n+3}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$；

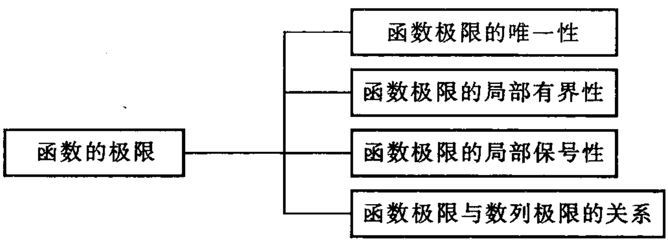
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt{n^4+2n}-\sqrt{n^4+2n-1})$.

2. 设 $x_1=1, x_2=\dfrac{2x_1+1}{1+x_1},\cdots,x_n=\dfrac{2x_{n-1}+1}{1+x_{n-1}},\cdots$，证明数列 x_n 的极限存在，并求其极限.

第三节　函数的极限

知识结构



主要内容

1. 函数极限的定义

定义 1（自变量趋于有限值时函数的极限）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

如果这样的 A 不存在，则称该函数在这点的极限不存在.

定义 2（自变量趋于无穷大时函数的极限）　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

定义 3（单侧极限） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x_0^-)=A.$$

注 类似可定义右极限及自变量趋于正无穷大或负无穷大时函数的单侧极限.

把数列也看成函数，那么共有七种基本极限类型：

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\quad \lim_{x\to x_0} f(x),\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x),\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x),\quad \lim_{x\to -\infty} f(x),\quad \lim_{x\to +\infty} f(x),\quad \lim_{x\to\infty} f(x).$$

2. 函数极限的性质

为简单明确起见，仅就 $x\to x_0$ 的情形叙述. 其他五种极限形式有相应的性质.

性质 1（函数极限的唯一性） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则其极限唯一.

性质 2（函数极限的局部有界性） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则在点 x_0 的附近，函数 $f(x)$ 有界.

性质 3（函数极限的局部保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，则在点 x_0 的附近，有 $f(x)>g(x)$.

推论 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且在点 x_0 的附近，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $A\leqslant B$.

推论 2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>B$（或 $A<B$），则在点 x_0 的附近，有 $f(x)>B$（或 $f(x)<B$）. 特别地，若 $B=0$，则在点 x_0 的附近，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

性质 4（函数极限与数列极限的关系） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0\,(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

注 有些教材把性质 4 称为海涅定理或者归结原则，意义在于把函数极限归结为数列极限问题来处理.

重难点解析

1. 关于函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义无关.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表示当自变量 x 无限趋近 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化总趋势，即无限逼近常数 A.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 又可以叙述为：当自变量 x 与 x_0 足够接近时，相应的函数值 $f(x)$ 与常数 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可以小于预先任意取定的正数.

2. 关于函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 表示当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 $f(x)$

的变化总趋势——无限逼近常数 A.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 又可以叙述为：当自变量 x 的绝对值足够大时，相应的函数值 $f(x)$ 与常数 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可以小于预先任意取定的正数.

(3) 数列 $\{x_n\}$ 可以看成以自然数集为定义域的整标函数 $f(n)=x_n$. 因此数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$.

3. 关于函数在一点处的左右极限

左右极限考察自变量 x 从左边与点 x_0 足够接近和自变量 x 从右边与点 x_0 足够接近时函数 $f(x)$ 的变化趋势. 当研究函数 $f(x)$ 在自变量 x 趋近于其定义区间 $[a,b]$ 的端点时，只需考察其单侧极限，即在点 a 处的右极限和在点 b 处的左极限；当研究分段函数 $f(x)$ 在自变量 x 趋近于其分段点 x_0 的极限时，必须考察其左右极限是否存在及是否相等.

典型例题

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x}{2x}$，$g(x)=\dfrac{|x|}{2x}$，求当 $x\to 0$ 时它们的左右极限，并说明它们当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

分析 由定义先求出左右极限，若左右极限存在且相等，则函数在该点的极限存在；否则，称函数在该点的极限不存在.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\frac{1}{2}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{2x}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{2x}=-\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$.
所以 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-8x+5}+2x+1)$.

解
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-8x+5}+2x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-12x+4}{\sqrt{4x^2-8x+5}-2x-1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{12-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{8}{x}-\dfrac{5}{x^2}}+2+\dfrac{1}{x}}=3.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$

解 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

例 4 (2000 年考研试题，数学一) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.