高等教育教材

GONGCHENGSHUXUE

工程数学

GONGCHENGSHUXUE

GONGCHENGSHUXUE

工程类数学教材编写组

高等教育出版社

高 等 教 育 教 材

工 程 数 学

工程类数学教材编写组

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/工程类数学教材编写组编. —北京：
高等教育出版社，2003.1
ISBN 7-04-012010-0

Ⅰ.工...　Ⅱ.工...　Ⅲ.工程数学-高等学校：技
术学校-教材　Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 108968 号

责任编辑　孙鸣雷　**封面设计**　吴　昊　**责任印制**　潘文瑞

书　　名　工程数学
主　　编　工程类数学教材编写组

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	**免费咨询**	800-810-0598
总　　机	010-82028899	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com

排　　版	南京理工排版校对公司		
印　　刷	江苏南洋印务集团		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2003 年 1 月第 1 版
印　　张	19.75	**印　　次**	2003 年 7 月第 2 次
字　　数	487 000	**定　　价**	20.00 元

编写说明

根据2000年教育部应用数学基础课程基本要求和1996年国家教委颁布的高等工程学校高等数学课程教学基本要求，我们编写了此教材，供部分本科学生或高职、高专学生使用。

本教材遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”，“必需、够用为度”的原则编写。强调与计算机应用相结合，强调了Mathematica软件的使用，教师可在教学中适当安排时间组织数学实验，以便学生掌握该软件，解决相关问题。

为把学生培养成有较宽的数学基础，具有创新意识，懂得管理，有较强应用能力的高素质人才，本书对传统数学体系削枝强干，力求深入浅出，在不影响数学体系的前提下，淡化理论推导，强化实践能力培养。教材加强了例题和习题的编写，使数学理论和实际应用结合得更紧密。本书编有数学建模一章，并且在教材整体上也渗透了数学建模思想，有一定的创新。

教材展示了数学广泛的应用，编写了大量新颖的例题、习题，其中有许多数学在其他学科中应用的题目，例如，在经营管理、工程技术问题的有关计算，这些题目有助于开阔学生视野，启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而学生不仅会学数学，也解决好用数学的问题。

教材富有弹性，大部分内容是用宋体排印的，少部分内容是用楷体排印的。有的部分加有“*”号，楷体或整节加有“*”号的内容，供教师根据专业的特点与学生的实际选用。本书立足“好教、好学”，每章复习题分A组和B组两组题，A组为基本题，B组供学生选用。在内容选择和文字叙述上，始终贯穿编写原则，力求使本教材成为师生欢迎的教材。

本书由沈警慧、王艳任主编，李以渝、李敏任副主编，吴元清、李开友、况山、王玲等参加编写，由秦明功、张毅任主审，刘志峰、李铁光任副主审，黄从云、王玲等参加审稿。

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便我们修订提高。

工程类数学教材编写组

2003年1月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论(probability theorem)是研究随机现象数量规律的学科,是近代数学的一个重要组成部分. 它在科学技术领域、工农业生产和经济工作中有着广泛的应用,同时也是数理统计的基础. 因此掌握一些概率论的基本知识是十分必要的. 本章将介绍随机事件及其概率的基本概念和重要公式.

§1-1　随 机 事 件

一、随机现象

自然界和人类社会发生的现象,大体可分为两种不同类型.

1. 在一定条件下,某一结果必然发生或必然不发生的现象称为确定性现象. 例如:

向上抛一粒石子,必然会下落;

在一个标准大气压(约 101 千帕)下,水在 100 ℃时必然会沸腾;

从一批全是 15 W 的电灯泡中,任取一只,取到的必然不是 25 W 的电灯泡;

没有空气和水,种子必然不会发芽.

这些现象都是确定性现象.

2. 在一定条件下,具有多种可能结果,事先不能确定会出现哪种结果的现象称为**随机现象**(或偶然现象). 例如:

抛掷一枚硬币,落下后可能正面向上,也可能反面向上,究竟会出现哪种结果,事先是不能确定的;

商店每天的顾客人数,可能是 0 个,1 个,2 个,…,究竟会出现哪种结果,事先是不能确定的;

从一批含有正品和次品的产品中,任取一件,取到的可能是正品,也可能是次品,究竟会出现哪种结果事先是不能确定的.

这些现象都是随机现象.

随机现象出现哪种结果事先是不能预言的,它呈现出一种偶然性. 但是,人们经过长期的实践并深入研究,逐渐发现随机现象的"偶然性"只是对一次或少数几次观察或试验而言,当在相同条件下进行大量重复观察或试验时,随机现象会呈现出某种规律性. 例如:

有人作过多次抛掷硬币的试验,记录如下:

抛 掷 次 数	出现正面向上的次数	抛 掷 次 数	出现正面向上的次数
2 048	1 061	12 000	6 019
4 040	2 048	24 000	12 012

可以看出,在相同条件下多次抛掷质量均匀的一枚硬币,出现正面向上的次数约占抛掷次数的一半.

随机现象的这种规律性称为**统计规律性**.随机现象的统计规律性是客观存在的,是在相同条件下进行大量重复试验时呈现出来的,重复的次数越多,规律性表现得越明显.

二、随机试验

无论是随机现象,还是必然现象都是在人们对自然现象所进行的观察、测量或试验中呈现出来的,为了叙述方便,我们把对自然现象所进行的观察、测量或试验等工作统称为**试验**.把呈现随机现象的试验称为**随机试验**(random test),简称**试验**.例如,抛掷一枚硬币,观察正面、反面出现的情况;在某一单位时间内,记录某电话交换台收到电话呼唤次数;测试某厂生产的一批晶体管的使用寿命,等等.这些都是随机试验.这些试验具有以下三个显著的特点:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是事先知道的,而且不止一个;

(3) 每一次试验总是出现这些可能结果中的某一个结果,但试验前不能确切预言出现那一个结果.

例如,抛掷一枚硬币的试验可在相同条件下重复进行,试验的所有可能结果仅有两个,即"正面向上"或"反面向上",每一次试验必然出现其中之一,但在掷之前不能肯定是"正面向上"还是"反面向上".

三、随机事件

在研究随机现象时,首先关心的是随机试验的结果.我们把**随机试验的每一个可能结果称为随机事件**(random event),简称**事件**.通常用大写字母 A、B、C 等表示.

我们把随机试验的每一个最简单的可能结果称为**基本事件**(basic event).由若干个基本事件组成的事件称为**复合事件**(compound event).因此,无论是基本事件还是复合事件都是随机事件.

例 1 连续两次抛掷一枚硬币,观察正、反面出现的情况.此试验的所有最简单的可能结果有 4 个,基本事件共有 4 个,即{正,正},{正,反},{反,正},{反,反}.

{正,正}表示"第一次出现正面向上,第二次出现正面向上"这一最简单的可能结果,其余类似.

为了叙述方例,我们引进记号"≙",它表示"被记为",或"被表示为"的意思.例如我们把{正,正},{正,反},{反,正},{反,反},可分别记为 A_1、A_2、A_3、A_4,即

$$A_1 \triangleq \{正,正\}, \qquad A_2 \triangleq \{正,反\}, \qquad A_3 \triangleq \{反,正\}, \qquad A_4 \triangleq \{反,反\}.$$

而事件 $B \triangleq$ {仅有一次出现正面向上},$C \triangleq$ {至少有一次出现正面向上},就是复合事件,因为事件 B 由 A_2 和 A_3 两个基本事件组成.事件 C 由 A_1、A_2 和 A_3 三个基本事件组成.A_1、A_2、A_3、A_4,B 和 C 都是随机事件,因为它们都是试验的可能结果.

例 2 抛掷一枚硬币,观察正、反面出现的情况,讨论它的基本事件及"出现正面次数不大于1","出现正面次数大于 1"与试验的关系.

解 这试验的所有最简单的可能结果仅有两个:"出现正面向上"与"出现反面向上",故该试验的所有基本事件为 $A_1 \triangleq$ {出现正面向上},$A_2 \triangleq$ {出现反面向上}.

如果事件{出现正面次数不大于 1}用 B 表示,则 B 在该试验的每一次试验中都会出现,因为试验的两个基本事件中{出现正面向上}的次数最多只有一次,故 B 是该试验的必然结果,如果

事件{出现正面次数大于 1}用 C 表示,则 C 在每一次试验中都不出现,故 C 是该试验的不可能结果.

在一个随机试验中,每一次试验中都出现的事件称为**必然事件**(certain event),常用符号 Ω 表示;每一次试验中都不出现的事件称为**不可能事件**(impossible event),常用符号 $\varnothing$ 表示. 任何试验都有必然事件和不可能事件. 例如,例 1 中{出现正面向上次数小于 3}这个事件就是必然事件,{出现正面向上次数大于 3}这个事件就是不可能事件. 由于必然事件与不可能事件的出现与否已失去了随机性,因而本质上它们已不是随机事件,但为了研究的方便,仍然把它们当作随机事件,作为随机事件的两个特例.

在引入随机事件描述随机试验的结果时,主要的是要弄清楚试验的所有基本事件,而基本事件是针对试验的条件和目的而言的. 例如,在例 1 和例 2 中,虽然它们都是抛掷硬币,但试验的条件不同(例 1 中将硬币连续抛二次为一次试验,例 2 中将一枚硬币抛一次为一次试验)因而最简单的可能结果不同,基本事件就不同. 即使在同一个试验中,由于目的不同,一般基本事件也是不同的. 例如随机试验:甲、乙二人对同一目标各射击一次.

如果观察两人射击是否命中的情况,则试验有如下 4 个基本事件:

$$A_1 \triangleq \{\text{甲、乙都未命中}\}, \qquad A_2 \triangleq \{\text{甲、乙都命中}\},$$

$$A_3 \triangleq \{\text{甲命中,乙未命中}\}, \qquad A_4 \triangleq \{\text{甲未命中,乙命中}\}.$$

如果观察目标被击中的次数,则基本事件有如下 3 个:

$$B_1 \triangleq \{\text{被击中 0 次}\}, \qquad B_2 \triangleq \{\text{被击中 1 次}\}, \qquad B_3 \triangleq \{\text{被击中两次}\}.$$

描绘随机试验必须指明两点:一是试验的条件,二是试验的一切基本事件.

一个随机试验的全体基本事件称为这个试验的**基本事件组**(group of basic events). 因此,每一次试验的结果必然是基本事件组中某一个基本事件出现(或发生). 例如,从 10 个灯泡中(其中 8 个正品,2 个次品)任意抽取三个,观察其次品数,则试验的基本事件组由

$$A_1 \triangleq \{\text{抽到 0 个次品}\}, \qquad A_2 \triangleq \{\text{抽到 1 个次品}\}, \qquad A_3 \triangleq \{\text{抽到 2 个次品}\}$$

组成. 因为每一次试验中,A_1、A_2 和 A_3 中必有一个而且只有一个基本事件出现(发生). 因此,我们又可以说描述一个随机试验主要的就是写出它的基本事件组.

四、基本事件空间

应用点集的概念来研究事件间的关系,比较容易理解. 如果我们把每一个基本事件看成一个点(元素),则全体基本事件就构成了一个点集(全集),称这个点集为随机试验的**基本事件空间**或**样本空间**(sample space),常用字母 Ω 表示. 全集 Ω 中的每一个点就是一个基本事件,又称为**样本点**(sample point),用字母 ω 表示. 这样一来,就可以用点集的知识来描述随机试验及随机事件. 对于一个随机试验,首先写出它的基本事件空间 Ω. 任一个随机事件就是全集 Ω 的一个子集. 用全集 Ω 和空集 $\varnothing$(它们都是样本空间的子集)来分别表示必然事件和不可能事件. 这是因为在每一次试验中,必有 Ω 中的某一个样本点发生. 故事件 Ω 在每次试验中一定发生,所以它是必然事件. 又因为在每一次试验中不可能有 $\varnothing$ 中的点发生($\varnothing$ 中不含有样本点!),所以事件 $\varnothing$ 在每一次试验中一定不发生,故它是不可能事件. 这和前面表示用的符号是一致的.

例 3 同时掷三枚可区别的硬币,用“正”表示“正面向上”,用“反”表示“反面向上”,观察正、反面出现的情况. 试写出:

(1)这个试验的基本事件组; (2)这个试验的基本事件空间 Ω,并用 Ω 的子集表示事件:

$$A \triangleq \{至少有一个正面向上\}, \quad B \triangleq \{恰有两个正面向上\}.$$

解 (1) 同时抛掷三枚可区别的硬币的结果可以看成被选取元素的个数为 2,每个元素的最高重复次数为 3 的重复排列,这个试验共有 $2^3 = 8$ 种最简单的可能结果,用 $\omega_i (i = 1,2,\cdots,8)$ 表示:

$$\omega_1 \triangleq \{正,正,正\}, \quad \omega_2 \triangleq \{正,正,反\}, \quad \omega_3 \triangleq \{正,反,正\}, \quad \omega_4 \triangleq \{正,反,反\},$$

$$\omega_5 \triangleq \{反,正,正\}, \quad \omega_6 \triangleq \{反,正,反\}, \quad \omega_7 \triangleq \{反,反,正\}, \quad \omega_8 \triangleq \{反,反,反\}.$$

这八个最简单的可能结果就是试验的八个基本事件. 在一次试验中,必有且只有这八个基本事件中的某一个发生,因此这八个基本事件组成了该试验的基本事件组.

(2) 试验的基本事件空间为 $\Omega \triangleq \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$,
事件 A 包含样本点:$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$, 因此 $A \triangleq \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$.
事件 B 包含样本点 $\omega_2, \omega_3, \omega_5$,因此 $B \triangleq \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$.

例 4 记录某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数. 写出试验的基本事件空间 Ω,并用 Ω 的子集表示下列事件:

$$A \triangleq \{单位时间内收到呼唤次数不大于 5\}; \quad B \triangleq \{单位时间内收到呼唤次数不小于 2\};$$

$$C \triangleq \{单位时间内收到呼唤次数小于 0\}; \quad D \triangleq \{单位时间内收到呼唤次数恰为 5\}.$$

解 电话交换台在单位时间内收到呼唤的最简单的可能结果为 0 次,1 次,2 次,…. 若用 k 表示“单位时间内收到 k 次呼唤”这一个最简单的可能结果,则试验的样本空间为

$$\Omega \triangleq \{0,1,2,\cdots\}.$$

因此 $A \triangleq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B \triangleq \{2, 3,\cdots\}, \quad C \triangleq \varnothing, \quad D \triangleq \{5\}.$

这个样本空间虽然含有无穷多个样本点,但是这些样本点是可排序的,象这种样本空间的样本点数称为**有可列个**(或**可数**).

例 5 测试某厂生产的晶体管的使用寿命(从使用起,到用坏为止的时间),写出其样本空间.

解 若用 x 表示“使用寿命为 x 小时”这一最简单的可能结果,$0 \leqslant x < \infty$,则样本空间为

$$\Omega \triangleq \{x \mid 0 \leqslant x < \infty\}.$$

这个基本事件空间含有无穷多个样本点,而这些样本点充满区间$[0,\infty)$,象这种样本空间的样本点数称为**有不可列个**(或**不可数的**).

例 6 求下列试验的基本事件个数 n:

(1) 从 100 件商品中每次任取 3 件;

(2) 从 100 本不同的书中,每次任取一本,取后不放回,接连取三次.

解 (1) 从 100 件商品中每次任取 3 件,这是一个组合问题,有 C_{100}^3 种不同的取法,每种取法就是一个基本事件,因此, $n = C_{100}^3$;

(2) 取出的三本书有先后顺序之分，故是一个排列问题，每一种排法就是一个基本事件，因此，　$n = P_{100}^{3}$.

五、事件间的关系与运算

在任何一个随机试验中，总有许多随机事件，其中有些是比较简单的，有些是比较复杂的，它们之间有着各种各样的联系. 正确分析事件之间的联系，弄清它们之间的关系，将有助于我们通过对简单事件规律的研究去掌握较复杂事件的规律.

例 7　在 1, 2, 3, …, 9, 10 十个数字中任取一个，观察其结果.

在这个随机试验中，由于是任取一个观察其结果，所以试验的所有最简单的可能结果有 10 个，则试验的样本空间为　$\Omega \triangleq \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$.

在这个试验中有许多随机事件，这里仅列举其中一些事件如下：

{取到的数字为 6}，　{取到的数字为偶数}，　{取到的数字为 2, 4, 6, 8, 10 中的一个}，

{取到的数字为 1, 2, 3 中的一个}，　{取到的数字小于或等于 6}，　{取到的数字大于 4}等.

下面我们讨论事件间的关系与运算时，总假定样本空间 Ω 已经给定，所涉及到的事件都是指同一试验中的事件，并利用例 7 中的事件作为具体的例子.

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A(event A include event B)，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

例如，在例 7 中，设　$A \triangleq$ {取到的数字为 6}，　$B \triangleq$ {取到的数字为偶数}，则 A 发生必然导致 B 发生. 因为取到数字为 6 就意味着取到偶数，故 $A \subset B$.

事件间的包含关系可用图 1-1 直接地说明. 图中的矩形区域表示样本空间 Ω，A、B 两个圆形区域分别表示事件 A、B. 在点集观点下，事件 A 与事件 B 都是全集 Ω 的两个子集. “A 发生必然导致事件 B 发生”的意义，就是集合 A 是集合 B 的子集.

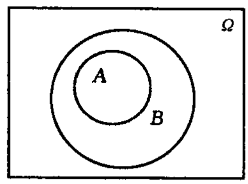

图 1-1

2. 相等关系

如果事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $A \subset B$，且 $A \supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**(event A is equal to event B)，记为 $A = B$.

例如，在例 7 中，设　$A =$ {取到的数字为偶数}，　$B =$ {取到的数字为 2,4,6,8,10 中的一个}，

显然有　$A = B$.

在点集观点下，“事件 A 与事件 B 相等”就是集合 A 等于集合 B，即 A、B 含有相同的样本点. 相等关系是包含关系的一个特例.

3. 事件的和(并)

如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样的事件称为事件 A 与事件 B 的**和**(sum 或 union)，记为 $A + B$(或 $A \cup B$).

例如，在例 7 中，设　$A =$ {取到的数字为偶数}，　$B =$ {取到的数字为 1, 2, 3, 4, 5 中的一个}，则

$$A + B = \{\text{取到的数字为 } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 \text{ 中的一个}\}.$$

事件 A 与事件 B 的和 $A+B$ 可由图 1-2 中阴影部分直观地说明. 在点集观点下,事件 A 与事件 B 都是全集 Ω 的子集,和事件 $A+B$ 就是集合 A 与集合 B 的并集.

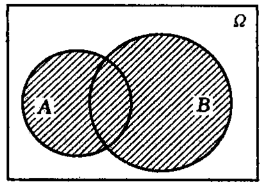

图 1-2

4. 事件的积(交)

如果事件 A 与事件 B 同时发生,则称此事件为事件 A 与事件 B 的**积**(或**交**)(product 或 intersection),记为 AB(或 $A\cap B$).

例如,在例 7 中,设 $A=\{$取到的数字为奇数$\}$, $B=\{$取到的数字大于 6$\}$, 则

$$AB=\{\text{取到的数字为 }7,9\text{ 中的一个}\}.$$

事件 A 与事件 B 积的意义由图 1-3 中阴影部分所示. 在点集观点下,事件 A 与事件 B 的积就是集合 A 与集合 B 的交集.

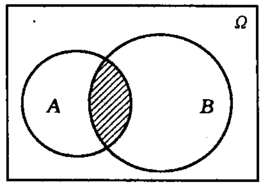

图 1-3

5. 事件的差

如果事件 A 发生而事件 B 不发生,则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的**差**(difference),记为 $A-B$.

例如,在例 7 中设 $A=\{$取到的数字为奇数$\}$, $B=\{$取到的数字大于或等于 6$\}$, 则

$$A-B=\{\text{取到的数字为 }1,3,5\text{ 中的一个}\}.$$

事件 A 与事件 B 的差的直观意义由图 1-4 的阴影部分所示. 在点集观点下,事件 A 与事件 B 的差就是集合 A 与集合 B 的差.

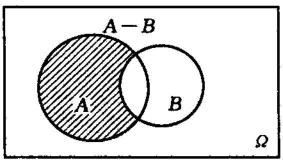

图 1-4

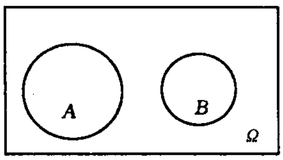

图 1-5

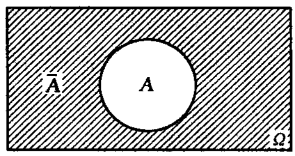

图 1-6

6. 互不相容关系

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B **互不相容**或**互斥**(mutually exclusive).

例如,在例 7 中,设 $A=\{$取到数字为偶数$\}$, $B=\{$取到的数字为 1, 3, 5 中的一个$\}$, 则 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$, 它们是不相容的事件.

事件 A、B 不相容的直观意义由图 1-5 所示. 在点集观点下,事件 A 与事件 B 互不相容就是集合 A 与集合 B 的交集为空集.

7. 对立事件(逆事件)

如果事件 A 不发生,即 $\Omega-A$, 这一事件称为事件 A 的**对立事件**或**逆事件**(inverse event), 记为 $\overline{A}$.

例如,在例 7 中,设 $A=\{$取到的数字为偶数$\}$, $B=\{$取到的数字为奇数$\}$, 则 B 就是 A 的对立事件. 因为取到不是偶数的事件就是取到奇数的事件.

事件 A 的对立事件的直观意义由图 1-6 阴影部分所示. 在点集观点下, A 的对立事件 $\overline{A}$ 就是集合 A 的补集.

由上面的讨论知，在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 二者只能发生其中之一，且必然发生其中之一. 对立事件有下面一些简单性质：

1° $A\overline{A}=\varnothing$；　2° $A+\overline{A}=\Omega$；　3° $\overline{\overline{A}}=A$，即对立事件是相互的.

两个相互对立的事件一定是不相容的事件，但不相容的两个事件却不一定是相互对立的事件.

例 8 设 A、B、C 为 Ω 中的三个事件，试用事件 A、B、C 表示下列事件：

(1) {A 发生而 B 与 C 都不发生}；　(2) {A 与 B 都发生而 C 不发生}；

(3) {A、B、C 都不发生}；　(4) {A、B、C 中恰有一个发生}；

(5) {A、B、C 中至少有一个发生}.

解 (1) 可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$；　(2) 可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) 可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；　(4) 可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) 可表示为 $A+B+C$ 　或　 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

这里最后一个式子包含了 A、B、C 三个事件{恰好发生一个}、{恰好发生二个}和{三个都发生}这三种情况.

六、事件的运算律

事件的运算满足以下规律：

1. 交换律 $A+B=B+A$，$AB=BA$；

2. 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$，$A(BC)=(AB)C$；

3. 分配律 $(A+B)C=AC+BC$；

4. 反演律 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

这些运算律和集合的运算律是一致的.

习题 1-1

1. 指出下列事件中哪些是必然事件，哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

(1) $A=$ {任取一个三位数是 105}；　(2) $B=$ {一副扑克牌中随机地抽出一张是红桃}；

(3) $C=$ {任取一个三位数不小于 100}；　(4) 射击一次，$A_1=$ {击中 10 环}，$A_2=$ {没有击中}，$A_3=$ {击中的环数不大于 10 环}，$A_4=$ {击中的环数小于 0}.

2. 写出下列随机试验中各基本事件的全集 Ω：

(1) 投掷一枚骰子，观察出现的点数；(2) 袋里装有四个球，其中有两个白球两个黑球，每次从中任取两个.

3. 写出下列随机试验的基本事件数：

(1) 同时掷两枚相同的硬币；　(2) 连续两次掷同一枚硬币；

(3) 一批产品 5 件，其中 2 件次品，3 件正品，从中任取 3 件.

4. 对立事件与互不相容事件有何异同？

5. 一批产品中含有正品和次品，从中任取三件，设：

$A_1=$ {至少有一件次品}，$A_2=$ {恰有一件次品}，$A_3=$ {至少有两件次品}，$A_4=$ {三件都是次品}，$A_5=$ {至多有一件次品}，$A_6=$ {至少有一件正品}，$A_7=$ {没有次品}.

试分析：(1) A_1 包含哪些事件？ (2) $A_2+A_3=$？ (3) $A_1A_5=$？ (4) A_4 与 A_5 是不是互斥事件？

(5) $\overline{A_1}=$？ $\overline{A_6}=$？

6. 从 1 到 100 这 100 个自然数中任取一个数，设：

$A=$ {取到的数能被 5 整除}，$B=$ {取到的数小于 50}，$C=$ {取到的数大于 30}.

问：AB、ABC、$B+C$、$(A+C)B$ 各表示什么意思？$B-C$ 表示什么意思？

7. 设 A、B、C 为 Ω 中的三个随机事件，试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) $\{A$、B、C 都发生$\}$；
(2) $\{A$、B、C 中至少两个发生$\}$；
(3) $\{A$、B、C 中不多于一个发生$\}$；
(4) $\{A$、B、C 中不多于二个发生$\}$.

8. 选择题：

(1) 下列关于事件的结论中，正确的是(　　)；

A. $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$,　　B. $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A+B}$,　　C. $B\overline{A}=B-A$,　　D. $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$.

(2) 若事件 A、B 满足 $B-A=B$，则一定有(　　)；

A. $A=\varnothing$,　　B. $AB=\varnothing$,　　C. $A\overline{B}=\varnothing$,　　D. $B=\overline{A}$.

(3) 若事件 A、B 满足 $B\subset A$，则正确的结论是(　　).

A. $A+B=B$,　　B. $\overline{B}\supset\overline{A}$,　　C. $\overline{BA}=\overline{A}$,　　D. $AB=B$.

§1-2　概率的统计定义　古典概型

随机事件在一次试验中是否发生，事先是不能预言的，但它在一次试验中发生的可能性的大小是具有某种规律性的，概率就是用来刻画随机事件在试验中发生的可能性大小的数量指标.

一、概率的统计定义

随机事件发生的可能性的大小是有其客观规律性的，这种规律性常常可以通过大量的重复试验来发现，我们把这种从大量重复试验得到的规律性，称为随机事件的统计规律性.

定义 1　在一定条件下的 n 次重复试验中，如果事件 A 发生 m 次，则 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 的**频率**(frequency)，m 称为事件 A 的**频数**.

经验证明，频率是能反映事件发生的可能性大小的一个量. 当试验次数不多时，频率具有明显的波动性；当试验次数 n 很大时，频率具有一定的稳定性，即在某一常数附近作微小的摆动；并且，试验次数越多，频率就越接近这个常数. 例如，历史上有人作过多次掷硬币的试验，试验记录如下：

实验者	投掷次数 n	正面向上次数 m	频率
德·摩尔根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
唯　尼	30 000	14 994	0.499 8
罗曼夫斯基诺	800 640	399 699	0.492 3

从表中可以看出，掷的次数越多，出现"正面向上"的频率越接近 0.5.

定义 2　在一定条件下，重复作 n 次试验，当 n 很大时，如果事件 A 的频率稳定在某一确定的常数 p 附近，则把常数 p 称为随机事件 A 的**概率**(probability)，记为 $P(A)=p$.

定义 2 称为**概率的统计定义**.

例如,在投掷硬币的试验中,事件 $A=\{$正面向上$\}$ 的频率稳定在 0.5 附近,所以 $p=0.5$,即事件 A 的概率 $P(A)=0.5$.

概率的统计定义指出了事件的概率是客观存在的,但是在一般情况下,概率值 p 是不可能用统计方法精确得到的,因此,在实际工作中,当 n 充分大时,通常就以频率作为概率的近似值,即 $P(A)\approx\frac{m}{n}$.

用频率来描述事件的概率,通常有两种方法:一种是通过一次大量的试验,用频率作为概率的近似值.例如,对某厂的产品抽取 1 000 件,测得次品为 10 件,那么就可用频率 $\frac{10}{1\,000}=0.01$ 作为该厂产品次品率的近似值.另一种方法就是用多次重复试验得到的一系列频率的平均值作为概率的近似值.例如,对某厂的产品测试了 500 次(每次测试若干件产品),平均合格率为0.95,于是可用平均合格率 0.95 作为该厂的产品合格率的近似值,即从该厂的产品中任取一件,{取得合格品}这一事件的概率大约为 0.95.

在 n 次试验中,事件 A 发生的频数 m 总是介于 0 与 n 之间,即 $0\leqslant m\leqslant n$,所以事件 A 的频率总是介于 0 与 1 之间.于是,可得**概率有下列性质**:

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

2° $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

3° 如果事件 A 与事件 B 是互不相容的,则

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)} \tag{1-1}$$

证明 设在相同条件下,重复进行 n 次(n 充分大)试验,其中,事件 A 发生了 m_A 次,事件 B 发生了 m_B 次,由于事件 A、B 互不相容,所以事件 $A+B$ 发生了 m_A+m_B 次.根据概率的统计定义,事件 A 发生的频率$\frac{m_A}{n}$稳定于事件 A 的概率 $P(A)$,事件 B 的频率$\frac{m_B}{n}$稳定于事件 B 的概率 $P(B)$,事件 $A+B$ 的频率 $\frac{m_A+m_B}{n}$ 稳定于事件 $A+B$ 的概率 $P(A+B)$.但由于

$$\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n},$$

因此,$\frac{m_A+m_B}{n}$ 还应稳定于 $P(A)+P(B)$,结果 $\frac{m_A+m_B}{n}$ 既稳定于 $P(A+B)$,又稳定于 $P(A)+P(B)$,由频率的稳定性知

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

公式(1-1)可推广到多(有限)个事件,即若有 n 个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$,它们两两互不相容,则有

$$\boxed{P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)} \tag{1-2}$$

公式(1-2)称为概率的**有限可加性**.

二、古典概型

用频率来估算事件的概率,必须通过大量的重复试验才能得到稳定的常数 p,这是比较困难

的.在某些特殊情况下,可以不必借助大量的重复试验,而是根据事件的特点,对事件及其相互关系进行分析,就可直接计算出事件的概率.例如,抛掷一枚均匀的硬币,出现正面向上与反面向上的结果是等可能的,因此,可以认为这两个事件发生的概率都是 0.5.又例如,在一个口袋中装有编号为 1, 2, 3,…, 10 的 10 个同样大小重量相等的球,从中任取一个,则每个球被取到的机会完全相同,且只有 10 个最简单的可能结果(即有 10 个基本事件),因此可以认为这 10 个事件发生的概率都是 0.1.

上述两个随机试验中的基本事件的概率之所以能确定出来,是由于这两个试验具有两个显著的特征:一、基本事件空间仅含有限个基本事件;二、每个基本事件出现的机会是相等的.下面我们就讨论具有这些特点的一类随机试验.

定义 3 如果随机试验具有如下两个特征:

(1) 试验的所有基本事件(即基本事件空间的样本点)只有有限个,不妨设为 n 个,并记为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$(有限性);

(2) 试验中每个基本事件(样本点)出现的机会相等(等可能性),即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n).$$

则称这类随机试验的数学模型为**古典概型**(古典的概率模型(classical model of probability)).

如果一个随机试验具有上述两个特征,则称这个随机试验**属于古典概型**.

例如,上面所述的抛掷一枚均匀的硬币和任取一球的试验都属古典概型.

在古典概型中,它的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 作为事件时是必然事件,且为全体基本事件的和,即

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n.$$

根据概率具有有限可加性有

$$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n),$$

而 $\quad P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n), \quad$ 故 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \dfrac{1}{n}.$

由此,对古典概率型中任一事件 A 的概率有如下定义:

定义 4 如果一个随机试验的基本事件空间 Ω 共含有 n 个等可能的基本事件,而事件 A 恰包含 m 个基本事件,则称 $\dfrac{m}{n}$ 为事件 A 的**概率**,记为 $P(A)$,即

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} \tag{1-3}$$

上述定义称为**概率的古典定义**.

概率的古典定义与概率的统计定义是一致的.因为对于古典概型的试验,若在相同条件下,进行大量重复试验,则试验中的事件 A 发生的频率总是稳定于数 $\dfrac{m}{n}$ 的.例如,在抛掷一枚硬币的试验中,样本空间仅有两个基本事件:$\omega_1 = \{$正面向上$\}$,$\omega_2 = \{$反面向上$\}$.若硬币是均匀的,则 ω_1 与 ω_2 出现的可能性相同,于是按古典概率计算公式有

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2}.$$

这与前面按概率的统计定义，进行大量重复试验的结果是一样的，即 ω_1 出现的频率总是稳定于 $\frac{1}{2}$ 的. 统计定义具有普遍性，适用于一切随机试验. 概率的古典定义仅适用于古典概型这类特殊的随机试验，它是统计定义的特殊情况.

根据概率的古典定义，不难验证事件的古典概率也具有如下性质：

1° 非负性：对任意事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2° 规范性：$P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$；

3° 有限可加性：若 A_1、A_2、…、A_n 为 n 个两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

例 1 从数字 1，2，3，4，5 中任取 3 个组成三位数. 求：

(1) 所得三位数是偶数的概率；　　(2) 所得三位数不小于 200 的概率.

分析 从已知的 5 个数字中任取 3 个，不管这 3 个数字怎么排列都可组成一个三位数，每一种排法就是一个基本事件. 由于取法是任意的，因此每种排法出现的机会是相等的，于是基本事件的总数 $n = \mathrm{P}_5^3$；

(1) 偶数的个位数可以是“2”或“4”；十位、百位数可以任取. 因此，“三位数是偶数”这一事件含有 $\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_4^2$ 个基本事件；

(2) 百位数只要取 2，3，4，5 之一，所组成的三位数必大于 200. 因此，“不小于 200 的三位数”这一事件含有 $\mathrm{P}_4^1\mathrm{P}_4^2$ 个基本事件.

利用概率古典定义便可求解.

解 (1) 设 $A = \{$所得三位数是偶数$\}$，由题意得，基本事件总数 $n = \mathrm{P}_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$，$A$ 所含基本事件个数 $m_A = \mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_4^2 = 2 \times 4 \times 3 = 24$，由概率的古典定义有

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5};$$

(2) 设 $B = \{$所得三位数小于 200$\}$，由题意得，基本事件总数 $n = \mathrm{P}_5^3$，B 所含基本事件个数 $m_B = \mathrm{P}_4^1\mathrm{P}_4^2$，由概率的古典定义有

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{4 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{4}{5}.$$

例 2 为了减少比赛场次，把 20 个球队分成两组(每个组 10 个队)进行比赛，求最强的两个队分在不同组内的概率.

解 设 $A = \{$最强的两个队分在不同组内$\}$. 将 20 个球队平均分成两组，有 $\mathrm{C}_{20}^{10}/2!$ 种不同的分法，因此基本事件总数 $n = \mathrm{C}_{20}^{10}/2!$，两强队分在不同的组有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{18}^9/2!$ 种分法，即事件 A 由 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{18}^9/2!$ 个基本事件组成，于是 $m = \mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{18}^9/2!$. 所以

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{18}^9/2!}{\mathrm{C}_{20}^{10}/2!} = 0.526.$$

一般地，利用古典概率定义计算概率时，必须注意以下三点：

(1) 所讨论的试验是否属古典概型；

(2) 等可能的基本事件是什么及其总数 n；