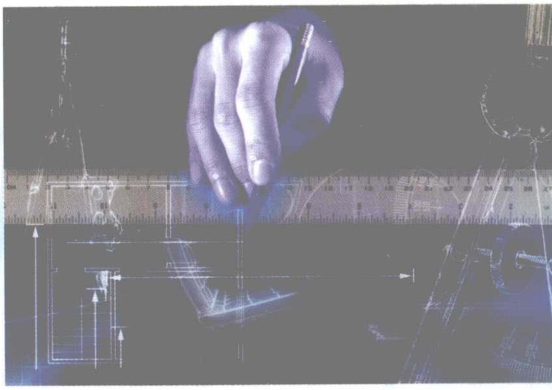
21世纪全国高职高专公共基础教育“十一五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE



主编　庞进生　刘洪运　刘庆芝

西北工业大学出版社
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

21世纪全国高职高专公共基础教育“十一五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　庞进生　刘洪运　刘庆芝

西北工業大學出版社
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

【内容简介】 本套教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织了负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师，经过深入研讨，结合高职院校专业、学生以及教育教学的特点而编写的。

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、行列式、矩阵与线性方程组等，大约150个学时。其中带*号的章节可供不同专业选择，有些章节中的某些知识点也可供使用者在编写教学计划中取舍。

本书为高职高专院校教材，也可以作为成人高校、五年制大专以及"3+2"大专学生及工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/庞过生，刘洪运，刘庆芝主编．—西安：西北工业大学出版社，2008.9

(21世纪全国高职高专公共基础教育"十一五"规划教材)

ISBN 978-7-5612-2465-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①庞…②刘…③刘… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第140533号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号　　邮政编码：710072

电　　话：(029)88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：河南新华印务有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　　1/16

印　　张：25

字　　数：569千字

版　　次：2008年9月第1版　　2008年9月第1次印刷

定　　价：41.0元

编 委 名 单

主　编　庞进生　刘洪运　刘庆芝

副主编　李　杰　李淑玲

编　委　（以姓氏笔画为序）

王远民　刘庆芝　刘洪运

李　杰　李淑玲　庞进生

雷　丽

前　言

本套教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织了负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师，经过深入研讨，结合高职院校专业、学生以及教育教学的特点而编写的。

教材突出"以学生发展为本"的教育思想，以"必须、够用、好用、实用"为原则，以培养学生良好的学习习惯和创新精神为目的。本书重视基本概念、基本运算技能的训练。内容由浅入深、循序渐进，结构严谨、通俗易懂，既保持了数学学科理论体系的完整性，同时又注重了数学在工程上的应用，重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力，而不拘泥于理论推导和烦琐的运算。

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、行列式、矩阵与线性方程组等，大约150个学时。其中，带*号的章节可供不同专业选择，有些章节中的某些知识点也可供各使用者在编写教学计划中取舍。

本书可作为高职高专院校的教材，同时也可以作为成人高校、五年制大专以及"3+2"大专学生及工程技术人员的自学参考书。

本书由庞进生、刘洪运、刘庆芝任主编，李杰、李淑玲任副主编，第1章、第4章由李淑玲编写；第2章、第3章由雷丽编写；第5章、第6章和附录由刘洪运编写；第7章、第10章由刘庆芝编写；第8章、第9章由王远民编写；第11章由庞进生编写；第12章、第13章由李杰编写；全书由庞进生、刘洪运、刘庆芝定稿。

由于作者水平所限，书中不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2008年6月

目　录

第 1 章

函　　数

在我们周围变化的量随处可见,变化的量之间相互制约的关系普遍存在.如行驶的汽车其路程随着速度和时间而改变,气温随时间而改变,商品的需求量随价格而改变等.这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念,即函数.它是我们定性定量地研究各种变化量的一个非常重要的工具.

我们在初中、高中已经学过函数的概念和性质,为了学习微积分的需要,本章将简要复习和加深理解函数的有关知识.

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y,D 为一非空实数集,如果变量 x 在 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照某个对应关系 f 总有一个确定的数值与之对应,则称对应关系 f 是定义在数集 D 上的一个函数,记作 $y=f(x)$,其中 x 称为自变量,y 称为函数值或因变量,x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

当 x 取遍 D 中的一切实数时,与它对应的函数值的全体称为函数的值域.

通过函数的定义可以发现,构成函数的两个重要因素是:定义域和对应关系.显然,两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才认为是相同的.例如,函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$,它们的定义域和对应关系完全相同,所以它们是相同的函数.又如,函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$,它们的定义域不同,所以它们是不同的函数.

例 1　圆的面积与它的半径之间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定,此式

表示了圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系.

例 2 某商场 1998 年第一季度各月毛线的零售量(kg)见下表:

月份 n	1	2	3
零售量 W	86	95	63

上表表示了该商场 1998 年第一季度月零售量 W 与月份 n 之间的函数关系.

例 3 某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量,由气温自动记录仪描得一条曲线(如图 1-1),这个图形表示了气温 T 和时间 t(从 0 时开始)之间的函数关系,记录的时间范围是$[0,24)$(单位:h).

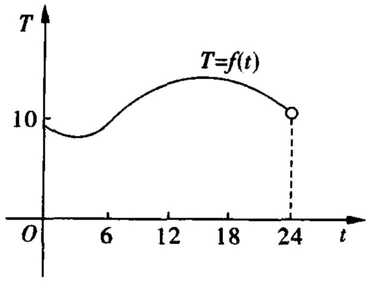


图 1-1

1.1.2 函数的定义域

定义域是构成函数的重要因素之一,因此研究函数就必须注意函数的定义域. 在考虑实际问题时,应根据问题的实际意义来确定定义域. 如例 1 中函数的定义域是 $D=(0,+\infty)$,例 2 中函数的定义域是 $D=\{1,2,3\}$,例 3 中函数的定义域是 $D=[0,24)$;对于抽象的用数学式子表示的函数,函数的定义域是自变量所能取的使式子有意义的一切值.

例 4 求下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$　　　　(2)$y=\lg(3-x)+\arcsin\dfrac{x+1}{5}$

解 (1)要使函数有意义,需$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$,解这个不等式组得 $x>-2$ 且 $x\neq 2$. 因此该函数的定义域为$\{x\mid x>-2$ 且 $x\neq 2\}$,也可用区间表示为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)要使函数有意义,需$\begin{cases}3-x>0\\ -1\leqslant\dfrac{x+1}{5}\leqslant 1\end{cases}$,解这个不等式组得 $-6\leqslant x<3$. 因此该函数的定义域为$[-6,3)$.

1.1.3 函数的表示法

表示函数,要把它的定义域和对应关系表述清楚,一般可根据函数自身的特点选择适当的方法. 常用的方法有:表格法、图像法和公式法(解析法).

1. 表格法

以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法,如例2和数学用表中的函数都是用表格法表示的.

2. 图像法

用图形表示函数的方法称为函数的图像表示法,如例3中的函数就是用图像法表示的.

3. 公式法(解析法)

用数学式子表示函数关系的方法称为函数的公式表示法,也称为解析法. 如例1中的函数就是用公式法表示的. 在高等数学中讨论的函数几乎都是用公式法表示的.

微积分中还经常碰到这样的情形,一个函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示,这种函数叫做分段函数. 例如函数$f(x)=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$是定义域为$D=(-\infty,+\infty)$的一个分段函数,当$x\geqslant 0$时,$f(x)=x$;当$x<0$时,$f(x)=-x$,如图1-2所示.

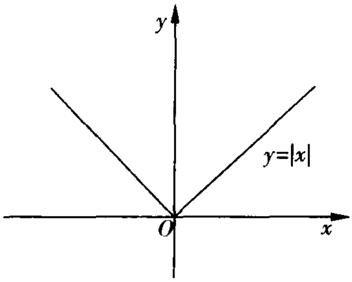


图1-2

1.2 函数的简单性质

1.2.1 函数的奇偶性

定义1.2 设函数$y=f(x)$的定义域D关于原点对称,如果对任意$x\in D$,都有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数;如果对任意$x\in D$,都有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数.

例如,函数$y=\sin x$,$y=x^3$等都是奇函数;函数$y=\cos x$,$y=x^2$等都是偶函数;而$y=\sin x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图像关于y轴对称,偶函数的图像关于y轴对称,如图1-3所示.

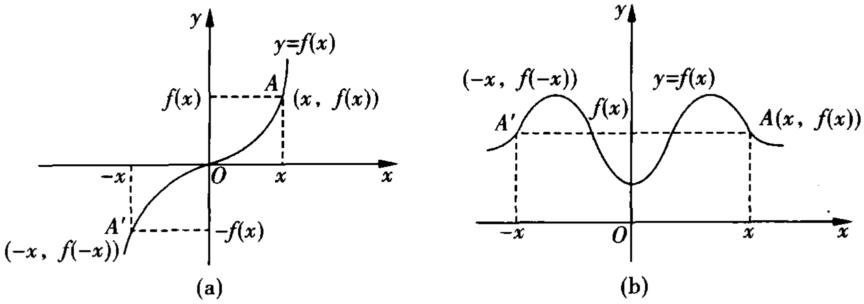


图 1-3

例 1 判断函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}\right]=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \\ &= \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数.

1.2.2 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果对于区间 D 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加（或单调减少），如图 1-4 所示.

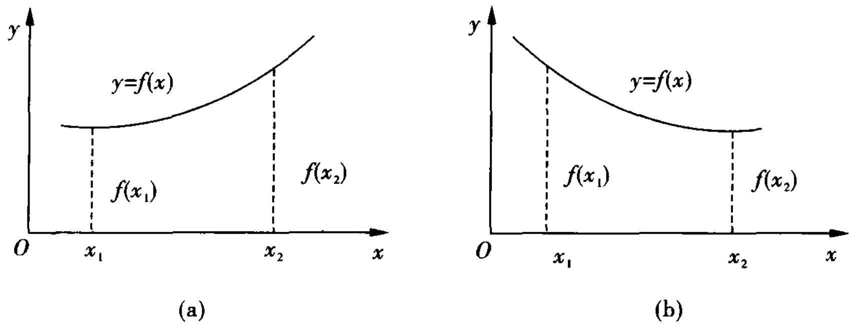


图 1-4

例 2 判断函数在指定区间上的单调性：

$$y=x^2, x\in(-\infty,0)$$

解 对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，若 $x_1<x_2$，则有 $x_1-x_2<0$.
又因为 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，所以 $x_1+x_2<0$.

所以　$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$

即　$f(x_1)>f(x_2)$

故函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的.

1.2.3　函数的周期性

定义 1.4　一般地,对于函数 $y=f(x)$,设其定义域为 D,如果存在非零常数 T,使得对任意 $x\in D$,有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期. 周期函数的图形特点是:在其定义域内间隔为 T 的区间上,函数图形有相同的形状.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数(如图 1-5 所示).

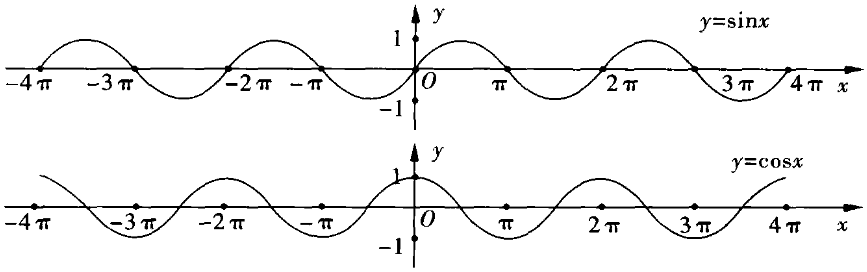


图 1-5

1.2.4　函数的有界性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个常数 $M>0$,使得对于 (a,b) 内的任何 x,都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界;如果不存在这样的数 M,称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

例如,对于任何实数 x,都有 $|\cos x|\leqslant 1$,所以函数 $y=\cos x$ 有界;而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的,如图 1-6 所示.

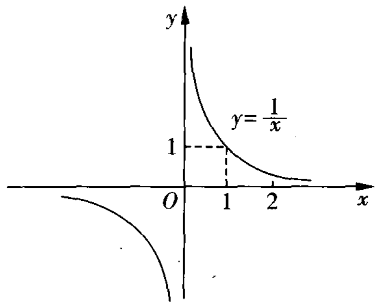


图 1-6

1.3 反函数与复合函数

1.3.1 反函数

定义 1.6 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果变量 y 在 M 中每取一个值时，都可以从关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，那么所确定的 y 为自变量的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，自变量用 x 表示，所以反函数经常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1 求函数 $y=e^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=e^{x+1}$ 得到 $x+1=\ln y$，从而 $x=\ln y-1$，交换 x 和 y，得 $y=\ln x-1$. 所以，所求函数的反函数为 $y=\ln x-1$.

1.3.2 复合函数

有时两个变量之间的联系不是直接的，而是通过另一个变量联系起来. 如函数 $y=e^{\sin x}$，函数值不是直接由 x 确定，而是由 $\sin x$ 确定. 如果用 u 表示 $\sin x$，那么函数 $y=e^{\sin x}$ 就可以表示成 $y=e^u$，而 $u=\sin x$. 这说明 y 与 x 的关系是通过变量 u 确定. 具有上述关系的函数，我们给出下述定义.

定义 1.7 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量.

但要注意，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该与函数 $y=f(u)$ 的定义域有非空交集，否则复合函数将失去意义.

例如，复合函数 $y=\ln u, u=x-1$. 由于 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以中间变量 u 的取值必须在 $(0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $(1,+\infty)$ 内.

由此可知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集.

注：并不是任意两个函数都可以复合，如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合.

例 2 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成：

(1) $y=\sin^2 x$　　(2) $y=2\cos\sqrt{1+x^2}$

解 (1) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的；

(2) 函数 $y=2\cos\sqrt{1+x^2}$ 是由函数 $y=2\cos u, u=\sqrt{v}$ 和 $v=1+x^2$ 复合而成的.

例 3 设 $f(x)=\dfrac{2}{3+x}, \varphi(x)=\sin x$，求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

解 求 $f[\varphi(x)]$ 时，应将 $f(x)$ 中的 x 换成 $\varphi(x)$，因此 $f[\varphi(x)]=\dfrac{2}{3+\sin x}$.

求 $\varphi[f(x)]$ 时，应将 $\varphi(x)$ 中的 x 换成 $f(x)$，因此 $\varphi[f(x)]=\sin\dfrac{2}{3+x}$.

例 4　设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(2x+1)$.

解　令 $u=x-1$，得 $f(u)=(u+1)^2$，再将 $u=2x+1$ 代入，即得复合函数

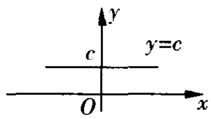
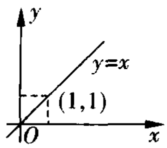
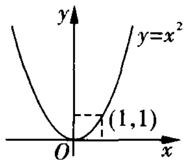
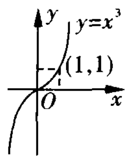
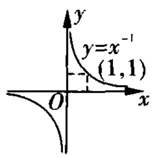
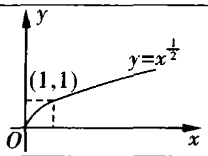
$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2$$

1.4　初等函数

1.4.1　基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 这些基本初等函数在中学已经学过（见下表）.

基本初等函数的图形与性质

名称	函数		定义域与值域	图像	特性
常数函数	$y=c$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		偶函数 有界
幂函数	$y=x^a$	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
		$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
		$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
		$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
		$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加