

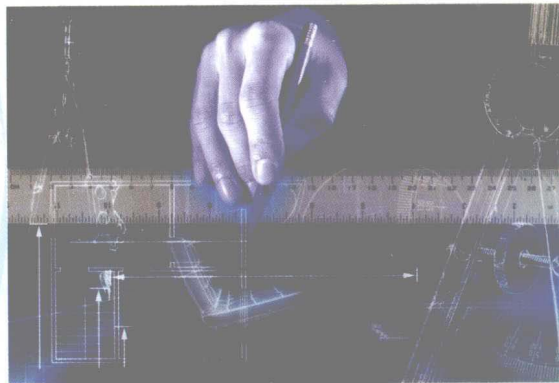


21世纪全国高职高专公共基础教育“十一五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 庞进生 刘洪运 刘庆芝



西北工业大学出版社

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS



21世纪全国高职高专公共基础教育“十一五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 庞进生 刘洪运 刘庆芝



西北工业大学出版社

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

【内容简介】 本套教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,组织了负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师,经过深入研讨,结合高职院校专业、学生以及教育教学的特点而编写的。

本书内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、行列式、矩阵与线性方程组等,大约 150 个学时。其中带 * 号的章节可供不同专业选择,有些章节中的某些知识点也可供使用者在编写教学计划中取舍。

本书为高职高专院校教材,也可以作为成人高校、五年制大专以及“3+2”大专学生及工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/庞过生,刘洪运,刘庆芝主编. —西安:西北工业大学出版社,2008.9
(21 世纪全国高职高专公共基础教育“十一五”规划教材)
ISBN 978-7-5612-2465-6

I. 高… II. ①庞…②刘…③刘… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV. O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 140533 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮政编码:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpu.com

印 刷 者:河南新华印务有限公司

开 本:787 mm × 1 092 mm 1/16

印 张:25

字 数:569 千字

版 次:2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

定 价:41.0 元

编委名单

主 编 庞进生 刘洪运 刘庆芝
副主编 李 杰 李淑玲

编 委 (以姓氏笔画为序)
王远民 刘庆芝 刘洪运
李 杰 李淑玲 庞进生
雷 丽

前 言

本套教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,组织了负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师,经过深入研讨,结合高职院校专业、学生以及教育教学的特点而编写的。

教材突出“以学生发展为本”的教育思想,以“必须、够用、好用、实用”为原则,以培养学生良好的学习习惯和创新精神为目的。本书重视基本概念、基本运算技能的训练。内容由浅入深、循序渐进,结构严谨、通俗易懂,既保持了数学学科理论体系的完整性,同时又注重了数学在工程上的应用,重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力,而不拘泥于理论推导和烦琐的运算。

本书内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、行列式、矩阵与线性方程组等,大约 150 个学时。其中,带 * 号的章节可供不同专业选择,有些章节中的某些知识点也可供各使用者在编写教学计划中取舍。

本书可作为高职高专院校的教材,同时也可以作为成人高校、五年制大专以及“3+2”大专学生及工程技术人员的自学参考书。

本书由庞进生、刘洪运、刘庆芝任主编,李杰、李淑玲任副主编,第 1 章、第 4 章由李淑玲编写;第 2 章、第 3 章由雷丽编写;第 5 章、第 6 章和附录由刘洪运编写;第 7 章、第 10 章由刘庆芝编写;第 8 章、第 9 章由王远民编写;第 11 章由庞进生编写;第 12 章、第 13 章由李杰编写;全书由庞进生、刘洪运、刘庆芝定稿。

由于作者水平所限,书中不妥之处,敬请读者批评指正。

编 者

2008 年 6 月

目 录

第1章 函数	1
1.1 函数的概念	1
1.2 函数的简单性质	3
1.3 反函数与复合函数	6
1.4 初等函数	7
1.5 数学模型的建立	10
1.6 数学实验(一)——Mathematica 入门和一元 函数的图形绘制	11
本章小结	15
习题1	16
第2章 极限与连续	18
2.1 数列的极限	18
2.2 函数的极限	22
2.3 极限的四则运算法则	26
2.4 无穷小与无穷大	28
2.5 两个重要极限	32
2.6 函数的连续性	36
本章小结	43
习题2	44

第3章 导数与微分	48
3.1 导数的概念	48
3.2 函数和、差、积、商的求导法则	55
3.3 复合函数的求导法则	60
3.4 初等函数的导数及应用	62
*3.5 隐函数的导数及参数方程求导	65
3.6 高阶导数	68
3.7 函数的微分及其应用	70
3.8 数学实验(二)——用 Mathematica 求极限 和一元函数的导数	73
本章小结	75
习题3	76
第4章 导数的应用	79
4.1 微分中值定理	79
4.2 洛必达法则	82
4.3 函数的单调性	85
4.4 函数的极值与最值	87
4.5 曲线的凹凸性与拐点	91
4.6 利用导数研究函数	93
本章小结	98
习题4	99
第5章 不定积分	102
5.1 不定积分的概念	102
5.2 不定积分的性质和基本积分公式	105
5.3 换元积分法	108
5.4 分部积分法	117
*5.5 积分表的使用和简单有理函数积分举例	122
本章小结	126
习题5	128

第6章 定积分	131
6.1 定积分的概念	131
6.2 定积分的性质和牛顿-莱布尼兹公式	137
6.3 定积分的计算方法	146
*6.4 广义积分	163
6.5 定积分在几何与物理问题中的应用	168
6.6 数学实验(三)——用 Mathematica 计算积分	184
本章小结	187
习题6	188
第7章 常微分方程	192
7.1 基本概念	192
7.2 可分离变量的一阶微分方程	194
7.3 二阶常系数线性微分方程	200
7.4 应用微分方程建模举例	208
本章小结	210
习题7	213
第8章 空间解析几何简介	215
8.1 空间直角坐标系	215
8.2 向量的概念与线性运算	218
8.3 向量的数量积与向量积	220
8.4 平面方程	221
8.5 空间直线方程	223
本章小结	224
习题8	226
第9章 多元函数微分学	227
9.1 多元函数的概念、极限及连续	227
9.2 偏导数	230
9.3 全微分	232
9.4 复合函数与隐函数的微分法	233

9.5 二元函数的极值	234
本章小结	237
习题9	239
第10章 多元函数积分学	241
10.1 二重积分的概念与性质	241
10.2 二重积分的计算	246
10.3 二重积分的应用	254
10.4 数学实验(四)——用 Mathematica 求偏导和 计算二重积分	258
本章小结	260
习题10	262
第11章 无穷级数	265
11.1 数项级数的概念和性质	265
11.2 正项级数及其敛散性	270
11.3 交错级数及其敛散性	274
11.4 幂级数	277
11.5 函数的幂级数展开	282
11.6 数学实验(五)——用 Mathematica 进行级数运算	288
本章小结	288
习题11	291
第12章 行列式	293
12.1 二阶、三阶行列式	293
12.2 n 阶行列式	302
12.3 克莱姆法则	308
本章小结	311
习题12	313
第13章 矩阵与线性方程组	316
13.1 矩阵的概念与运算	316
13.2 逆矩阵	326

13.3 矩阵的初等变换与矩阵的秩	333
13.4 线性方程组	341
13.5 数学实验(六)——用 Mathematica 进行 矩阵运算和解线性方程组	353
本章小结	355
习题 13	357
参考答案	361
附录 积分表	377

第 1 章

函 数

在我们周围变化的量随处可见,变化的量之间相互制约的关系普遍存在.如行驶的汽车其路程随着速度和时间而改变,气温随时间而改变,商品的需求量随价格而改变等.这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念,即函数.它是我们定性定量地研究各种变化量的一个非常重要的工具:

我们在初中、高中已经学过函数的概念和性质,为了学习微积分的需要,本章将简要复习和加深理解函数的有关知识.

1.1 函数的概念

1.1.1 函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y , D 为一非空实数集,如果变量 x 在 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照某个对应关系 f 总有一个确定的数值与之对应,则称对应关系 f 是定义在数集 D 上的一个函数,记作 $y=f(x)$,其中 x 称为自变量, y 称为函数值或因变量, x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

当 x 取遍 D 中的一切实数时,与它对应的函数值的全体称为函数的值域.

通过函数的定义可以发现,构成函数的两个重要因素是:定义域和对应关系.显然,两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才认为是相同的.例如,函数 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $y = 1$,它们的定义域和对应关系完全相同,所以它们是相同的函数.又如,函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$,它们的定义域不同,所以它们是不同的函数.

例 1 圆的面积与它的半径之间的关系由公式 $S = \pi r^2$ 确定,此式

表示了圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系.

例2 某商场 1998 年第一季度各月毛线的零售量(kg)见下表:

月份 n	1	2	3
零售量 W	86	95	63

上表表示了该商场 1998 年第一季度月零售量 W 与月份 n 之间的函数关系.

例3 某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量,由气温自动记录仪描得一条曲线(如图 1-1),这个图形表示了气温 T 和时间 t (从 0 时开始)之间的函数关系,记录的时间范围是 $[0, 24)$ (单位:h).

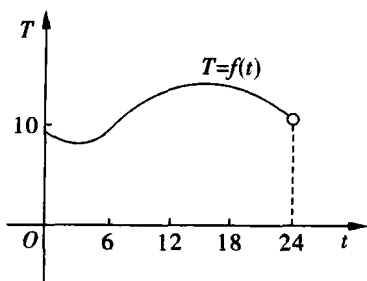


图 1-1

1.1.2 函数的定义域

定义域是构成函数的重要因素之一,因此研究函数就必须注意函数的定义域.在考虑实际问题时,应根据问题的实际意义来确定定义域.如例 1 中函数的定义域是 $D = (0, +\infty)$,例 2 中函数的定义域是 $D = \{1, 2, 3\}$,例 3 中函数的定义域是 $D = [0, 24)$;对于抽象的用数学式子表示的函数,函数的定义域是自变量所能取的使式子有意义的一切值.

例4 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}$$

$$(2) y = \lg(3-x) + \arcsin \frac{x+1}{5}$$

解 (1) 要使函数有意义,需 $\begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$,解这个不等式组得 $x > -2$ 且 $x \neq 2$. 因此该函数的定义域为 $\{x | x > -2 \text{ 且 } x \neq 2\}$,也可用区间表示为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 要使函数有意义,需 $\begin{cases} 3-x > 0 \\ -1 \leq \frac{x+1}{5} \leq 1 \end{cases}$,解这个不等式组得 $-6 \leq x < 3$. 因此该函数的定义域为 $[-6, 3)$.

1.1.3 函数的表示法

表示函数,要它的定义域和对应关系表述清楚,一般可根据函数自身的特点选择适当的方法.常用的方法有:表格法、图像法和公式法(解析法).

1. 表格法

以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法,如例2和数学用表中的函数都是用表格法表示的.

2. 图像法

用图形表示函数的方法称为函数的图像表示法,如例3中的函数就是用图像法表示的.

3. 公式法(解析法)

用数学式子表示函数关系的方法称为函数的公式表示法,也称为解析法.如例1中的函数就是用公式法表示的.在高等数学中讨论的函数几乎都是用公式法表示的.

微积分中还经常碰到这样的情形,一个函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示,这种函数叫做分段函数.例如函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 是定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$ 的一个分段函数,当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x$, 如图1-2所示.

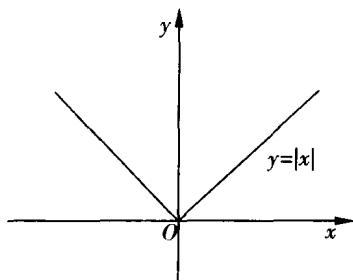


图 1-2

1.2 函数的简单性质

1.2.1 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 如果对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, 函数 $y = \sin x$, $y = x^3$ 等都是奇函数; 函数 $y = \cos x$, $y = x^2$ 等都是偶函数; 而 $y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称, 如图1-3所示.

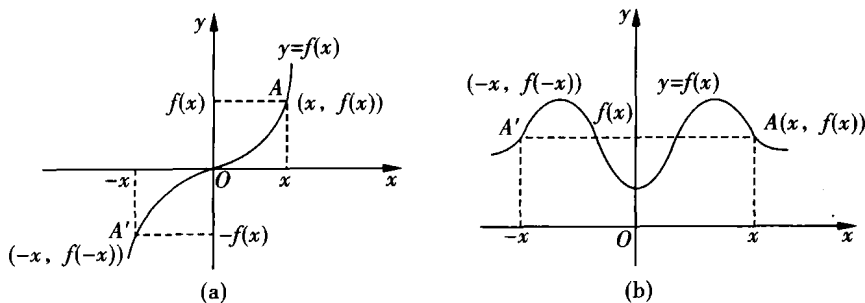


图 1-3

例 1 判断函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln[(-x) + \sqrt{(-x)^2 + 1}] = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1} = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

1.2.2 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义, 如果对于区间 D 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加 (或单调减少), 如图 1-4 所示.

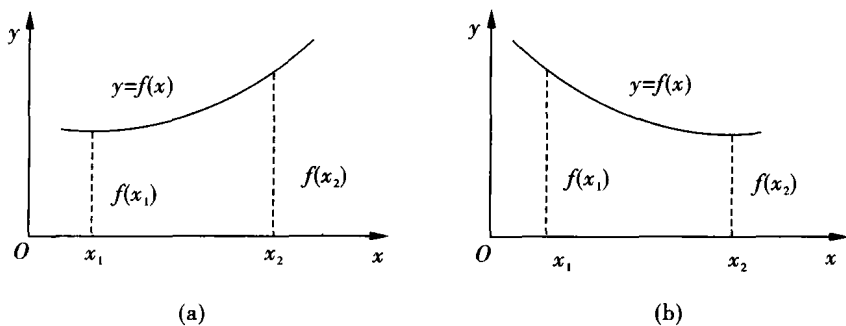


图 1-4

例 2 判断函数在指定区间上的单调性:

$$y = x^2, x \in (-\infty, 0)$$

解 对于任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 若 $x_1 < x_2$, 则有 $x_1 - x_2 < 0$.

又因为 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 所以 $x_1 + x_2 < 0$.

所以 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$

即 $f(x_1) > f(x_2)$

故函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调递减的.

1.2.3 函数的周期性

定义 1.4 一般地,对于函数 $y = f(x)$,设其定义域为 D ,如果存在非零常数 T ,使得对任意 $x \in D$,有 $x + T \in D$ 且 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期. 周期函数的图形特点是:在其定义域内间隔为 T 的区间上,函数图形有相同的形状.

例如,函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数(如图 1-5 所示).

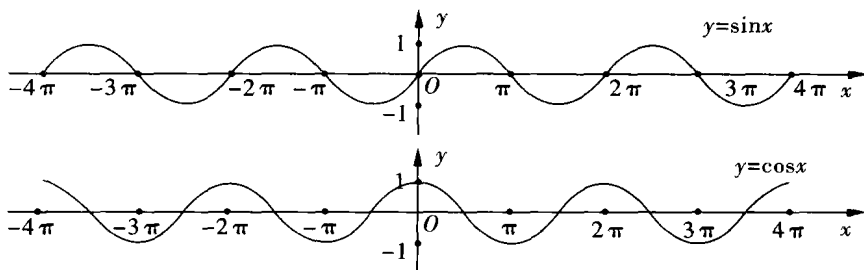


图 1-5

1.2.4 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义,如果存在一个常数 $M > 0$,使得对于 (a, b) 内的任何 x ,都有 $|f(x)| \leq M$ 成立,则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界;如果不存在这样的数 M ,称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.

例如,对于任何实数 x ,都有 $|\cos x| \leq 1$,所以函数 $y = \cos x$ 有界;而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的,如图 1-6 所示.

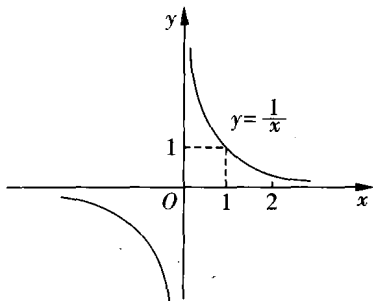


图 1-6

1.3 反函数与复合函数

1.3.1 反函数

定义 1.6 设有函数 $y=f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M , 如果变量 y 在 M 中每取一个值时, 都可以从关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的 $x(x \in D)$ 与之对应, 那么所确定的 y 为自变量的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上, 自变量用 x 表示, 所以反函数经常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1 求函数 $y=e^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=e^{x+1}$ 得到 $x+1=\ln y$, 从而 $x=\ln y-1$, 交换 x 和 y , 得 $y=\ln x-1$. 所以, 所求函数的反函数为 $y=\ln x-1$.

1.3.2 复合函数

有时两个变量之间的联系不是直接的, 而是通过另一个变量联系起来. 如函数 $y=e^{\sin x}$, 函数值不是直接由 x 确定, 而是由 $\sin x$ 确定. 如果用 u 表示 $\sin x$, 那么函数 $y=e^{\sin x}$ 就可以表示成 $y=e^u$, 而 $u=\sin x$. 这说明 y 与 x 的关系是通过变量 u 确定. 具有上述关系的函数, 我们给出下述定义.

定义 1.7 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 通过 u 将 y 表示成 x 的函数, 即 $y=f[\varphi(x)]$, 那么 y 就叫做 x 的复合函数, 其中 u 叫做中间变量.

但要注意, 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该与函数 $y=f(u)$ 的定义域有非空交集, 否则复合函数将失去意义.

例如, 复合函数 $y=\ln u, u=x-1$. 由于 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以中间变量 u 的取值必须在 $(0, +\infty)$ 内, 即 x 应在 $(1, +\infty)$ 内.

由此可知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集.

注: 并不是任意两个函数都可以复合, 如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合.

例 2 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成:

$$(1) y=\sin^2 x \quad (2) y=2\cos \sqrt{1+x^2}$$

解 (1) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的;

(2) 函数 $y=2\cos \sqrt{1+x^2}$ 是由函数 $y=2\cos u, u=\sqrt{v}$ 和 $v=1+x^2$ 复合而成的.

例 3 设 $f(x)=\frac{2}{3+x}, \varphi(x)=\sin x$, 求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

解 求 $f[\varphi(x)]$ 时, 应将 $f(x)$ 中的 x 换成 $\varphi(x)$, 因此 $f[\varphi(x)]=\frac{2}{3+\sin x}$.

求 $\varphi[f(x)]$ 时, 应将 $\varphi(x)$ 中的 x 换成 $f(x)$, 因此 $\varphi[f(x)] = \sin \frac{2}{3+x}$.

例4 设 $f(x-1) = x^2$, 求 $f(2x+1)$.

解 令 $u = x-1$, 得 $f(u) = (u+1)^2$, 再将 $u = 2x+1$ 代入, 即得复合函数

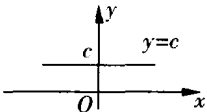
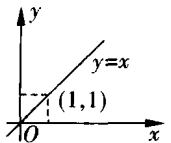
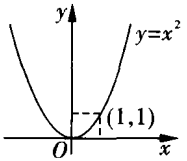
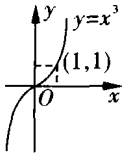
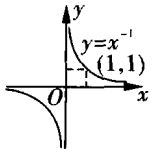
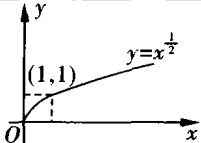
$$f(2x+1) = [(2x+1)+1]^2 = 4(x+1)^2$$

1.4 初等函数

1.4.1 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 这些基本初等函数在中学已经学过(见下表).

基本初等函数的图形与性质

名称	函数	定义域与值域	图像	特性
常数函数	$y = c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		偶函数 有界
幂函数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 单调减少
	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加