近世代数习题解答

南大南师代数讨论班

一九八〇年五月

前　言

"题解"除了包括范德瓦尔登《代数学》(Ⅰ)的全部习题外，还在贾柯勃逊《抽象代数学》及74年新版《基础代数》中选了一些有关习题。

题解工作是在周伯壎先生、沈超先生及佟文廷同志关心与支持下，分别由朱作桐、李伯萁、陈岩、刘迎胜、姚天行、胡述安等完成的。由于时间仓促，定有不足之处，诚恳地希望同志们批评指正。

在排印出版过程中，得到江苏省丹徒县教育局教研室沙成瑶同志、镇江市教育局教研室于平一同志和丹徒县印刷厂的同志的大力协助，特此表示感谢。

南大南师代数讨论班

一九八〇年五月

目　录

（I）代 数 学

第一章 数与集合

§2 映 射·势

1．证明记号～的以下三个性质：

（1）A～A；

（2）由A～B推出B～A；

（3）由A～B与B～C推出A～C。

证：（1）对$a\in A$，令I：$a\to a$，则I是A到A上的1-1映射，故A～A。

（2）设在φ下，A～B。∵φ是1-1映射，∴φ的逆映射φ^{-1}是存在的，且映射φ^{-1}也是1—1的，则在φ^{-1}下有：B～A。

（3）若在φ下，A～B，在ψ下，B～C，则$\psi\varphi$是A到C的一个映射。

∵ φ、ψ都是1-1映射，∴ $\psi\varphi$也是1-1的，故在$\psi\varphi$下，A～C。

§3 自然数序列

1．性质E对于$n=3$成立，并且如果它对于$n\geqslant 3$成立，那么对于$n+1$也成立。

证明：E对于所有的$n\geqslant 3$的整数都成立。

证：若对$n\geqslant 3$的整数不都具有性质E，那么对性质E不成立的整数所成的集合M就是非空的，于是在M中必有一个最小正整数l，$1<3<l$．由l的选择知$l-1\geqslant 3$具有性质E。

故由归纳假设 l 也具有性质E，这与 l 不具有性质E矛盾，因此 l 是不存在的，即对所有 $n\geqslant 3$ 的整数都有性质E。

2．作出书上P.12结论的证明。

证：首先证明加法、乘法与左端符号选择无关：

由定义有 $(a,b)=(a',b')$ 的充要条件是 $a+b'=a'+b$。

（1）若 $(a,b)=(a',b')$，$(c,d)=(c',d')$，

则 $$a+b'=a'+b.$$

于是 $$a+b'+c+d=a'+b+c+d,$$

因而有 $$(a,b)+(c,d)=(a',b')+(c,d).$$

同理，由 $(c,d)=(c',d')$ 可证。

$$(a',b')+(c,d)=(a',b')+(c',d'),$$

所以 $$(a,b)+(c,d)=(a',b')+(c',d').$$

（2）若 $(a,b)=(a',b')$，则 $a+b'=a'+b$，

于是 $$(a+b')c+(a'+b)d=(a'+b)c+(a+b')d,$$

从而有 $$(ac+bd,bc+ad)=(a'c+b'd,b'c+a'd),$$

即 $$(a,b)(c,d)=(a',b')(c,d),$$

同理，由 $(c,d)=(c',d')$，

可得 $$(a',b')(c,d)=(a',b')(c',d'),$$

所以 $$(a,b)(c,d)=(a',b')(c',d').$$

其次，证明它们适合以下的运算规律：

（1）$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a+c,b+d)+(e,f)$$
$$=(a+c+e,\ b+d+f)$$
$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$
$$=(a,b)+(c+e,\ d+f)=(a+c+e,\ b+d+f),$$

所以加法结合律成立。

（2）$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)$$
$$=(c,d)+(a,b),$$

所以加法交换律成立。

（3） 若$(a, b)+(a_1, b_1)=(a, b)+(a_2, b_2)$，

则 $$a+a_1+b+b_2=a+a_2+b+b_1,$$

于是 $a_1+b_2=a_2+b_1$，所以$(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$。

故消去律成立。

（4） $$[(a, b)(a_1, b_1)](a_2, b_2)$$
$$=(aa_1+bb_1, ab_1+ba_1)(a_2, b_2)$$
$$=(aa_1a_2+bb_1a_2+ab_1b_2+ba_1b_2,\ aa_1b_2+bb_1b_2+ab_1a_2+ba_1a_2)$$
$$(a, b)[(a_1, b_1)(a_2, b_2)]$$
$$=(a, b)(a_1a_2+b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)$$
$$=(aa_1a_2+ab_1b_2+ba_1b_2+bb_1a_2,\ aa_1b_2+ab_1a_2+ba_1a_2+bb_1b_2),$$

所以乘法结合律成立。

（5） $$(a, b)(a_1, b_1)=(aa_1+bb_1,\ ab_1+ba_1)$$
$$(a_1, b_1)(a, b)=(a_1a+b_1b,\ a_1b+b_1a)$$

所以乘法交换律成立。

（6） $$(a, b)[(a_1, b_1)+(a_2, b_2)]$$
$$=(a, b)(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$$
$$=(aa_1+aa_2+bb_1+bb_2, ab_1+ab_2+ba_1+ba_2),$$
$$(a, b)(a_1, b_1)+(a, b)(a_2, b_2)$$
$$=(aa_1+bb_1, ab_1+ba_1)+(aa_2+bb_2, ab_2+ba_2)$$
$$=(aa_1+bb_1+aa_2+bb_2,\ ab_1+ba_1+ab_2+ba_2).$$

所以乘法对加法的分配律成立。

（7） 若(a, b)，(c, d)是任意两个整数，

则 $a+d>b+c$，$a+d=b+c$，$a+d<b+c$在自然数集中有且只有一个成立。

当 $a+d>b+c$时，规定$(a,b)>(c,d)$；

当 $a+d=b+c$时，则 $(a,b)=(c,d)$；

当 $a+d<b+c$时，规定$(a,b)<(c,d)$.

则 $(a,b)>(c,d)$，$(a,b)=(c,d)$，$(a,b)<(c,d)$有且只有一个成立.

(8) 若$(a,b)<(c,d)$，$(c,d)<(e,f)$，

则 $a+d<b+c$，$c+f<d+e$，

所以 $a+d+f<b+c+f$，$c+f+b<d+e+b$，

因此 $a+d+f<d+e+b$，故$a+f<e+b$，

即 $(a,b)<(e,f)$.

(9) 若 $(a,b)<(a_1,b_1)$，

证明 $(a,b)+(a_2,b_2)<(a_1,b_1)+(a_2,b_2)$.

因为 $(a,b)<(a_1,b_1)$ 所以，$a+b_1<a_1+b$，

则 $a+b_1+a_2+b_2<a_1+b+a_2+b_2$，

即 $(a+a_2)+(b_1+b_2)<(a_1+a_2)+(b+b_2)$，

所以 $(a+a_2, b+b_2)<(a_1+a_2, b_1+b_2)$，

即 $(a,b)+(a_2,b_2)<(a_1,b_1)+(a_2,b_2)$.

(10) 若$(a,b)<(a_1,b_1)$，$(a_2,b_2)>0$，

则$(a,b)(a_2,b_2)<(a_1,b_1)(a_2,b_2)$.

证：由于$a+b_1<a_1+b$，$(a_2,b_2)=a_2-b_2>0$，

所以 $(a+b_1)(a_2-b_2)<(a_1+b_1)(a_2-b_2)$，

即 $aa_2+b_1a_2-ab_2-b_1b_2<a_1a_2+ba_2-a_1b_2-bb_2$，

因此 $aa_2+b_1a_2+a_1b_2+bb_2<a_1a_2+ba_2+ab_2+b_1b_2$，

所以 $(aa_2+bb_2, ab_2+ba_2)<(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)$，

故 $(a,b)(a_2,b_2)<a_1,b_1)(a_2,b_2)$.

再证明方程$a+x=b$有且唯一解：

设 $(a,b)+(x,y)=(c,d)$则 $a+x+d=b+y+c$，

取 $x=b+c,\ y=a+d,$

则 $(a,b)+(b+c,a+d)=(a+b+c,a+b+d)=(c,d),$

得 $(x,y)=(b+c,\ a+d)$是原方程的解.

再证明唯一性:

若(x_1,y_1)也是解，则$(a,\ b)+(x_1,\ y_1)=(c,\ d),$

因此 $(a,\ b)+(x_1,\ y_1)=(a,\ b)+(x,\ y),$

所以 $(x_1,\ y_1)=(x,\ y)$ （消去律）

最后，证明$ab=0$当且仅当$a=0$或$b=0$.

若 $(a,b)(c,\ d)=0$即$(a,\ b)(c,\ d)=(f,\ f),$

若 $(a,b)>0$（对于$(a,b)<0$可同样证明），设$a=b+g,$

于是 $[(b+g),\ b](c,\ d)=(f,\ f),$

所以 $bc+gc+bd+f=f+bd+gd+bc,$

因而 $gc=gd,\ b=d,$ 故 $(c,\ d)=0$.

3.把习题1中的3换成0，作同样的证明.

证：令$m=n+1$，则由假设性质E对于$m=1$成立，且如果对于$m\geqslant 1$时成立，必有对于$m+1$也成立，因此由第一数学归纳法知性质E对一切自然数都成立，也就是对于$n\geqslant 0$的一切整数成立.

§4 有限与可数集合

1．对n作完全归纳法，证明有限集合$A=\{a_1\cdots,\ a_n\}$的子集合也是有限的。

证：当$n=1$时，$A=\{a\}$，A只有空集合与A本身是它的子集合，则当$n=1$，结论是对的.

假设命题对数n是对的，现证它对于数$n+1$也对．设f是集合A到截段$|1,n+1|$上的1-1映射，如果子集$B=A$，则B是有限集合.若$B\subset A$，于是余集$A/B\neq\phi$，则存在$a\in A/B$,

可设$f(a)=n+1$,否则有$a'\in A$,而$a'\neq a$,使$f(a')=n+1$,若 $f(a)=i$, 令 $f_1(a)=n+1$, $f_1(a')=i$, $f_1(j)=f(j)$ $(j\neq a,a')$, 令$A'=A/\{a\}$, 于是 f是A'到截段$|1,n|$上的一个1-1映射,又有$B\subseteq A'$, 由归纳假设B是有限集合, 故命题得证.

2. 证明 两个不相交的有限集合的并的元素个数等于这两个元素个数的和.

证: 设$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$,$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$,且$A\cap B=\phi$,对B的元数用归纳法.若$m=1$时, ∵ $b_1\neq a_j$, 则$A\cup B=\{a_1, \cdots,a_n, b_1\}$.令$\varphi$: $a_i\longrightarrow i$ $(i=1,2,\cdots, n)$, $b_1\longrightarrow n+1$,显然φ是$A\cup B$到截段$|1, n+1|$上的一个1-1映射,则$A\cup B$的元数$=n^+=n+1$. 设命题对$m-1$成立,现证对数m也成立:

令 $B_1=\{b_1, \cdots, b_{m-1}\}$, 则由归纳假设$C=A\cup B_1$的元数$=n+(m-1)$. 由于$A\cap B=\phi$,$A\cup B=C\cup\{b_m\}$,则$A\cup B$元数$=[n+(m-1)]^+=n+(m-1)^+=n+m$.

3.证明: γ个两两不相交的元素个数为s的集合的并的元素个数为γs。

证: 设集合$A_1,A_2,\cdots, A_{r-1}$元素个数都为s.当$r=1$时,A_1元素个数$=s=1\cdot s$. 设$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{r-1}$元素个数为$(r-1)s$, 则$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{r-1})\cup A_r$的元素个数$=s\cdot(r-1)+s=rs$.

4. 证明自然数序列的每一个子集合都是可数的,由此推知, 一个集合可数的充分必要条件是它的元素可以用自然数编号, 不同的元素有不同的编号.

证: 设A是自然数序列B的一个子集, 则A的每一个元素i_j在B的按自然顺序排列下有且只有一个编号,由于A中必

有最小数，设为i_1， 令$i_1 \longrightarrow 1$，若i_{j_1}在i_{j_2}的前面，就把i_{j_1}排在i_{j_2}的前面，这样依次可把A中的元素与自然数序列的一个截段或与自然数序列建立 1-1映射关系，所以A 是一个可数集合．

由可数集合的定义，则一个集合可数的充要条件是它与自然数序列的子集合 1-1 对应，而自然数序列每一子集的元素都可以用自然数编号，且不同的元素有不同的编号，故命题得证。

5．证明整数的集合是可数无穷的．同样，偶数集合是可数无穷的。

证：若 $0 < i < j$，则让i排在j的前面，而在i后排$-i$，即

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \cdots,\ i,\ -i,\ i^+,\ -i^+,\ \cdots$$

则每一个整数都有且仅有一个编号，故由上题知，整数集合是可数集合．同样，偶数集合也是可数无穷的．

6． 证明所有实数（也就是所有无穷小数）的集合是不可数的．

证：映射φ： $x \longrightarrow tg(\pi x - \dfrac{\pi}{2})$ 给出开区间(0,1)到$(-\infty,\ +\infty)$上的一个1-1映射，即(0，1)上的全体实数与实数集合是等势的，因而只要证明(0,1)是不可数集合即可．

反证，设集合(0，1)是可数的，则可设

$$(0,\ 1)=\{C_1,\ C_2,\ C_3,\cdots,\ C_n,\ \cdots\}$$

其中设
$$\begin{aligned} C_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ C_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

现在我们用下面的方法作一个数

$$C=0.b_1b_2b_3\cdots\cdots$$

取数码b_1不同于a_{11}，0，9；b_2不同于a_{22}，0，9；b_3不同于a_{33}，0，9；…；b_n不同于a_{nn}，0，9，…，显然 $C\in(0,1)$。由于$b_1\neq a_{11}$，故C不同于C_1；$b_2\neq a_{22}$，故C不同于C_2；如此等等，故有

$$C\neq C_1,\ C\neq C_2,\ \cdots,\ C\neq C_n,\ \cdots$$

即C不包括在(1)内，因此(1)的排法不包含(0.1)中的所有数，故命题得证。

7.证明：一个可数无穷集合的势不因添进去有限多个或者可数无穷多个元素而改变。

证：若A是一个可数无穷集合，则A的元素可以用自然数编号.设

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots a_n,\ \cdots\}$$

同样，由于有限多个或者可数无穷多个元素也可以用自然数编号，设为

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m,\ \cdots$$

令 $B=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m,\ \cdots\}$ 则B的元素仍然可用自然数编号，比如令$c_1=a_1$，$c_2=b_1$，$c_{2j+1}=a_{j+1}$，$c_{2j+2}=b_{j+1}$，…则$B=\{c_1,c_2,\cdots c_{2j+1},c_{2j+2},\cdots\}$即B亦是可数无穷集合，故集合A与B等势。

8.证明，所有不可约分数$\frac{\pm a}{b}$（a、b是互素的自然数）的集合是可数无穷的。

证：规定 $0=\frac{0}{1}$，则$\frac{\pm a}{b}$的写法是唯一确定的。自然数$|a|+b$叫做不可约分数$\frac{\pm a}{b}$的高，其中$|a|$是a的绝对值。

于是所有有理数可以按高的渐增的顺序排成一列，而相同高的数按数本身的渐增顺序排列，得到序列：

$$0,\ -1,+1,-2,-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ 2,-3,-\frac{1}{3},\ +\frac{1}{3},$$

$$+3,-4,-\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{4},\ +\frac{1}{4},\ +\frac{2}{3},\ +\frac{3}{2},\ +4,\cdots$$

这样所有不可约分数$\frac{\pm a}{b}$所成的集合的元素可以按自然数编号，所以它是一个可数无穷集合。

§6 有 序 集 合

1. 证明在每一个有序的非空有限集合中都有一初始元素。

证：设有序非空有限集合A没有初始元素，对任意元素$a_1\in A$，都存在$a_2\in A$，使$a_2<a_1$；由设知a_2也不是初始元素，所以又存在$a_3\in A$，使得$a_3<a_2$；一般地有，若$a_n\in A$，则存在$a_{n+1}\in A$，使得$a_{n+1}<a_n$。由数学归纳法知，集合A中满足上述条件的元素，对一切自然数都成立。令$N=\{\cdots a_{n+1},a_n,\cdots,a_2,a_1\}$是被作出的所有元素组成的集合，由有序集的定义知，若$i<k$，有$a_k>a_i$，且$a_k\neq a_i$，因此N与自然数集合等势，即N是无穷集合，与题设矛盾。故A中有一初始元素。

2. 对自然数偶(a,b)所成的集合中按以下的方法定义一个顺序关系：$(a,b)<(a',b')$当$a<a'$或者$a=a'$，有$b<b'$。证明，这样定义了一个良序。

证：令$M=\{(a,b)|a,b\text{是自然数}\}$，显然M对所述的关系是一个有序集合。设N是M的任意一个非空子集，由于M

中元素的顺序关系完全由自然数集合的序所决定，故在子集N的元素中，若自然数偶中的第一个元素不全相等，则必有最小整数，设以此最小正数作为第一个分量的数偶组成N的子集为N'．在N'中，第二个分量不尽相等，则必有最小正数，那么相应的这个数偶，就是N的初始元素；若N中元素的第一个分量全相等，第二个分量不全相等，它们必有最小正数，而相应的数偶，就是N的初始元素，故M是良序的。

3.证明，在每个良序集合中，每个元素a（除去这个集合的最后元素，如果有的话）都有一个"直接后继"$b>a$，这就是说，没有元素x在a与b之间（即$b>x>a$），是否每个元素（除去初始元素）也都有一个直接先行？

证：设a不是良序集合M的最后元素，则存在$b\in M$，使得$b>a$，若对$a\in M$，没有直接后继，则有$x_1\in M$，使得$a<x_1<b$，若x_1为a的直接后继，则结论已证，否则必又存在$x_2\in M$，使$a<x_2<x_1$，如此可得$a<\cdots<x_2<x_1<b$．考虑$N=\left\{x\,\middle|\,\begin{matrix}a<x<b\\ x\in M\end{matrix}\right\}$显然N没有初始元素，这与M是良序集合相矛盾，所以M中每个元素a（除去这个集合的最后元素，如果有的话）都有一个直接后继。

在良序集合中每个元素不一定都有一个直接先行，例集合

$$\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$$

是一个良序集合，但是2就没有一个直接先行，而自然数集合按自然数的顺序为一良序集，它的每一个元素都有一个直接先行。

第二章　群

§9　群的概念

1. 空间的欧基里德运动带上反射（使每两点之间距离不变的一切变换）组成一个非Abel群。

证：（1）两个旋转，一个反射、一个旋转或两个反射等变换的结果仍然是一种保持两点距离的变换，即运算是封闭的。

（2）变换的乘法满足结合律，故对此种变换，结合律也成立。

（3）恒等变换是单位元素。

（4）每一个变换的逆变换就是与原变换相反的变换。

由于仅就空间的旋转变换，不满足交换律，故空间的欧基里德运动带上反射的全体，对变换的乘法组成一个非Abel群。

2. 证明元素e、a对下列运算法则

$$ee=e,\quad ea=a,\quad ae=a,\quad aa=e$$

组成一个群。

证：（1）由定义知运算是封闭的；

（2）$a(ae)=aa=e=ee=(aa)e$；

$(aa)a=ea=a=ae=a(aa)$；

$(ae)a=aa=a(ea)$；$a(ee)=ae=(ae)e$；

$(ee)e=ee=e(ee)$。

同理知 $(ee)a=e(ea)$，$(ea)e=e(ae)$，$(ea)a=e(aa)$

如此知运算满足结合律。

（3）$ae=ea=e$，$ee=e$，因此e是单位元。

（4）$aa=e$，故a是a的逆元素。

由上可见，集合{a，e}对所定义的运算组成一个群。

3.试列出三个数码的全部置换所组成的群的群表

解：设(1)=1，(12)=2，(13)=3，(23)=4，(123)=5，(132)=6。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	6	5	4	3
3	3	5	1	6	2	4
4	4	6	5	1	3	2
5	5	3	4	2	6	1
6	6	4	2	3	1	5

4．证明对Abel群来说，有：

$$\prod_{\nu=1}^{n}\prod_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} = \prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}$$

证：预备性质：$\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\cdot\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_{t\nu} = \prod\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}a_{t\nu}$

当n=1时，$\prod\limits_{1}^{1} a_{\mu1}\prod\limits_{1}^{1} a_{t1} = a_{\mu1}a_{t1} = \prod\limits_{1}^{1} a_{\mu1}a_{t1}$

设性质对≤n-1的自然数成立，现证对数n性质也成立。

事实上，$\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_{t\nu}$

$$= \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} a_{\mu\nu}\cdot a_{\mu n}\right)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} a_{t\nu}a_{tn}\right)$$

$$= \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} a_{\mu\nu}\prod_{\nu=1}^{n-1} a_{t\nu}\right)\left(a_{\mu n}\, a_{tn}\right)$$