自学自测丛书

高中数学
单元检测题解析

DAN YUAN JIAN CE TI JIE XI

（按新大纲修订）

高中数学
单元检测题解析

（按新大纲修订）

天津市数学学会普及教育委员会

王雁飛

天津教育出版社

责任编辑：陈世伟

高中数学

单元检测题解析

（按新大纲修订）

天津市数学学会普及教育委员会

*

天津教育出版社出版

（天津市湖北路27号）

新华书店天津发行所发行

天津新华印刷一厂印刷

*

787×1092毫米32开　12.5印张　267千字

1987年10月第2版

1988年4月第4次印刷

印数 313401—432400

ISBN 7-5309-0134-6

G·92　定价：2.10元

前　言

在广大青年自学的过程中，做适量的典型题，对理解基本概念、掌握基本理论、培养思维能力是很必要的。特别是学完一个单元之后，进行自我检测，找出不足之处，通过分析，有针对性地复习有关内容，是加深理解、牢固掌握所学知识的有效方法。

书中按照现行课本的顺序，每章都编排了A、B两套自我检查测验题（简称检测题）。选题中我们力求做到：题型全面、重点突出；重视基础、考查能力；题目新颖、不偏不怪。A组题侧重考查基本知识和基本技能；B组题侧重考查综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，并介绍一些解题技巧。为全面检查高中数学掌握的情况，还编排了三套总复习检测题。为便于自我检查，每套检测题后面都给出了答案、提示或思路点拨，这使读者不但能找到题目的正确答案，而且还能通过言简意明的思路点拨，学到分析问题和解决问题的思想、观点和方法。

书中各章的B组题及复习题都配有选择题，这些题的选择支中都是有且只有一个是正确的，各章中就不一一加以说明。

本书可供自学高中数学的读者及高中各年级学生使用，还可供数学教师教学中参考。

参加本书编写的有王元杨、王连笑、刘玉翘、李果民、

李家琪、元以恩、陈明耀、梁汝芳、郗昌盛、烟学敏．霁广生等同志。全书由刘玉翘同志统编，

为适应教学需要，我们根据国家教委新颁布的《全日制中学（各科）教学大纲》，修订了本书，期望对广大中学师生有更切实的帮助。

限于我们的水平，书中难免有错误和不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

一九八七年六月

目　录

代数

三　角

立体几何

平面解析几何

微积分初步

代　　数

第一单元　幂函数、指数函数和对数函数

一、A组检测题

1．填空题：

（1）在____处填上适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subset$，$\supset$）．

①Z $\underline{\supset}$ $Z^{+}\cup Z^{-}$；② 0 $\underline{\in}$ $\{n\,|n=2k,\ k\in Z\}$．

（2）设$I=\{x\,|x$是不大于20的质数$\}$，并有$A\cap\overline{B}=\{3,5\}$，$\overline{A}\cap B=\{7,19\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,17\}$，那么

集合$A=$ $\underline{\{3,5,11,13\}}$，

集合$B=$ $\underline{\{7,11,13,19\}}$．

（3）若$A=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|\ 1<x\leqslant 3\}$，

$C=\{x|\ -3<x<\ 2\}$，

则$A\cap(B\cup C)=$ $\underline{\{x|1<x\leqslant 2\}}$

（4）判断下列各对应是不是映射？是不是一一映射？

①X是乘坐公共汽车的站数的集合，Y是票价的集合．

$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$Y=\{$ 5分 , 1角 $\}$

所以是映射，不是一一映射；

②X是一些物质的集合，

Y是物质比重的集合.

X = {钢、铜、水银、空气}

Y = {8.9、7.8、0.00129、1.84、13.6}

所以是映射，不是一一映射.

（5）用集合交、并、补的符号表示图1-1，图1-2中的阴影部分.

①

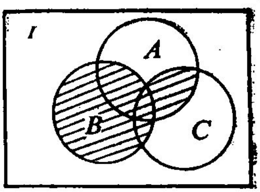

图1-1

②

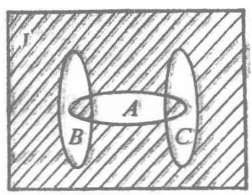

图1-2

答：______，答：______

（6）用“>”“<”符号连结下列各组数.

①$0.02^{-\frac{3}{2}}$___$0.02^{-\frac{1}{2}}$；②若$0<a<1$，$a^{-\frac{3}{4}}$___1，

③$\log_2 3$___$\log_4 3$.

（7）在___处填上奇函数、偶函数、非奇非偶函数.

①函数$y=1+\sqrt[3]{1-2x}$是___函数；

②函数$y=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$是___函数.

（8）方程$0.4^{\lg^2 x+1}=(6.25)^{2-\lg x^3}$的解是________

______.

2. 已知$y=\frac{1}{3}x+m$及$y=nx-6$互为反函数，

求m、n。

3. 解方程组

$$\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1, \\ \log_{xy}(x+y)=0.\end{cases}$$

4. 已知$f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$且$f(\lg a)=\sqrt{10}$，

求a。

5. 已知：$2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$，

求证：$3ab-2ac-bc=0$。

6. 当a为何值时，方程$\frac{\lg 2x}{\lg(x+a)}=2$无解，有一解，有

二解？

7. 若$\lg x$的首数为n，$\lg x^2$与$\lg\frac{1}{x}$的尾数相等，求x。

8. (1) 求函数$y=\log_{2x+1}(32-4^x)$的定义域.

(2) 求函数$f(x)=\sqrt{\lg(-3x^2+6x+7)}$的值域.

(3) 已知$f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>1)$，证明$f(x)$在定义域

内是增函数，并讨论$f(x)$的奇偶性

(4) 画出$y=x^{\frac{2}{3}}$的图象.

9. 已知$\log_{2a}a=x$，$\log_{3a}2a=y$。

求证：$2^{1-xy}=3^{y-xy}$。

10．设a、b是两个实数，

$A=\{(x,\ y)|\ x=n,\ \ y=na+b,\ \ n$是整数$\}$，

$B=\{(x,\ y)|\ x=m, y=3m^2+15, m$是整数，$\}$.

$C=\{(x、y)|\ x^2+y^2\leqslant 144\}$

是平面xOy内的点集合，讨论是否存在a和b使得

（1）$A\cap B\neq\varnothing$；

（2）$(a,\ b)\in C$.

同时成立.

二、答案　提示　思路点拨

1.（1）①$\supset$；②$\in$.

（2）$A=\{3,\ 5,\ 11,\ 13\}$，$B=\{7,\ 11,\ 13,\ 19\}$.

（3）$A\cap(B\cup C)=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$.

（4）①是映射，不是一一映射；②是映射，不是一一映射.

（5）①$(A\cap C)\cup B$；②$(\overline{A\cup B\cup C})\cup(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

（6）①$>$；②$>$；③$>$.

（7）①非奇非偶函数；

②$f(-x)=\log_3(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$，学生易被外形所惑，认为是非奇非偶函数，

但$f(-x)=\log_3\dfrac{(-x+\sqrt{x^2+1})(-x-\sqrt{x^2+1})}{(-x-\sqrt{x^2+1})}$

$=\log_3\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$，所以是奇函数.

(8) 将原方程化成$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-\lg x^3)}$ 即可化成对数方程解之，得$x=10$ 或$x=10^5$.

2。$n=3$，$m=2$.

3．在$x-y>0$，$x+y>0$，$xy>0$，$xy\neq 1$条件下方程组有解，用代入法解之，可得$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

$y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4．$f(\lg a)=a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$．化简可得

$2\lg^2 a-\lg a-1=0$．解之可得$a=\frac{\sqrt{10}}{10}$或$a=10$.

5．可令$2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}=k$．当$k\neq 1$时，$6a\lg 2=\lg k$，

$\lg 2=\frac{\lg k}{6a}$；$3b\lg 3=\lg k$，$\lg 3=\frac{\lg k}{3b}$；$2c\lg 6=\lg k$，

$\lg 6=\frac{\lg k}{2c}$．$\because \lg 2+\lg 3=\lg 6$．$\therefore \frac{1}{6a}\lg k+\frac{1}{3b}\lg k$

$=\frac{1}{2c}\lg k$．化简可得$3ab-2ac-ba=0$．当$k=1$时，

$\lg k=0$．$\therefore a=b=c=0$，代入$3ab-2ac-bc=0$成立。

6 在$\begin{cases}x>0\\x+a>0\\x+a\neq 1\end{cases}$条件下将对数方程化成$x^2+2(a-1)x+a^2=0$，判别式$\Delta=4-8a$讨论之，当$a\geq\frac{1}{2}$时原方程无解，

当$a=0$时原方程有一解，当$a<0$或$0<a<\frac{1}{2}$时，原方程有二解.

7．设$\lg x$的尾数为p，则$\lg x=n+p(0\leqslant p<1)$.

$\because$ $\lg x^2$与$\lg\frac{1}{x}$尾数相同，

$\therefore$ $\lg x^2-\lg\frac{1}{x}=3\lg x=3n+3p$为整数.

从而$p=0$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$.

$\lg x=n$，$n+\frac{1}{3}$，$n+\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $x=10^n$，$10^{n+\frac{1}{3}}$，$10^{n+\frac{2}{3}}$.

8．(1) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$.

(2) 用y表示x后可得$y\in[0,\ 1]$.

(3) 设任意的x_1，$x_2\in R$，$x_1<x_2$，可得

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2(a^{x_2}-a^{x_1})}{(a^{x_2}+1)(a^{x_1}+1)}>0.$$

($\because$ $a>1$，$y=a^x$在R上是增函数.)

(4) 从而证得$f(x)$在定义域内是增函数，$f(x)$是奇函数.

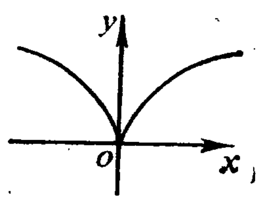

图1-3

9. 本题关键要导出xy，$1-xy$，$y-xy$的解析式：

$$xy=\log_{3a}a,$$

$$1-xy=\log_{3a}3,$$

$$y-xy=\log_{3a}2.$$

分别代入原式两边，再取以$3a$为底的对数即得证.

10. 本题可归结为是否存在a，b能使$a^2+b^2\leqslant 144$

且使$3x^2+15=ax+b$ 即

$$3x^2-ax+15-b=0 \qquad ①$$

至少有一个整根.

要使整数根存在，首先要满足$\Delta\geqslant 0$条件，

因而得$\begin{cases} b\geqslant -\dfrac{1}{12}a^2+15, \\ a^2+b^2\leqslant 144. \end{cases}$

解上式得 $(-\sqrt{108},\ 6)$，$(\sqrt{108},\ 6)$.

分别代入①，都不存在整数解，所以原题(1)、(2)不能同时成立.

三、B组检测题

1. 选择题：

(1)数$3^{1001}7^{1002}13^{1003}$的个位数是

(A)1；(B)3；(C)5；(D)7；(E)9.

答（ ）

(2) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[5]{5}$ 这三个数之间的大小顺序是

(A)$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[5]{5}$； (B)$\sqrt{2}>\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$；

(C)$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$； (D)$\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}>\sqrt{2}$.

答(　　).

(3) 已知$\log_m 9 < \log_n 9 < 0$　(m、n为不等于1的正数)，则满足上述不等式的m、n关系是

(A) $1 < n < m$;　　(B) $m < n < 1$;

(C) $1 < m < n$;　　(D) $n < m < 1$.

答(　　).

(4) 设I = {不大于10的非负整数}，

$A = \{2, 5, 8\}$，$B = \{3, 4, 5, 9\}$，则

$\overline{A} \cup \overline{B}$是

(A) $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$;

(B) $\{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$;

(C) $\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$;

(D) $\{0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$.

答(　　).

(5) 如图1-4，I 表示全集.阴影部分用A，B，C 表示出来是.

(A) $B \cup (A \cap C)$;　(B) $A \cap (B \cap C)$;

(C) $\overline{A \cap (B \cap C)}$;　(D) $B \cap (A \cap C)$.

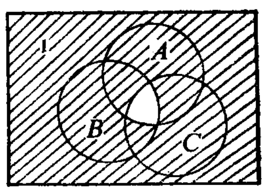

图1-4

答：(C)。

(6) 若$y = a^x$是增函数，那么下面结论中正确的是

(A) 若$0 < a < 1$,

当$x > 0$时，$0 < y < 1$，当$x < 0$时$y > 1$;

(B) 若$a > 1$,

当$x>0$时，$y>1$，当$x<0$时$0<y<1$；

(C)若$a>1$，

当$x>0$时，$0<y<1$，当$x<0$时，$y>1$；

(D)若$0<a<1$，

当$x>0$时，$0<y<1$，当$x<0$时，$y>1$。

答：(　　)

(7)函数$y=1+\lg(x+2)$的反函数是

(A)$y=2-10^{x-1}$；(B)$y=10^{x-1}-2$；

(C)$y=10^{x+1}-2$；(D)$y=2-10^{x+1}$。

答：(　　)。

(8)已知x满足不等式　设 $\log_{\frac{1}{2}}x=t$　则 $2t^2+7t+3\leq 0$

$2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+7\log_{\frac{1}{2}}x+3\leqslant 0$。　∴ $-3\leq t\leq -\frac{1}{2}$

则　$f(x)=(\log_2\frac{x}{2})(\log_2\frac{x}{4})$ 的最大值是

(A)8；(B)3；(C)2；(D)$\frac{1}{2}$；(E)1。

答：(C)。

2．若$f(x)=a^x$，$\varphi(x)=\dfrac{ax-b}{cx-a}$，且$x>0$，$a^2-bc\neq 0$。

求证：$\varphi[\varphi(x)]=f(\log_a x)$。

3．说明下列函数的图象与函数$y=\log_a x$的图象的关系

(1)$y=\log_{\frac{1}{a}}x$；(2)$y=\log_a(-x)$；(3)$y=\log_a|x|$。

4．已知$a>0$，$n\in N$，$x=\dfrac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$。

求$(x+\sqrt{1+x^2})^n$的值。

5. 设$n\in N$，$f(n)=\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}$

求证：当n增加时，$f(n)$开始增加以后又减少。

6. 已知三个集合：

$A=\{(x,\ y)\ |x+ky=1\}$ ①

$B=\{(x,\ y)\ |kx+y=1\}$ ②

$C=\{(x,\ y)\ |x^2+y^2=1\}$ ③

问k是什么数时，集合$(A\cap C)\cup(B\cap C)$只有两个元素。

7 已知函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x)$。

(1) 求单调区间。

(2) 分别在单调区间内求它的反函数。

8 设c、d、x为实数，$c\neq0$，x为未知数。讨论方程

$\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$ 在什么情形下有解，有解时求出它的解。

9 设α和β是方程$x^2-x\cos\theta+\sin2\theta=0$的两个根。$(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$

求证：$\log_{\alpha+\beta}\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}+\log_{\alpha+\beta}\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}>1$。

10. 已知$y=f(x)$在它的定义域内是增函数。

(1) 证明$y=f^{-1}(x)$在其定义域内也是增函数。

(2) 若$f(x)\equiv f^{-1}(x)$，证明$f(x)\equiv x$。

四、答案　提示　思路点拨

1. (1) 可用分析的方法，探索3^n，7^n 13^n $(n\in N)$个位数周期变化情况，应选E。