蘇聯文化代表團講演集

論波動方程解的間斷綫及二維間斷面

伊·格·彼得羅夫斯基著

時代出版社

蘇聯文化代表團講演集

論波動方程解的間斷綫及二維間斷面

伊·格·彼得羅夫斯基著
中蘇友好協會總會編

時代出版社
一九五五年·北京

內容提要

本書包括彼得羅夫斯基院士的兩篇文章。「論波動方程解的間斷綫及二維間斷面」是他在參加蘇聯文化代表團訪問我國期間所作的數學專題報告，這篇報告在數學研究上有價值，對近代物理學的研究也有實際意義。「談大學生的工作」是他給「中國青年」雜誌寫的文章，文中簡要地敘述了大學生的學習目的和任務以及莫斯科大學學生的學習活動。

時 代 出 版 社 出 版

北京市書刊出版營業許可證出字45號

（北京東四錢糧胡同十四號）

新 華 書 店 發 行

國家建設委員會印刷廠印裝

1955年9月北京初版　1955年9月第1次印刷

開本：787×1092 1/32　印張：16/32　字數：7千字

1—1,000册　定價(6)0.09元

前　言

在我國人民歡慶中華人民共和國建國五周年的日子裏，蘇聯對外文化協會應中蘇友好協會總會的邀請，派來了以傑尼索夫教授爲團長的蘇聯文化代表團，來我國參加國慶節觀禮，並進行訪問和講學。代表團的成員包括蘇聯著名的經濟學家、科學家、法學家、歷史學家、教育學家、文學家、藝術家。他們於一九五四年九月三十日抵達北京，十月一日在天安門參加了中華人民共和國建國五周年國慶典禮，之後，又訪問了北京、瀋陽、鞍山、撫順、南京、上海、杭州、廣州、武漢等城市，於十月二十九日離開我國返囘蘇聯。代表團的同志們在這爲期一月的訪問當中，曾在我國上述城市作了五十多次學術性的報告；參加了四十多次各種專題的座談會；參觀了我國科學研究和文化教育機關；和我國文化界進行了廣泛的接觸。通過這些學術報告、座談等活動，代表團向我國文化界介紹了蘇聯在文化建設方面所獲得的成就和經驗，並對我國文化、教育、藝術界的工作提供了不少的寶貴意見，這對於增進中蘇兩國人民的偉大友誼、推動我國各方面進一步學習蘇聯、加强中蘇文化交流及學術研究工作是有很大作用的。代表團並在我國各地參觀了工廠、農村以及歷史名勝，和我國廣大的工人、農民羣衆和學生等進行了友誼交談。

蘇聯文化代表團在我國一個月的工作是很緊張的。他們以不知疲倦的勞動貢獻於中蘇兩國人民的友好事業。代表團團員、七十多歲的老畫家格拉西莫夫曾說：「我們沒有權利浪費一小時的時間。」代表團的同志們囘到自己祖國以後，並沒有結束自己

的工作，他們又展開了向蘇聯人民介紹新中國的活動。他們中間有很多人已作了幾十次的訪問中國的報告，有的人已將報告日程排滿了半年之久，有的人還在寫訪問中國的專集。

現在我們將蘇聯文化代表團在我國各地所作的報告和所寫的文章彙編成册，以供廣大讀者閱讀學習。在本書出版的時候，讓我們藉此機會向蘇聯文化界的同志們和蘇聯對外文化協會表示衷心的感謝和敬意。

中蘇友好協會總會

一九五五年六月

目　錄

著者簡歷…… 2
論波動方程解的間斷綫及二維間斷面…… 3
談大學生的工作……10

著者簡歷

伊·格·彼得羅夫斯基生於一九〇一年。

從一九三三年起，他担任莫斯科大學教授。一九四〇到一九四四年，任該校數學力學系主任。一九五一年五月，被任命爲莫斯科大學校長。他於一九四八年當選爲蘇聯科學院院士；曾任蘇聯科學院斯切克洛夫數學研究所副所長數年；一九四九年又當選蘇聯科學院物理數學科學部院士秘書，同時担任「數學彙刊」雜誌編輯與「蘇聯科學院斯切克洛夫數學研究所專刊」的負責編輯；現在是蘇聯科學院主席團委員。此外，他曾獲得數理學博士學位。由於他在科學研究工作特別是在數學研究工作方面的卓越成就，曾兩次榮獲斯大林獎金，三度榮獲勞動紅旗勳章。

在數學研究領域裏，他對偏微分方程論、代數幾何學、微分方程定性理論等數學理論的研究，都獲得了巨大的成就。他編著的「常微分方程論講義」已譯成中文。

論波動方程解的間斷綫及二維間斷面

編者按：彼得羅夫斯基院士訪問我國期間，曾在中國科學院作了與本文題目相同的數學專題報告。玆將他與朱多夫（Л.А. Чудов）合著的關於這個題目的原作介紹給讀者。原作發表在「數學進展」（*Успехи Мат. Наук*）第九卷，第三期（總六十一號），一九五四年出版。

甲、函數 $u(t,x,y,z)$ 叫做波動方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

在空間 (t,x,y,z) 某域 D 內的異解，如果 $u(t,x,y,z)$ 具有連續二級微商並在域 D 內除若干孤立的點、綫、二維及三維面外到處滿足方程（1），而在這些點、綫、面上函數 $u(t,x,y,z)$ 或其二級或以內的某些微商具有不可排除的間斷。假定間斷綫、二維或三維間斷面都是充分平滑的。

根據克希荷夫公式易知，不存在方程（1）的具有孤立間斷點的異解，它在該點的鄰域具有三級連續微商（譯者註一）。此處解的平滑度較前定義中提高一級，這對本命題的正確性來說是本質的；因爲存在具有一個二級微商在孤立點具有間斷的異解的實例[1]。

關於三維間斷面，則它們在空間 (t,x,y,z) 內可以有任意的方向並且間斷性可有極度任意的形式。事實上，在域 D 內取一個

[1] 見薩勃列夫(Соболев)：「數學物理中的泛函數分析的一些應用」(「Некоторые применения функционального анализа в математической физики」)，Изд.ЛГУ(1950)，第一六一頁。

變向面和任意兩個不相聯系的方程(1)的解 u_1 及 u_2。在 S 的鄰域的一邊界定 $u(t, x, y, z)=u_1$, 在其另一邊界定 $u(t, x, y, z)=u_2$。顯然 $u(t, x, y, z)$ 是一個滿足定義的異解。

因此,設無補充的限制,則三維間斷面的討論將沒有甚麼意義。另一方面,如所周知,在適當的假定之下,三維間斷面必爲特徵面,卽它對 ot 軸恆作 45° 角。已知若干對間斷性的不同的類型的條件使得三維間斷面必爲特徵面❶。

對間斷綫及二維間斷面的可能的方向以及間斷的奇異性的問題還少研究。本文將討論此問題的一個特殊情形,方法完全是初等的❷ 從這個最簡單的情形所得的結果顯然具有一般的意義。

乙、對我們要討論的問題作普遍的假定如下:我們限於方程(1)的作下列形式

$$u(t, x, y, z)=u(x-at, y-bt, z-ct) \tag{2}$$

(a, b, c 爲常數)的解。設把 $u(t, x, y, z)$ 視爲定在三維空間 (x, y, z) 內的隨時間 t 而變的函數,則函數 u 取某定值的每一點將隨 t 的增長以速度 (a, b, c) 而移動。命

$$\xi=x-at, \eta=y-bt, \zeta=z-ct。$$

於是函數 $u(\xi, \eta, \zeta)$ 的間斷點對應於函數 $u(t, x, y, z)$ 在空間 (t, x, y, z) 內的間斷綫,函數 $u(\xi, \eta, \zeta)$ 的間斷綫則對應於函數 $u(t, x, y, z)$ 在空間 (t, x, y, z) 內的二維間斷面。

顯然,空間 (t, x, y, z) 內孤立間斷綫或二維間斷面的可能的

---

❶ 見谷朗特和希伯特(Courant u. Hilbert):「數學物理方法」,第二卷,第六章。

❷ 對四個自變數的任意階數的方程的孤立特異集的普遍情形,見「Л.А. Чудов 的工作」。

方向的問題分別與空間 (x, y, z) 內孤立間斷點或間斷綫的移動的可能的速度的問題等價。

通過一個坐標變換恆可使等式（2）內 $b=c=0$，即 $\eta=y$，$\zeta=z$。(譯者註二)。此後卽將如此假定。

根據上述假定可知空間 (t, x, y, z) 內的間斷綫恆爲 (t, x) 平面內的直綫。不失普遍性可以假定此直綫通過坐標原點。於是此間斷綫在空間 (ξ, y, z) 內相應於孤立異點 $\xi=0, y=0, z=0$。

我們將假定函數 $u(\xi, y, z)$ 在點 $\xi=0$, $y=0$, $z=0$ 鄰近而除去該點具有二級連續微商，而在該點二級以內的某個微商具有不可排除的間斷。並假定函數 $u(\xi, y, z)$ 在異點 $\xi=0, y=0, z=0$ 的鄰近滿足不等式

$$|u(\xi, y, z)|<\frac{A}{\rho^p} \tag{3}$$

此處 $\rho=\sqrt{\xi^2+y^2+z^2}$，$A$ 與 p 均爲正値常數。

關於作（2）形式的異解的二維間斷面，我們僅將討論那些由空間 (x, y, z) 內的孤立的間斷直綫均勻移動而得的間斷平面，我們假定函數 $u(t, x, y, z)$ 在平行於間斷平面的任意方向上恆爲常數。於是不失普遍性恆可假定空間 (x, y, z) 內的間斷直綫當 $t=0$ 時與 O_y 軸重合。於是

$$u(t, x, y, z)\equiv u(x-at, y, z)\equiv u(\xi, y, z)=u(\xi, z)。$$

函數 $u(\xi, z)$ 以點 $\xi=0, z=0$ 爲孤立異點。對函數 $u(\xi, z)$ 在此異點鄰近的性質亦仿對函數 $u(\xi, y, z)$ 作同樣的假定。

丙、在相應的異點鄰近，函數 $u(\xi, y, z)$ 滿足方程

$$(1-a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{4}$$

函數 $u(\xi, z)$ 滿足方程

$$(1-a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。 \tag{5}$$

首先討論孤立間斷綫的情形，即研究方程(4)。設$|a|<1$。則(4)爲橢圓方程。根據我們的假定可以完全描述$u(\xi,y,z)$在異點鄰近的性質，亦即$u(t,x,y,z)$在間斷綫鄰近的性質。命

$$\xi=\xi_1\sqrt{1-a^2},$$

於是

$$u_1(\xi_1,y,z)=u(\xi,y,z)$$

滿足拉普拉斯方程，並由(3)可知

$$u_1(\xi_1,y,z)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{i+j+k=m}A_{ijk}^{(m)}\frac{\partial^m\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{\partial\xi_1^i\partial y^j\partial z^k}+w(\xi_1,y,z),\tag{6}$$

此處$A_{ijk}^{(m)}$如常數，$\rho_1=\sqrt{\xi_1^2+y^2+z^2}$，$w(\xi_1,y,z)$爲在點$\xi_1=y=z=0$點鄰域（包括此點）內的調和函數[1]（見前引薩勃列夫所著的書，第一六二頁）。不等式$|a|<1$表示孤立間斷綫位於空間(t,x,y,z)內方程(1)的特徵錐K

$$t^2=x^2+y^2+z^2$$

之內。

設$|a|=1$，則方程(4)變爲

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

函數$u(\xi,y,z)$在空間(ξ,y,z)可能除去在原點外在原點的鄰域內到處有二級連續微商。以母綫平行於$O\xi$軸的柱形域作爲此鄰域。因爲函數$u(\xi,y,z)$在柱域的邊面上爲連續，並當$|\xi|\neq0$而相當小時對(y,z)爲調和函數，故由哈納克定理知道它在$\xi=0$爲連續的。同樣可證$u(\xi,y,z)$二級以內的微商在點$\xi=y=z=0$

[1] 公式(6)有簡單的物理解釋：除可能差一個可加的到處調和函數外，$u_1(\xi_1,y,z)$爲位於點$\xi_1=y=z=0$的不同階數的複極組的場位。與此相當，除可能差一個二級連續可微函數外，$u(t,x,y,z)$爲一組作等速直綫運動的不同階數的複極的場位。

的連續性。這就是說函數$u(\xi,y,z)$不可能以原點爲孤立異點，即在特徵錐K上的直綫不能是所討論的類型的間斷綫。（譯者註三）

設$|a|>1$，則方程（4）爲雙曲型的。由克希荷夫公式可知當$|a|>1$時，方程（4）的在點$\xi=y=z=0$的鄰近（可能除去該點）的三級可微解在點$\xi=y=z=0$也有二級微商。因此特徵錐K外的直綫不能是所討論的類型的間斷綫，如果$u(t,x,y,z)$在此直綫的鄰近爲三級連續可微的。（譯者註四）

和孤立的間斷點的情形同，此處平滑度的提高是有本質的意義的。上面提到的薩勃列夫的具有孤立間斷點的異解的實例可以推至三維空間(ξ,y,z)而可得以特徵錐K外的直綫爲間斷綫的方程（1）的異解的實例。

在討論二維間斷面的情形。設$|a|<1$，即（5）爲橢圓方程，於是點$\xi=z=0$可爲方程（1）的特解的所討論的類型的異點。設

$$u_1(\xi_1,z)=u(t,x,y,z),$$
$$\xi_1=\frac{x-at}{\sqrt{1-a^2}},$$

則得

$$u_1(\xi_1,z)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{i+j=m}A_{ij}^{(m)}\frac{\partial^m}{\partial\xi_1^i\partial z^j}l_n\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+z^2}}+w(\xi_1,z),\tag{7}$$

此處$w(\xi_1,z)$即在點$\xi_1=z=0$亦爲調和函數。

設$|a|>1$。用達朗培公式在某在點鄰近表寫$u(\xi,z)$即可得知方程（5）不能有孤立異點，如果在該點的鄰域內函數$u(\xi,z)$是充分平滑的，例如爲二級連續可微的。因此方程（1）的解沒有對應的二維間斷平面。

設$|a|=1$，則方程（5）變爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{8}$$

它的具有一級連續微商的解都是 z 的綫性函數。由此易知方程（8）的解不能有孤立異點，如果在此點鄰域內爲二級連續可微的。因此方程（1）的解不能有切於特徵錐K的間斷平面。

丁、根據薩勃列夫，函數 $u(t,x,y,z)$ 稱爲方程（1）在域D內的廣義解❶，如果對任意二級連續可微的並在D的邊界上自己和各一級微商同等於0的函數 $v(t,x,y,z)$ 而言，下列積分存在並等於0：

$$\iiiint_D u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt。 \tag{9}$$

通常所討論的，使三維間斷面 S 必爲特徵面的，加於間斷性的條件(即一級微商及切於S的方向的二級微商的連續性，沿S的法綫方向的二階微商的第一類間斷性)導致下列結果，卽相應的間斷解爲廣義解。

上面得到的是有孤立的間斷綫及二維間斷面的異解具有極强的奇異性。在公式（6）（7）中命 $N=0, A^{(0)}=1$。得具有最低階奇異性的解

$$u_I(t,x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{(x-at)^2}{1-a^2}+y^2+z^2}},$$

$$u_{II}(t,x,y,z)=\ln\frac{1}{\sqrt{\frac{(x-at)^2}{1-a^2}+z^2}}。$$

不難複驗，對函數 u_I 或 u_{II}，對含有間斷直綫或間斷平面的域D，對任意滿足前述條件的函數 v 而言，積分（9）存在並可能

❶ 見前引的薩勃列夫所著的書第三章。

不等於0。對作(6),(7)型的具有更高階的奇異性的解而言,積分(9)可以不存在。因此,這樣我們得到的具有間斷直綫或二維間斷平面的異解不是方程(1)的廣義解。

譯者註一。關於波動方程的克希荷夫公式以及關於波動方程的一般知識可以參看彼得羅夫斯基著[Лекции об уравнениях с частными производными],第二版(一九五三年),第二章,第十一、十二節。

譯者註二。我們不妨假定 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a'\neq 0$。顯然可以作一個三維空間內的正交變換——旋轉——$T$ 使得它把單位向量 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ 變爲單位向量(1,0,0)。因此 T 把向量 (a, b, c) 變爲向量 $(\sqrt{a^2+b^2+c^2}, 0, 0)$,設 T 把向量 (x, y, z) 變爲向量 (x', y', z'),把向量 (ξ, η, ζ) 變爲向量 (ξ', η', ζ')。因爲 $(\xi, \eta, \zeta)=(x, y, z)-t(a, b, c)$ 所以 $(\xi', \eta', \zeta')=(x', y', z')-t(\sqrt{a^2+b^2+c^2}, 0, 0)$,即

$$\xi'=x'+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t,\ \eta'=y',\ \zeta'=z'。$$

譯者註三。彼得羅夫斯基院士在中國科學院所作的報告中指出,在此情形(即 $|a|=1$)之下,方程(4)雖然不能有孤立的異點,但可以有孤立的異綫段。例如取綫段 $0\leqslant\xi\leqslant\varepsilon, y=0, z=0$。同本節所述的理由可以證在此異綫段的兩端點($\xi=y=t=0$ 及 $\xi=\varepsilon, y=z=0$)函數 $u(0, y, z)$ 及 $u(\varepsilon, y, z)$ 爲調和的。這個異綫段沿其縱長方向以速度 a 運動得間斷綫,這種性質可以解釋爲極化現象。

譯者註四。彼得羅夫斯基院士在中國科學院所作的報告中總結以上對 $|a|\gtrless 1$ 各種情况下波動方程解的間斷直綫的可能性或不可能性後,指出這一事實的有意義的物理解釋。他認爲如果在電子的電磁場作用過程可以用波動方程(1)來描述的前提之下,則所得的關於解的間斷直綫的結果表示電子祇能以小於光速(在我們所取的坐標系內光速爲1)的速度 a ($|a|<1$)運動而不能以不小於光速的速度 a ($|a|\geqslant 1$)運動。這一事實在相對論的理論係列爲假設,而在此則爲上述前提的結論。

談大學生的工作*

在蘇聯和各人民民主國家，一切高等學校的目標，在於培養各項專門人材，以便担當某種國民經濟或文化部門的領導工作。我們的經濟跟文化事業，是永遠向前發展的，因之，一切經濟、文化工作的領導者，要是不甘心落後的話，就必須經常獨立地通曉他們專業中的新問題，不斷地獨立鑽研業務。為了達到這個目的，我們的高等學校，不僅要使學生在他們所學的專業方面得到牢固的基礎知識；並且應該教會他們獨立自主地學習。從來沒有這樣的學校，可以教會學生應有盡有的學問，使他在未來的一生事業中受用無窮；所以，大學生從踏進校門起，就必須兢兢業業去獨立地獵取各種知識，絕不應該停止在這樣的地步：僅祇消極被動地領會一些在課堂、在實驗室或在其他實習中所講授的功課。他首先要專心致志地探索所學課程中最主要之點，並要頑強不懈地精通它們；要學會獨自閱讀各種書籍，獨自解答各項問題。而更要緊的是，他應該對某些專門問題發生興趣，並且深入地鑽研這些問題。教師要協助他挑選最合適的有關參考書籍。一個人如果有高深的學識，他的視野也就很廣闊了。

在我們莫斯科大學裏，每個高年級的學生必須參加一定的講座。這種講座的任務，就是輔助學生學習有關專業知識，啓發學生對某門科學的興致，指導他們進一步從事初步的科學活動。此外，我們非常重視高年級學生的研究科學的小組。教授或講師充任小組的領導人，他們幫助學生深刻領會其專業中各種專門問題。在小組裏，研究一切現代的有關科學書籍，提出這方面的

各種新的問題。所有的小組成員，包括小組領導人在內，都要把他在這方面的各種科學工作向小組作專題報告。這些科學小組，後來常常發展爲更大的科學學會，其中不斷地培養出衆多的傑出科學家。莫斯科大學已經成立了龐大的數學學會、有機化學學會以及其他科學學會。這種性質的學會，目前在莫斯科大學的學生中間，正在推廣起來。我以爲，對於蘇聯和中國其他各大學的工作，這種方法同樣會是正確有效的。我毫不懷疑：多才多藝、愛好勞動的中國青年人中間，一定會湧現出大批優秀的傑出的科學家、工程師、農學家、作家、教育家和醫生。應該提供最優異的條件，使他們最迅速地成長。

有許多中國大學生在莫斯科大學裏學習。他們卓越的才幹、勤懇的勞動和求知的熱忱，博得我們全校師生的深深敬愛。我們從中國留學生的出色工作中，想像得出中國的青年們是非常優秀的。

在這裏，讓我代表莫斯科大學向偉大中國人民的青年們致以熱情的敬意；並祝福他們健康、幸福和取得巨大的成就。

（「中國青年」一九五四年第二十二期）

---

* 本文是彼得羅夫斯基院士在訪問我國期間給「中國青年」雜誌所寫的文章。

定價 0.09 元