高等学校教学用書

微積分学教程

第三卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

高等教育

高等学校教学用書

微積分学教程

第三卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路見可譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издатсльство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著“微积分学教程”（курс дифференциального и интегрального исчисления）第三卷 1949 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为大学数学系学生及研究生用教学参考書。

本書共三卷，第一卷由叶彦謙等譯，第二卷由北京大学数学系集体翻譯，第三卷由路見可、吳亲仁、余家荣等譯。

本書（第三卷）中譯本暫分三册出版。第一分册內容为曲綫积分，斯底尔吉斯积分及二重积分；第二分册內容为曲面积分，三重及多重积分；第三分册則全部是傅立叶級数。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路 見 可 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第 054 号）

外文印刷厂印刷 新华書店发行

統一書号 13010·309 开本 850×1168 1/32 印張 8

字数 255,000 印数 11,701—14,700 定价（6）¥0.80

1953 年 10 月商务初版（共印 19,500）

1957 年 4 月新 1 版 1960 年 12 月北京第 5 次印刷

俄中名詞對照表

А

Абель 亞培爾

аддитивная функция от области плоской 平面區域的可加函數

— — — —, определение её по производной 平面區域的可加函數由導數來確定它

— — — промежутка 區間的可加函數

Арцела 阿爾栽拉

астроида 星形線

Б

Бесселевы функции 貝塞爾函數

Био и Савара закон 皮奥及沙凡爾定律

буняковского неравенство 布涅科夫斯基不等式

бэта-функция B函數

В

векторное произведение 向量積

Вивиани тело 維維安尼立體

Вольтерра 伏爾推拉

вращение плоской фигуры 平面圖形的旋轉

вращения тело 旋轉體

Г

гамма-функция Г函數

гамоническая функция в области плоской 平面區域中的調和函數

Гаусс 高斯

главное значение несобственного интеграла 廣義積分的主値

Грина формула 格林公式

Гульдина теорема 古里金定理

Д

Дарбу верхние и нижние интегралы 達布上積分及下積分

— — — — — как пределы 達布上積分及下積分當作極限

— — стидтьеса суммы 達布-斯底爾吉斯和

— суммы для интеграла двойного 二重積分的達布和

двойной интеграл 二重積分

— — выражение через первообразную 二重積分，以原函數表示

— —, как аддитивная функция области 二重積分當作區域的可加函數

— —, классы интегрируемых функций 二重積分，可積分函數的類

— — несобственный 二重積分，廣義的

— —, приведение к повторному 二重積分，化爲逐次積分

— —, свойства 二重積分的性質

— —, условия существования 二重積分存在的條件

— — ряд, сопоставление с двойным интегралом 二重級數，與二重積分的比較

Дикартов лист 笛卡兒葉形線

диаметр точечного множества 點集合的直徑

Дирихле формулы 笫里希萊公式

дифференциал точный, интегрирование 確切微分的積分法

— —, признаки 確切微分的判定法

— —, связь с криволинейным интегралом

確切微分與曲線積分的關係

дифференцирование по области 對區域的微分法

длина дуги 弧長

Ж

Жордан 霞當

З

замена переменных в интегралах двойных 二重積分中的變數更換

— — — — несобственных 廣義積分中的變數更換

И

изгибающий момент 彎矩

инверсия 反演法

инерции главные оси 主慣性軸

— момент плоской фигуры 平面圖形的慣矩

— — — —, полярный 平面圖形的慣矩，極的

— — прямолинейного отрезка 直線段的慣矩

— — цилиндрического бруса 柱形長條的慣矩

интегральная сумма 積分和

интегральное уравнение 積分方程

интегрирование по частям для интегралов Стилтьеса 斯底爾吉斯積分的分部積分法

— — — — обыкновенных интегралов 通常積分的分部積分法

— точных дифференциалов 確切微分的積分法

интегрируемая функция 可積分函數

интегрируемости условие (для дифференциальных выражений) 可積分的條件(對微分式而言)

К

Каталана формула 喀塔朗公式

квази-стационарный процесс 擬平穩過程

координатные линии 坐標曲線

кратные интегралы 重積分

криволинейные координаты на плоскости 平面上的曲線坐標

— —, элемент площади 面積元素的曲線坐標

криволинейный интеграл второго типа 第二型曲線積分

— — — —, вычисление через первообразную 第二型曲線積分，以原函數表示

— — — —, дифференцирование 第二型曲線積分的微分法

— — — —, независимость от пути 第二型曲線積分與道路無關性

— — — —, поведение в случае неодносвязной области 第二型曲線積分，在非單連區域情形時的性質

— — — — по замкнутому контуру 第二型曲線積分，沿閉路的

— — — —, приближение интегралом по ломаной 第二型曲線積分，用沿折線的積分來逼近

— — — —, сведение к интегралу Стилтьеса 第二型曲線積分化爲斯底爾吉斯積分

— — — —, сведение к обыкновенному интегралу 第二型曲線積分化爲通常積分

— — — —, связь с криволинейным интегралом первого типа 第二型曲線積分與第一型曲線積分的聯系

— — первого типа 第一型曲線積分

— — — —, сведение к обыкновенному

интегралу 第一型曲線積分化爲通常積分

Л

Лебег 萊彼格
левая координатная система 左手坐標系
— ориентация плоскости 平面的左手定向
Лежандр 勒戎德
Лежандра, полиномы 勒戎德多項式
Лейбниц 萊布尼茲
лемниската 雙扭線
Липшиц 李浦西茨
Лиувилль 立烏維里
Лиувилля формулы 立烏維里公式

М

масса кривой 曲線的質量
— плоской фигуры 平面圖形的質量

Н

направление на замкнутом контуре 在閉路上的方向
напряжение поля 場的引力
несобственный двойной интеграл 廣義二重積分
— — —, абсолютная сходимость 廣義二重積分的絕對收斂性
— — —, замена переменных 廣義二重積分的變數更換
— — —, приведение к повторному 廣義二重積分化爲逐次積分
— — —, признаки сходимости 廣義二重積分收斂判定法
Ньютона закон притяжения 牛頓引力定律

О

объём цилиндрического бруса 柱形長條的體積
ограниченного изменения функции 有界變差函數
— — —, классы 有界變差函數類
— — —, критерий 有界變差函數檢驗法
— — —, непрерывные 有界變差函數,連續的
— — —, свойства 有界變差函數的性質
односвязность плоской области 平面區域的單連性
ориентация плоскости 平面的定向
ориентированная область, интеграл по ней 定向區域,在它上面的積分

П

первообразная функция 原函數
перерезывающее усилие 剪力
плотность линейная 線性密度
— поверхностная 曲面密度
площадь плоской фигуры в криволинейных координатах 在曲線坐標下平面圖形的面積
— — —, выражение криволинейным интегралом 用曲線積分表示平面圖形的面積
поле магнитное 磁場
— Ньютоновского притяжения 牛頓引力場
— силовое 力場
— скорости 速度場
полное изменение функции 函數的全變差
полярные координаты на плоскости 平面上的極坐標
— — обобщённые 推廣的極坐標
— —, элемент площади 極坐標,面積
потенциал Ньютоновский, созданный материальной точкой 牛頓位勢,由質點形成者
потенциальная функция 位勢函數
потенциальное поле 位勢場

правая координатная система 右手坐標系
— ориентация плоскости 平面的右手定向
преобразование плоских областей 平面區域變換
— — —, сохраняющее площадь 平面區域變換,保持面積不變者
приложения к механике и физике: интеграла двойного 二重積分在力學及物理學上的應用
— криволинейного второго типа 第二型曲線積分的應用
— — первого типа 第一型曲線積分的應用
— Стилтьеса 斯底爾吉斯積分的應用
притяжение материальной точки кривой 曲線對質點的吸引力
произведение инерции 慣性積
производная по области 對區域的導數
Пуассон 普安松

P

работа силового поля 力場的功

C

силовая функция 力函數
силовое поле 力場
спрямляемая кривая 可求長曲線
среднее значение теорема 中值定理
статические моменты кривой 曲線的靜矩
— — плоской фигуры 平面圖形的靜矩
— — прямолинейного отрезка 直線段的靜矩
— — цилиндрического бруса 柱形長條的靜矩
Стилтьеса-Дарбу суммы 斯底爾吉斯-達布和
— интеграл 斯底爾吉斯積分
— —, вычисление 斯底爾吉斯積分的計算
— —, геометрическая иллюстрация 斯底爾吉斯積分,幾何說明
— —, интегрирование по частям 斯底爾吉斯積分,分部積分法
— —, классы случаев существования 斯底爾吉斯積分,存在時的類
— —, непрерывность по верхнему пределу 斯底爾吉斯積分,對上限的連續性
— —, оценка 斯底爾吉斯積分,估計
— —, предельный переход 斯底爾吉斯積分,極限過程
— —, приведение к обыкновенному 斯底爾吉斯積分,化爲通常積分
— —, свойства 斯底爾吉斯積分的性質
— — теорема о среднем 斯底爾吉斯積分,中值定理
— —, условие существования 斯底爾吉斯積分,存在條件
—, сумма 斯底爾吉斯和

T

тепло, поглощённое газом 氣體所吸收的熱量

У

угол видимости кривой 曲線的可見角

Ц

центр тяжести кривой 曲線的重心
— — плоской фигуры 平面圖形的重心
— — цилиндрического бруса 柱形長條的重心
центробежный момент 離心矩
циклическая постоянная 循環常數
цилиндрический отрезок 截頭柱

Ч

Чебышев 契比雪夫

Э

элемент площади в криволинейных координатах 在曲線坐標下的面積元素

— — в полярных координатах 在極坐標下的面積元素

эллипс 橢圓

— инерции 慣性橢圓

эллипсоид 橢球面

эллиптические интегралы 橢圓積分

— координаты 橢圓坐標

энтропия 熵

Я

Якоби 雅可比

Якобиан как коэффициент растяжения 雅可比式當作延伸係數

第一分册目录

第十五章　曲綫积分·斯底尔吉斯积分

第十六章　二重积分

第十五章　曲線積分·斯底爾吉斯積分

§1　第一型的曲線積分

517　第一型曲線積分的定義　爲了很自然地得出這一新的概念，我們來考察一個能導出它的力學問題。

設已給一連續的可求長平面* 曲線 (K)（圖 1），在它上面分佈有質量，且在曲線上所有的點 M 處其線性密度 $\rho(M)$ 爲已知，要求確定整個曲線 (K) 的質量 m。

圖 1

爲達此目的，在曲線端點 A 與 B 間任意地插入一列點 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$（爲使記號對稱，命 A_0 與 A 相合，A_n 與 B 相合）。爲了明確起見，我們認爲這些點是自 A 到 B 記數的［參看 317 **］，縱然將它們以相反的方向記數也沒有什麼不可以。

在曲線的弧 $A_i A_{i+1}$ 上任取一點 M_i，算出這一點處的密度 $\rho(M_i)$。近似地認爲在這一小段弧上所有點處的密度都是這樣的，並以 σ_i 表弧 $A_i A_{i+1}$ 的長，對這一弧的質量 m_i 我們將有近似表示式

* 今後爲簡單計，我們祇討論平面曲線，整個所述的東西不必改變就可移到空間曲線的情形。

** 參看關於本書第一卷及第二卷時，均以原書第三版（1951）的中譯本爲準—譯者。

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而對整個所求的質量，將有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

這一式子的誤差與上面所作的近似假定是有關的；如所有小段的長 σ_i 趨近於零時，這誤差也將趨近於零。因此，如以 λ 表長 σ_i 中最大的一個，祇要變到極限就得到準確的公式：

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

現在開始一般地來研究這一類型的極限。丟開上面的問題不談，取一任意"點函數" $f(M)=f(x, y)$，它給出在一連續的可求長平面曲線(K)上*，並重複上述手續：分曲線(K)爲許多弧元 $A_i A_{i+1}$，在它們上面任取點 $M_i(\xi_i, \eta_i)$，計算出在這些點處的值 $f(M_i)=f(\xi_i, \eta_i)$，並作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它亦代表一定類型的"積分和"。

當 $\lambda=\max \sigma_i$ 趨近於零時，如這一積分和有一確定的有限極限 I，既與曲線(K)細分的方法無關，又與小段 $A_i A_{i+1}$ 上點 M_i 的選擇無關，則這一極限稱作函數 $f(M)=f(x, y)$ 沿曲線或道路(K)上所取的(第一型**)曲線積分，並以符號

$$I = \int_{(K)} f(M)\, ds = \int_{(K)} f(x, y)\, ds \tag{1}$$

來表示(其中 s 是曲線的弧長，ds 就象徵長度元 σ_i)。極限過程的精確說明留給讀者。

因此，上面所得曲線質量的式子可重寫爲：

* 這裏假定某一直角坐標系取作基礎。

** 以示與下面[521]所討論的第二型曲線積分不同。

$$m=\int_{(K)}\rho(M)ds. \tag{2}$$

特別注意，給道路 (K) 所加的方向在所引導的定義中不起任何作用。例如若這一曲線不是閉的，且以 (AB) 及 (BA) 作爲不同方向的曲線，則

$$\int_{(AB)}f(M)\,ds=\int_{(BA)}f(M)\,ds.$$

類似地，我們可以引導散佈在空間曲線 (K) 上的積分概念：

$$\int_{(K)}f(M)\,ds=\int_{(K)}f(x,y,z)ds.^{*}$$

由於沒有什麽新的原則性東西，沒有必要在這裏詳談。

518 約化爲普通定積分　假定在曲線 (K) 上任意取一方向（二可能方向之一），故曲線上點 M 的位置可由自一起點 A 量起的弧長 $s=\overset{\frown}{AM}$ 來確定。那末曲線 (K) 可表爲參數方程的形狀：

$$x=x(s),\quad y=y(s)\qquad (0\leqslant s\leqslant S),$$

而在曲線上給出的函數 $f(x,y)$ 便化成變量 s 的複合函數 $f(x(s),y(s))$。

對應於在 AB 弧上所選取的分點 A_i，其弧的值如表爲 s_i $(i=0,1,\cdots,n)$，則顯然 $\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$。以 $\bar{s}_i$ 表決定點 M_i 的 s 值（顯然，而且 $s_i\leqslant\bar{s}_i\leqslant s_{i+1}$），可以看到曲線積分的積分和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(x(\bar{s}_i),y(\bar{s}_i))\,\Delta s_i$$

同時也是普通定積分的積分和，所以立刻有：

$$\int_{(K)}f(M)ds=(R)\int_0^S f(x(s),y(s))\,ds^{**}, \tag{3}$$

且這兩積分中祇要有一個存在，另一個就也存在。

當然，這種直接由第一型曲線積分約化爲普通的積分會降低了它

---

* 某一直角坐標系將取作基礎。函數 f 僅在曲線 (K) 的點處有定義。

** 符號 (R) 表示，積分這裏是瞭解爲通常的黎曼定義下的積分。

的理論價値，但在方法上的價値它仍全部保持着。

我們以後將假定函數 $f(M)$ 是連續的*，顯然在這種情形下積分是存在的。

今設一曲線 (K) 由任意的參數方程

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

所給出，其中函數 φ 及 ψ 與它們的導數 φ' 及 ψ' 都連續；此外，假定曲線上無重點。那麽曲線就是可求長的，且若弧 $s=\overset{\frown}{AM}=s(t)$ 的增加對應於參數 t 的增加，則

$$s'_t=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[320, 321]。在 (3) 的右端的積分中換變數，立刻得到：

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (4)$$

因此，在計算第一型曲線積分時，在積分號下的函數中，變量 x 及 y 應該用坐標的參數表示式來代替，而因子 ds 應該用弧當作參數的函數時的微分來代替。特別指出，定積分 (4) 的下限必須小於上限。

在曲線以顯著的方程給出時，

$$y=y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

公式 (4) 的形狀是：

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \qquad (5)$$

這一關係式也可有另一形式。在函數 $y(x)$ 與它的導數 $y'(x)$ 連續的假定下，曲線 (K) 在每一點處都有一不平行於 y 軸的確定切線。以 α 表切線與 x 軸的夾角，我們得到：

---

* 我們是指在曲線 (K) 上的點處連續，也就是指沿着曲線連續。用 "ε–δ" 的說法，這就是說：對 $\varepsilon>0$ 能找到這樣的 $\delta>0$，使當 $\overline{MM'}<\delta$ 時就有 $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$（M 及 M' 是曲線上的點）。在這一假定下，複合函數 $f(x(s), y(s))$，由於 $x(s)$ 及 $y(s)$ 是連續的緣故，也同樣是 s 的連續函數。

$$\operatorname{tg}\alpha=y'(x),\quad |\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

故
$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int_a^b \frac{f(x,y(x))}{|\cos\alpha|}\,dx. \tag{6}$$

如用 S 表示整個曲線 (AB) 的長，因爲顯然

$$\int\limits_{(K)} ds=S,$$

所以特別地有

$$S=\int_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附註　公式 (7) 是經形式的變換得來的。如果我們定義曲線弧長爲外切 (不是內接) 折線周長的極限，則這一定義——在曲線以顯著的形式給出時——立即可得出公式(7)。讀者不妨自己來證實這一點。

519 例 1) 若 (K) 是橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限內的四分之一，計算積分 $I=\int\limits_{(K)} xy\,ds$。

解 (a) 我們有

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

所以由公式(5)，

$$I=\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot x\,dx,$$

進行積分，得：

$$I=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}\left[a^4-(a^2-b^2)x^2\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

應該注意，上面做的計算事實上還要有所說明才行，因爲當 $x=a$ 時切線斜率變爲無窮

大。下一解法就沒有這一缺點。

(6)　如變到橢圓的參數表示 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，故

$$x'_t=-a\sin t,\ y'_t=b\cos t,\ \sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

則可按公式(4)來進行計算：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

這裏令 $\cos 2t=z$，則 $\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}dz$，且

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2)　計算積分 $I=\int\limits_{(K)} y\,ds$，其中 (K) 是拋物線 $y^2=2px$ 上自坐標原點到點 (x_0, y_0) 的一段。

解　由曲線的方程，我們有 $yy'=p$，所以

$$y\,ds=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}\,dx=\sqrt{p^2+2px}\,dx,$$

且

$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}\,dx=\frac{1}{3p}\left[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right].$$

3)　計算積分 $L=\int\limits_{(A)}(x^2+y^2)\,ds$，其中 (A) 是聯結點 (a,a) 及 (b,b) 的直線段 $(b>a)$。

提示　直線方程 $y=x$。答 $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$。

4)　計算積分 $K=\int\limits_{(C)} ye^{-x}\,ds$，其中 (C) 是曲線

$$x=\log(1+t^2),\ y=2\operatorname{arctg} t-t+3$$

在點 $t=0$ 及 $t=1$ 間的一段。

提示 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=1$,

$$K=\int_0^1 \frac{2\operatorname{arc\,tg} t-t+3}{1+t^2}dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\log 2+\frac{3\pi}{4}.$$

5) 常見的曲線中一大部分(橢圓,雙曲線,正弦曲線,雙紐線等)其弧長不能表作初等函數,因爲它們的 ds 不能積分爲有限型。然而,對這種曲線,積分 $\int\limits_{(K)} f(x,y)\,ds$ 往往算出來是初等函數[例如,參看例 1)],因爲與因子 $f(x,y)$ 聯在一起時,積分號下微分式的整個構造改變了。讀者不妨做一些積分 $\int\limits_{(K)} f(x,y)\,ds$ 的例題,積分取在正弦曲線 $y=\sin x$ 或雙曲線 $xy=1$ 上但又可表作初等函數者。

6) 計算積分 $I=\int\limits_{(C)} xyz\,ds$, 其中 (C) 是曲線 $x=t$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $z=\frac{1}{2}t^2$ 在點 $t=0$ 及 $t=1$ 間的弧。

解 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=(1+t)dt$,

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7) 當曲線 (K) 用極坐標方程 $r=r(\theta)$ $(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 給出時,試求計算積分

$$I=\int\limits_{(K)} f(x,y)\,ds$$

的一公式。

答 $I=\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$

8) 若(K)是雙曲螺線 $r\theta=1$ 自 $\theta=\sqrt{3}$ 到 $\theta=2\sqrt{2}$ 的一段,試計算積分

$$H=\int\limits_{(K)} \frac{ds}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

答 $\frac{19}{3}$.

9) 試求曲線 $y=\log x$ 在有橫坐標 x_1 及 x_2 的兩點間這一段的質量,設曲線在每點處的(線性)密度等於該點橫坐標的平方。

解 由公式(2),因爲在我們的情形下 $\rho=x^2$, 故有:

$$m=\int_{x_1}^{x_2} x^2\,ds.\ \text{但}\ ds=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,\ \text{所以}$$

$$m=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{3}\left[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$