"十一五"高等院校公共数学规划教材

Linear Algebra

线性代数

主编 董晓波

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

南京大学出版社

“十一五”高等院校公共数学规划教材

Linear Algebra

线性代数

主　编　董晓波
副主编　张滦云　郭　成　於　遒
　　　　邓海荣　蒋仁斌

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 董晓波主编. —南京:南京大学出版社,
2009.8

“十一五”高等院校公共数学规划教材

ISBN 978-7-305-06386-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. 董… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 145089 号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　编　210093
网　　址　https://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　“十一五”高等院校公共数学规划教材
书　　名　线性代数
主　　编　董晓波
责任编辑　孟庆生　　编辑热线　025-83593947
照　　排　南京紫藤制版印务中心
印　　刷　南京人民印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 13.5　字数 334 千
版　　次　2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-305-06386-2
定　　价　26.00 元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　Press@NjupCo.com
　　　　　Sales@NjupCo.com(市场部)

前　言

线性代数在自然科学、社会科学、工程技术等领域均有广泛的应用，线性代数课程是高等院校各相关专业的一门重要的公共基础课. 在不减少必须掌握的知识点，不降低基本要求的前提下，我们编写了这本低起点、分层次、重实用的适合大学本科学生学习的教材.

本书在编写时突出了以下几个特点：

(1) 由浅入深、通俗易懂. 本书是针对工科、经济、管理类等本科学生特点编写的. 内容上力求通俗易懂、由浅入深，除个别定理外，每个定理、性质均给出了详细的证明，不易理解和容易混淆的地方加上了注解，使学生学习起来感到比较轻松. 因此，本书特别适合较低起点的读者.

(2) 示例丰富、习题合理. 本书针对主要知识点均编写了相应的例题，题量丰富，并给出了浅显、简洁的解答，便于读者理解、掌握. 每小节后面还配有少量简单的习题，方便初学者加深对新概念的理解. 每章后面还编制了大量的综合练习题，题型灵活多样，难度适中，并具有一定的梯度. 书后还附有参考答案，便于学生对所做题目的理解、掌握和验证.

(3) 突出矩阵、布局合理. 本书在编写上突出矩阵思想和矩阵方法在线性代数中的重要作用及应用，体现了变换思想的主线，并依此安排各章节的次序. 既强调理论上的严谨、体系的完整，也注重思路的流畅、方法的易行.

(4) 工具先进、演练结合. 第 6 章专门安排了线性代数实验. 介绍了 MATLAB 7.0 的基本用法，并针对每章中不同的知识点，精心编制了 MATLAB 7.0 运算演示和上机练习.

(5) 层次丰富、适用面广. 本书不仅能满足本科学生学习线性代数的需要，而且也考虑到许多专业研究生入学考试对线性代数的要求，安排了一定的具有一定难度和深度的内容、例题和习题. 因此，对于有志于参加研究生入学考试的学生，本书也是一本合适的参考书.

具体教学建议：

完成本书第 1 章至第 4 章基本的教学要求，约需 32～40 学时；第 5 章向量空间与线性变换约需 6 学时，可供对线性代数有较高要求的读者选学；第 6 章线性代数实验约需 6 学时，既可在各章中穿插演练，又可集中选学.

在本书的编写过程中，有幸聆听了李大潜院士的教诲，得到了周明儒教授、马吉溥教授的指教；曹伟平教授详细审阅了本书，并提出了不少改进的意见；同时李存华教授、刘金禄教授、王维平教授等都提出了不少中肯的建议；本书在编写的过程中，还得到了淮海工学院分管院长舒小平教授、教务处领导、理学院领导及各位同仁，以及南京大学出版社的关心、帮助和支持，在此一并表示诚挚的感谢.

在本书编写的过程中，从许多同行专家、学者的著作中直接或间接地引用了他们的部分成果，在此也表示感谢和敬意.

本书由董晓波教授主持编写，参加编写工作的有黄迎秋、於道、张滦云、邓海荣等副教授，郭成、蒋仁斌、孙翠娟、姜乐、薄丽玲、杨小勇等讲师.

由于水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，敬请专家和读者不吝赐教，以期不断完善.

编　者

2009 年 6 月 14 日

目　　录

第1章 矩　　阵

矩阵是一个重要的数学工具，也是线性代数研究的主要对象之一．本章主要介绍矩阵的概念，几种常见的矩阵运算，初等矩阵和矩阵的初等变换，最后介绍矩阵的分块．

§1.1 矩阵的概念

本节主要介绍矩阵的定义，几种特殊的矩阵以及矩阵的相等等内容．

1.1.1 矩阵的定义

首先看几个例子．

例1 某地有三家工厂，生产四种产品，各厂每年生产各种产品的数量（单位：万件）如下表：

生产厂家＼产品种类	1	2	3	4
甲	5	2	3	4
乙	8	7	5	6
丙	10	20	30	20

上面的表格可简列成3行4列的数表，记为$\boldsymbol{M}$，即

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}.$$

若这四种产品的单价及单件利润（单位：元）如下：

产品种类＼属性	单　价	单件利润
1	6	2
2	5	2
3	4	1
4	3	1

则上述表格可列成4行2列的数表$\boldsymbol{P}$，即

$$P=\begin{pmatrix}6&2\\5&2\\4&1\\3&1\end{pmatrix}.$$

例 2 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=1,\\3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2,\\2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3,\end{cases}$$

这个方程组未知数的系数,按其在方程组中的位置次序可列成一个数表 $\boldsymbol{A}$,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\\2&1&2&-2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组的**系数矩阵**. 数表 $\boldsymbol{A}$ 补加一列(常数列),又成一个数表$\overline{\boldsymbol{A}}$,即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\3&-1&5&-3&2\\2&1&2&-2&3\end{pmatrix},$$

$\overline{\boldsymbol{A}}$称为这个线性方程组的**增广矩阵**.

上面一些数表十分常见. 数表可以简洁地反映实际问题的有用信息,与所研究的问题密切相关,因此对实际问题的研究,常常转化为对这些数表的处理及某些性质的研究. 这样的数表,称为矩阵. 下面给出矩阵的数学定义.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{matrix}$$

称为 **m 行 n 列矩阵**,简称 **$m\times n$ 矩阵**.

为了表示它是一个整体,在外面加上括弧,并用大写英文字母表示,记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

构成矩阵的数称为矩阵的**元素**,位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) **元**,a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,第二个下标 j 称为**列标**. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记作 (a_{ij}),$(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书主要讨论实矩阵,今后如没有特殊说明,均指实矩阵.

如例 1 中的 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}$ 是 3×4 矩阵,它表示各工厂各种产品的年产量;$\boldsymbol{P}=$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$是 4×2 矩阵，它表示各种产品的单价和单位利润.

矩阵不仅仅表现为将一些数据排成有规律的数表，它的应用非常广泛. 随着学习的深入，矩阵作为解决实际问题和理论研究的有力工具，大家将会对其有更深刻的理解.

1.1.2 几种特殊的矩阵

(1) 行矩阵和列矩阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一行，即形如

$$\boldsymbol{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

的矩阵称为**行矩阵**，又称为**行向量**. 为清楚地表示出各元素，行矩阵也可记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有一列，即形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**列矩阵**，又称为**列向量**.

(2) n 阶方阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相等，都等于 n，即形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶矩阵**，又称为 n **阶方阵**，可记作 $\boldsymbol{A}_n$. n 阶矩阵从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元**；另一条对角线称为**副对角线**，副对角线上的元素称为**副对角元**.

(3) 对角矩阵

若 n 阶矩阵中除主对角元外，其余元素均为 0，即形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶对角矩阵**，又称为 n **阶对角阵**，常记为 $\boldsymbol{\Lambda}$($\boldsymbol{\Lambda}$ 为 λ 大写). 简记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

若 n 阶对角阵中的元素 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，则称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 n **阶数量矩阵**.

(4) 单位阵

若 n 阶对角阵中的元素 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，即形如

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶单位阵**，记为 E_n. 在不混淆的情况下，常省略下标 n，记作 E，如 $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是 3 阶单位阵.

注：阶数不同的单位阵不同.

(5) 三角矩阵

若 n 阶方阵中元素满足 $a_{ij}=0(i>j$，且 $i,j=1,2,\cdots,n)$，即形如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶上三角矩阵**.

若 n 阶方阵中元素满足 $a_{ij}=0(i<j$，且 $i,j=1,2,\cdots,n)$，即形如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶下三角矩阵**.

(6) 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 O. 如

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

均为零矩阵.

注：行数不同或列数不同的两个零矩阵是不同的.

1.1.3 矩阵的相等

下面给出矩阵的同型及矩阵相等的概念.

定义 2 若两个矩阵的行数相同，列数也相同，则称它们为**同型矩阵**. 若 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$是同型矩阵，且它们对应位置的元素都相等，则称矩阵 A 与矩阵 B **相等**，记作 $A=B$，即同型矩阵 A,B 中若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则 $A=B$.

例 3 已知 $A=\begin{pmatrix}a+b&3\\7&c-d\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&2c+d\\a-b&3\end{pmatrix}$，$A=B$，求 a,b,c,d.

解 由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases} a+b=3, \\ 2c+d=3, \\ a-b=7, \\ c-d=3. \end{cases}$$

可解得 $a=5, b=-2, c=2, d=-1$.

习 题 1

1. 某企业生产5种产品，每种产品各季度的产值(万元)如下表：

季度＼产品	1	2	3	4	5
1	2	1	8	6	20
2	3	1	9	8	20
3	4	2	9	7	15
4	3	2	8	6	25

试将上面表格中的数据写成矩阵形式.

2. 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-4x_4=0, \\ -x_1+3x_2-x_3-x_4=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+3x_2-x_3=0. \end{cases}$

3. 指出下列矩阵哪些是方阵，哪些是对角阵，哪些是三角矩阵？

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ x & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & y \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x, y.

§1.2 矩阵的运算

本节主要介绍矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵的乘法、矩阵的逆以及矩阵的转置等内容.

1.2.1 矩阵的加法

定义3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}), \boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 均为 $m\times n$ 矩阵，将其对应位置元素相加得到的 $m\times n$ 矩阵，称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

注：只有同型矩阵之间才能进行加法运算.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，不难验证，矩阵的加法运算满足：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，将 $\boldsymbol{A}$ 的各元素变号得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$.

由此，定义矩阵的减法为：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，亦即两个矩阵对应的元素相减.

注：矩阵的减法，事实上也是一种加法运算.

矩阵加法和减法有下面恒等式：

(1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

其中 $\boldsymbol{O}$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵.

1.2.2 数与矩阵相乘

定义 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各元素相乘所得到的矩阵，称为**数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积**，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$. 数与矩阵相乘简称为数乘，即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

规定 $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda$.

由定义可以直接得到：$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，λ,μ 为数，不难验证，数乘运算满足：

(1) 结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法与数乘运算合起来，统称为矩阵的**线性运算**.

例 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2\\ 5 & 1 & 9\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$. (1) 计算 $3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2) 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=(3-2)\boldsymbol{A}+(1+1)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}\\ &=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\times2 & 5\times2 & -2\times2\\ 5\times2 & 1\times2 & 9\times2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3+14 & -1+10 & 2-4\\ 1+10 & 5+2 & 7+18\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}17 & 9 & -2\\ 11 & 7 & 25\end{pmatrix};\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，可推得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$，即 $2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$，从而有

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6 & -4\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

1.2.3 矩阵的乘法

以下首先给出矩阵乘法的定义，并讨论乘法满足的运算律，然后在此基础上，给出方阵的幂运算，最后介绍方阵多项式.

(1) 矩阵乘法的定义

定义 6 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 的行数相等，则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注：两个矩阵相乘的前提是左矩阵的列数等于右矩阵的行数.

例 5 已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}6&2\\5&2\\4&1\\3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{MP},\boldsymbol{PM},\boldsymbol{ME}_3,\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{M},\boldsymbol{PE}_3,\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{P},\boldsymbol{ME}_4,\boldsymbol{E}_4\boldsymbol{M}$.

解 由于 $\boldsymbol{M}$ 是 3×4 矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 4×2 矩阵，故 $\boldsymbol{MP}$ 满足定义，同理 $\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{M},\boldsymbol{ME}_4$ 也满足定义. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{MP}&=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&2\\5&2\\4&1\\3&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5\times6+2\times5+3\times4+4\times3&5\times2+2\times2+3\times1+4\times1\\8\times6+7\times5+5\times4+6\times3&8\times2+7\times2+5\times1+6\times1\\10\times6+20\times5+30\times4+20\times3&10\times2+20\times2+30\times1+20\times1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}64&21\\121&41\\340&110\end{pmatrix};\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times5+0\times8+0\times10&1\times2+0\times7+0\times20&1\times3+0\times5+0\times30&1\times4+0\times6+0\times20\\0\times5+1\times8+0\times10&0\times2+1\times7+0\times20&0\times3+1\times5+0\times30&0\times4+1\times6+0\times20\\0\times5+0\times8+1\times10&0\times2+0\times7+1\times20&0\times3+0\times5+1\times30&0\times4+0\times6+1\times20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}=\boldsymbol{M};$$

$$\boldsymbol{ME}_4=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&3&4\\8&7&5&6\\10&20&30&20\end{pmatrix}=\boldsymbol{M};$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是 4×2 矩阵，$\boldsymbol{M}$ 是 3×4 矩阵，$2\neq3$，故 $\boldsymbol{PM}$ 不满足定义，不能相乘；同理 $\boldsymbol{ME}_3$，$\boldsymbol{PE}_3$，$\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{E}_4\boldsymbol{M}$ 都不能相乘.

对任意一个实数 x，有 $1\times x=x\times1=x$，一般称 1 是单位元. 这一概念可以推广到矩阵上. 如例 5 中有 $\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{ME}_4=\boldsymbol{M}$，其中 $\boldsymbol{E}_3$ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的**左单位元**，$\boldsymbol{E}_4$ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的**右单位元**.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，由于 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的左单位元为 m 阶单位阵 $\boldsymbol{E}_m$. 由于 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的右单位元为 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}_n$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}_n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的左单位元和右单位元相等，为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$.

例 6 线性方程组的矩阵表示：

设含有 n 个未知数，m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1-1}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组(1-1)的**系数矩阵**，$\boldsymbol{x}$ 称为方程组(1-1)的未知数向量，$\boldsymbol{b}$ 称为方程组(1-1)的常数项向量，$\overline{\boldsymbol{A}}$称为方程组(1-1)的**增广矩阵**.

根据矩阵的乘法，有

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times1}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}_{m\times1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times1},$$

由矩阵相等的定义，线性方程组(1-1)也可表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{1-2}$$

将(1-2)式称为矩阵方程，则 $\boldsymbol{x}$ 也称为矩阵方程(1-2)的**解向量**.

例 4 中的(2)就是求解矩阵方程的问题. 又如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为元素已知的矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为元素未知的矩阵)，这些都是矩阵方程.

(2) 矩阵乘法的运算律

一般地称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{B}$ 被 $\boldsymbol{A}$ 左乘)，称 $\boldsymbol{BA}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{B}$ 被 $\boldsymbol{A}$ 右乘).

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+1\times(-1) & 1\times(-1)+1\times1 \\ -1\times1+(-1)\times(-1) & -1\times1+(-1)\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+(-1)\times(-1) & 1\times1+(-1)\times(-1) \\ -1\times1+1\times(-1) & -1\times1+1\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$；