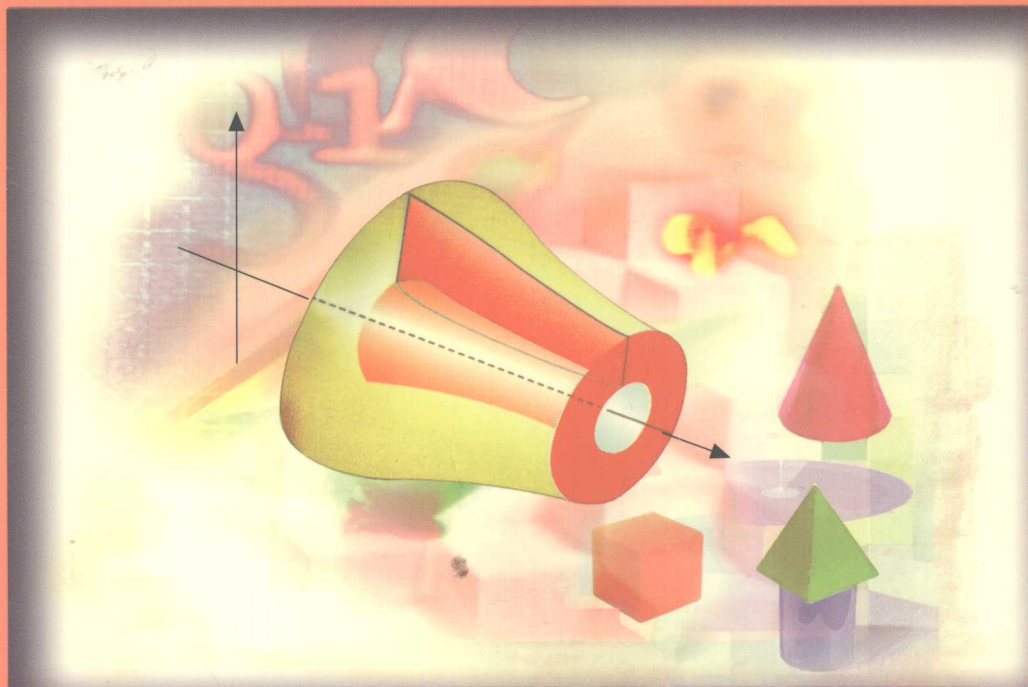


教育部推荐教材 ● 21世纪高职高专系列规划教材



高等数学

主 编 张爱真 刘大彬

副主编 李东营 王国云 刘振东

21SHIJI GAOZHI GAOZHUAN XILIE GUIHUA JIAOCAI

Gaodeng
Shuxue



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

教育部推荐教材

21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

主 编 张爱真 刘大彬

副主编 李东营 王国云 刘振东

参 编 何凤英 郝刚军 郑凤梅

魏 霞 程秀平 徐光联

赵纪青 李思广

责任编辑：李思广、魏霞、程秀平、徐光联、赵纪青、李思广
封面设计：李思广、魏霞、程秀平、徐光联、赵纪青、李思广

北京师范大学出版集团

北京师范大学出版集团

北京师范大学出版集团

北京师范大学出版集团

北京师范大学出版集团

北京师范大学出版集团



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学/张爱真, 刘大彬主编. —北京: 北京师范大学出版社, 2009.6

(21 世纪高职高专系列规划教材)

ISBN 978-7-303-10014-9

I. 高… II. ①张… ②刘… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 081127 号

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印 刷: 北京京师印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 170 mm × 230 mm

印 张: 21

字 数: 350 千字

版 次: 2009 年 8 月第 1 版

印 次: 2009 年 8 月第 2 次印刷

定 价: 33.00 元

策划编辑: 周光明 责任编辑: 周光明

美术编辑: 李葆芬 装帧设计: 张 虹

责任校对: 李 菡 责任印制: 马鸿麟

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

出版说明

随着我国经济建设的发展,社会对技术型应用人才的需求日趋紧迫,这也促进了我国职业教育的迅猛发展,我国职业教育已经进入了平稳、持续、有序的发展阶段。为了适应社会对技术型应用人才的需求和职业教育的发展,教育部对职业教育进行了卓有成效的改革,职业教育与成人教育司、高等教育司分别颁布了调整后的中等职业教育、高等职业教育专业设置目录,为职业院校专业设置提供了依据。教育部连同其他五部委共同确定数控技术应用、计算机应用与软件技术、汽车运用与维修、护理为紧缺人才培养专业,选择了上千家高职、中职学校和企业作为示范培养单位,拨出专款进行扶持,力争培养一批具有较高实践能力的紧缺人才。

职业教育的快速发展,也为职业教材的出版发行迎来了新的春天和新的挑战。教材出版发行为职业教育的发展服务,必须体现新的理念、新的要求,进行必要的改革。为此,在教育部高等教育司、职业教育与成人教育司、北京师范大学等的大力支持下,北京师范大学出版社在全国范围内筹建了“全国职业教育教材改革与出版领导小组”,集全国各地上百位专家、教授于一体,对中等高等职业院校的文化基础课、专业基础课、专业课教材的改革与出版工作进行深入的研究与指导。2004年8月,“全国职业教育教材改革与出版领导小组”召开了“全国有特色高职教材改革研讨会”,来自全国20多个省、市、区的近百位高职院校的院校长、系主任、教研室主任和一线骨干教师参加了此次会议。围绕如何编写出版好适应新形势发展的高等职业教育教材,与会代表进行了热烈的研讨,为新一轮教材的出版献计献策。这次会议共组织高职教材50余种,包括文化基础课、电工电子、数控、计算机教材。2005年~2006年期间,“全国职业教育教材改革与出版领导小组”先后在昆明、

哈尔滨、天津召开高职高专教材研讨会，对当前高职高专教材的改革与发展、高职院校教学、师资培养等进行了深入的探讨，同时推出了一批公共素质教育、商贸、财会、旅游类高职教材。这些教材的特点如下。

1. 紧紧围绕教育改革，适应新的教学要求。过渡时期具有新的教学要求，这批教材是在教育部的指导下，针对过渡时期教学的特点，以3年制为基础，兼顾2年制，以“实用、够用”为度，淡化理论，注重实践，消减过时、用不上的知识，内容体系更趋合理。

2. 教材配套齐全。将逐步完善各类专业课、专业基础课、文化基础课教材，所出版的教材都配有电子教案，部分教材配有电子课件和实验、习题指导。

3. 教材编写力求语言通俗简练，讲解深入浅出，使学生在理解的基础上学习，不囫圇吞枣，死记硬背。

4. 教材配有大量的例题、习题、实训，通过例题讲解、习题练习、实验实训，加强学生对理论的理解以及动手能力的培养。

5. 反映行业新的发展，教材编写注重吸收新知识、新技术、新工艺。

北京师范大学出版社是教育部职业教育教材出版基地之一，有着近20年的职业教材出版历史，具有丰富的编辑出版经验。这批高职教材的编写得到了教育部相关部门的大力支持，部分教材通过教育部审核，被列入职业教育与成人教育司高职推荐教材，并有25种教材列为“十一五”国家级规划教材。我们还将开发电子信息类的通信、机电、电气、计算机、工商管理等专业教材，希望广大师生积极选用。

教材建设是一项任重道远的工作，需要教师、专家、学校、出版社、教育行政部门的共同努力才能逐步获得发展。我们衷心希望更多的学校、更多的专家加入到我们的教材改革出版工作中来，北京师范大学出版社职业教育与教师教育分社全体人员也将备加努力，为职业教育的改革与发展服务。

全国职业教育教材改革与出版领导小组
北京师范大学出版社

参加教材编写的单位名单

(排名不分先后)

沈阳工程学院	温州大学
山东劳动职业技术学院	四川工商职业技术学院
济宁职业技术学院	常州轻工职业技术学院
辽宁省交通高等专科学校	河北工业职业技术学院
浙江机电职业技术学院	陕西纺织服装职业技术学院
杭州职业技术学院	唐山学院
西安科技大学电子信息学院	江西现代职业技术学院
西安科技大学通信学院	江西生物科技职业学院
西安科技大学机械学院	黄冈高级技工学校
天津渤海职业技术学院	深圳高级技工学校
天津渤海集团公司教育中心	徐州技师学院
连云港职业技术学院	天津理工大学中环信息学院
景德镇高等专科学校	天津机械职工技术学院
徐州工业职业技术学院	西安工程大学
广州科技贸易职业学院	青岛船舶学院
江西信息应用职业技术学院	河北中信联信息技术有限公司
浙江商业职业技术学院	张家港职教中心
内蒙古电子信息职业技术学院	太原理工大学轻纺学院
济源职业技术学院	浙江交通职业技术学院
河南科技学院	保定职业技术学院
苏州经贸职业技术学院	绵阳职业技术学院
苏州技师学院	北岳职业技术学院
苏州工业园区职业技术学院	天津职业大学
苏州江南赛特数控设备有限公司	石家庄信息工程职业学院
苏州机械技工学院	襄樊职业技术学院
浙江工商职业技术学院	九江职业技术学院

青岛远洋船员学院
无锡科技职业学院
广东白云职业技术学院
三峡大学职业技术学院
西安欧亚学院实验中心
天津机电职业技术学院
中华女子学院山东分院
漯河职业技术学院
济南市高级技工学校
沈阳职业技术学院
江西新余高等专科学校
赣南师范学院
江西交通职业技术学院
河北农业大学城建学院
华北电力大学
北京工业职业技术学院
湖北职业技术学院
河北化工医药职业技术学院
天津电子信息职业技术学院
广东松山职业技术学院
北京师范大学
山西大学工程学院
平顶山工学院
黄石理工学院
广东岭南职业技术学院
青岛港湾职业技术学院
郑州铁路职业技术学院
北京电子科技职业学院
北京农业职业技术学院
宁波职业技术学院
宁波工程学院
北京化工大学成教学院

天津交通职业技术学院
济南电子机械工程学院
山东职业技术学院
济南职业技术学院
山东省经济管理干部学院
鲁东大学
山东财政学院
山东省农业管理干部学院
浙江工贸职业技术学院
天津中德职业技术学院
天津现代职业技术学院
天津青年职业技术学院
无锡南洋学院
北京城市学院
北京经济技术职业学院
北京联合大学
北京信息职业技术学院
北京财贸职业学院
华北科技学院
青岛科技大学技术专修学院
山东大王职业学院
大红鹰职业技术学院
广东华立学院
广西工贸职业技术学院
贵州商业高等专科学校
桂林旅游职业技术学院
河北司法警官职业学院
黑龙江省教科院
湖北财经高等专科学校
华东师范大学职成教所
淮南职业技术学院
淮阴工学院

黄河水利职业技术学院
南京工业职业技术学院
南京铁道职业技术学院
黔南民族职业技术学院
青岛职业技术学院
陕西财经职业技术学院
陕西职业技术学院
深圳信息职业技术学院
深圳职业技术学院
石家庄职业技术学院
四川建筑职业技术学院
四川职业技术学院
太原旅游职业技术学院
泰山职业技术学院
温州职业技术学院
无锡商业职业技术学院
武汉商业服务学院
杨凌职业技术学院
浙江工贸职业技术学院
郑州旅游职业技术学院
淄博职业技术学院
云南机电职业技术学院
山东省贸易职工大学
聊城职业技术学院
山东司法警官职业学院
河南质量工程职业学院
山东科技大学职业技术学院
云南林业职业技术学院
云南国防工业职业技术学院
云南文化艺术职业学院
云南农业职业技术学院
云南能源职业技术学院

云南交通职业技术学院
云南司法警官职业学院
云南热带作物职业技术学院
西双版纳职业技术学院
玉溪农业职业技术学院
云南科技信息职业学院
昆明艺术职业学院
云南经济管理职业学院
云南爱因森软件职业学院
云南农业大学
云南师范大学
昆明大学
陕西安康师范学院
云南水利水电学校
昆明工业职业技术学院
云南财税学院
云南大学高职学院
山西综合职业技术学院
温州科技职业技术学院
昆明广播电视大学
天津职教中心
天津工程职业技术学院
天狮职业技术学院
天津师范大学
天津管理干部学院
天津滨海职业技术学院
天津铁道职业技术学院
天津音乐学院
天津石油职业技术学院
渤海石油职业技术学院
天津冶金职业技术学院
天津城市职业学院

常州机电职业技术学院
天津公安警官职业技术学院
武警昆明指挥学院
天津工业大学
天津开发区职业技术学院
黑龙江大兴安岭职业学院
黑龙江农业经济职业技术学院
黑龙江农业工程职业技术学院
黑龙江农业职业技术学院
黑龙江生物科技职业技术学院
黑龙江旅游职业技术学院
中国民航飞行学院
四川信息职业技术学院
四川航天职业技术学院
四川成都纺织高等专科学校
四川科技职业学院
四川乐山职业技术学院
四川泸州职业技术学院
四川成都农业科技职业技术学院

四川宜宾职业技术学院
江西省委党校
齐齐哈尔职业学院
深圳安泰信电子有限公司
潍坊教育学院
德州科技职业技术学院
天一学院
成都烹饪高等专科学校
四川教育学院汽车应用技术学院
河南质量工程职业技术学院
河南商业高等专科学校
天津大学
北京政法干部管理学院
北京理工大学珠海学院
中山火炬职业技术学院
周口职业技术学院
永城职业技术学院
河北工程技术高等专科学校

前言

高等数学课程是高职高专工科类、计算机类和经管类专业必修的重要基础课，它对提高学生的科学文化素质起着非常重要的作用，并为今后学生的学习、深造和发展奠定良好基础。

本教材是根据教育部《高职高专教育高等数学教学教育基本要求》，并结合多年来高等数学课程的教学实践和“专升本”考试大纲的要求编写的，可供高职高专的学生使用。在教材的编写过程中，我们一直努力体现联系高职高专教学的实际，积极贯彻“以应用为目的，以必需，够用为度”的原则，坚持理论联系实际，降低理论深度，并考虑知识的系统性，使教材由易到难，深入浅出。书中还配置了适量的习题与复习题，便于学生自学，有利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

教材共分为十二章，除第12章为线性代数基础外，其余十一章均为“专升本”考试大纲要求的学习内容。各专业可根据专业自身的特点，对全书的内容作适当删减或补充。

本书由张爱真、刘大彬任主编，李东营、王国云、刘振东任副主编，耿纪三教授任主审。各章编写人员如下：何凤英（第1章）、王国云（第2章）、张爱真（第3章）、刘振东（第4章）、郝刚军（第5章）、郑凤梅（第6章第一～三节）、魏霞（第6章第四～六节）、程秀平（第7章）、刘大彬（第8章）、徐光联（第9章）、李东营（第10章）、赵纪青（第11章）、李思广（第12章）。全书由张爱真、刘大彬负责统稿。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中必定存在一些不妥之处，恳请读者及同仁指正。

编 者
2009年3月

目录

Contents

第1章 函数	(1)	第5章 不定积分	(79)
第一节 集合	(1)	第一节 不定积分的概念 与性质	(79)
第二节 函数的概念与性质	(4)	第二节 换元积分法	(83)
第三节 常见函数	(8)	第三节 分部积分法	(89)
第2章 极限与连续	(15)	第四节 简单有理函数的 积分	(92)
第一节 函数的极限	(15)	第6章 定积分及其应用	(97)
第二节 极限的运算法则	(19)	第一节 定积分的概念与 性质	(97)
第三节 两个重要极限	(25)	第二节 微积分基本公式	(102)
第四节 函数的连续性	(28)	第三节 定积分的积分方法	(106)
第3章 导数与微分	(34)	第四节 广义积分	(111)
第一节 导数的概念	(34)	第五节 定积分在几何上 的应用	(115)
第二节 函数的求导法则	(40)	第六节 定积分在物理上 的应用	(123)
第三节 隐函数及由参数 方程所确定的函数 的导数	(45)	第7章 常微分方程	(131)
第四节 函数的微分	(51)	第一节 微分方程的基本 概念及分离变量法	(131)
第4章 导数的应用	(60)	第二节 一阶线性微分方程	(135)
第一节 微分中值定理	(60)	第三节 可降阶的高阶微 分方程	(139)
第二节 洛必达法则	(63)		
第三节 函数的单调性、 极值与最值	(67)		
第四节 函数图形的描绘	(73)		

第四节	二阶常系数齐次 线性微分方程	(141)	第二节	二重积分的计算	(204)
第五节	二阶常系数非齐 次线性微分方程	(144)	第三节	二重积分的应用	(211)
第 8 章	向量与空间解析几何	(150)	第四节	对弧长的曲线积分	(215)
第一节	空间直角坐标系 与向量的概念	(150)	第五节	对坐标的曲线积分	(220)
第二节	向量的点积与叉积	(155)	第六节	格林(Green)公式 及其应用	(224)
第三节	平面及其方程	(159)	第 11 章	无穷级数	(229)
第四节	空间直线及其方程	(163)	第一节	数项级数的概念 和性质	(229)
第五节	二次曲面与空间曲线	(167)	第二节	正项级数及其 敛散性	(233)
第 9 章	多元函数微分学 ...	(176)	第三节	任意项级数及 其敛散性	(237)
第一节	多元函数的极限 与连续	(176)	第四节	幂级数的概念 与性质	(240)
第二节	偏导数与全微分	(180)	第五节	函数的幂级数展开	(246)
第三节	复合函数与隐函 数的微分法 ...	(185)	第 12 章	线性代数基础	(253)
第四节	偏导数的几何应用	(191)	第一节	行列式	(253)
第五节	多元函数的极值	(195)	第二节	矩阵的概念及运算	(260)
第 10 章	多元函数积分学	(201)	第三节	矩阵的初等行变换 与矩阵的秩 ...	(266)
第一节	二重积分的概念 与性质	(201)	第四节	线性方程组的 消元解法	(271)
			附录 1	初等数学常用公式	(278)
			附录 2	常用积分公式	(282)
			附录 3	参考答案	(292)
			主要参考文献		(322)

第 1 章 函 数

微积分是高等数学课程的主要内容，它是从研究函数开始的。函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型。本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质，为微积分的学习奠定必要基础。

第一节 集 合

一、集合的基本概念

集合是数学中最基本的概念之一，它如同几何中的“点”、“线”等概念一样，不能精确给以定义，我们只能给出集合的一种描述。

所谓集合，就是“规定了某一法则，能够辨别一些具体对象的总体”。我们把构成集合的对象叫做集合的元素。通常用大写英文字母 A, B, C 等表示集合，用小写英文字母 a, b, c 等表示集合的元素。

例如：“26 个英文字母”是一个集合；“我们信息工程系里排球队的全体学生”也是一个集合等等。

如果 a 是集合 A 的一个元素，则记为 $a \in A$ ，读做“ a 属于 A ”，或者说“ a 在 A 中”；如果 a 不是集合 A 的一个元素，则记做 $a \notin A$ ，读做“ a 不属于 A ”，或者说“ a 不在 A 中”。

作为一个元素，对于某一集合而言，要么在集合中，要么不在集合中，二者必居其一。

二、集合的表示方法

通常用下列两种方法来表示集合。

1. 列举法

列举法是把集合的元素全部列入花括号内，并用逗号将元素一一隔开。例如，集合 A 是由前五个英文小写字母组成的，可记为 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 。

如果集合中的元素比较多，在能够清楚表示集合元素的情况下可以使用省略号。例如，集合 A 是由不超过 20 的正整数组成的，可记做 $A = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20\}$ 。

2. 描述法

描述法是利用集合中元素的共同性质来表示集合的方法。其表示形式是：

$A = \{x | x \text{ 具有的性质 } p\} = \{x | p(x)\}.$

例如, 集合 B 是由不等式 $x-1>0$ 的全体实数解组成的集合, 可以表示为 $B = \{x | x>1, x \in \mathbf{R}\};$

集合 C 是由 xOy 平面上不包括圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点的圆内所有点的集合, 可以表示为 $C = \{(x, y) | x^2+y^2<1\}.$

三、集合的类型

1. 有限集: 集合中所包含的元素的个数只有有限个.
2. 无限集: 集合中所包含的元素的个数有无限个.
3. 空集: 不含有元素的集合叫空集, 记为 $\emptyset$.
4. 子集: 设 A, B 两个集合, 如果 B 中的每一个元素都是 A 中的元素, 则称 B 为 A 的子集合, 简称子集, 记为 $B \subseteq A$, 读作“ A 包含 B ”或“ B 包含于 A ”. 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记做 $A=B$. 为了排除相等的情况, 我们把包含在 B 内又不等于 B 的集合 A 叫做 B 的真子集, 记做 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

5. 全集: 由所研究的所有事物构成的集合称为全集, 记为 U . 全集是个相对性的概念, 根据所研究问题的不同, 所取的全集也会不同. 例如我们学院选学生会主席, 作为全集所考虑的应是我们学院的全体学生; 机电工程系选拔田径运动员, 我们考虑的全集则应是机电工程系的全体学生.

四、集合的运算

设 A, B 是两个集合:

1. 并集: 由至少属于 A, B 之一的所有元素构成的集合, 记做 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 并集可表示为 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$
2. 交集: 所有既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合, 记做 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 可表示为 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$
3. 差集: 属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合, 记做 $A-B$ 或 $A \setminus B$, 差集可表示为 $B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$

五、区间及点的邻域

区间就是实数轴上的一些实数的集合, 它是用得较多的一类数集.

设 a, b 都是实数, 且 $a < b$, 则:

1. 开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 这里 $a, b \notin (a, b)$, a 和 b 分别叫做区间 (a, b) 的左、右端点.
2. 闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 这里 $a, b \in [a, b]$.
3. 半开区间: $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}; [a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$

以上这些区间都称为有限区间, $b-a$ 叫做区间的长度.

以后我们还要经常用到无限区间, 无限的开区间或半开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}; \quad (-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}; \quad (-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

常用无限开区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数的集合 $\mathbf{R}$.

区间用数轴表示如图 1-1-1 所示.

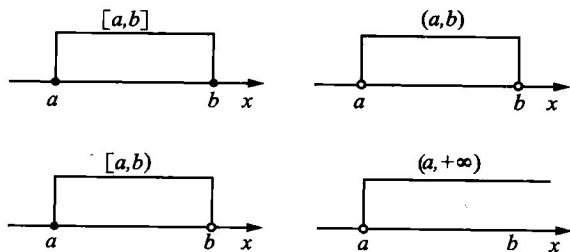


图 1-1-1

邻域也是一个经常遇到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 数集

$$\{x | |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记做 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | |x-a| < \delta\}.$$

点 a 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域 $U(a, \delta)$ 的半径. 因为 $|x-a| < \delta$, 相当于 $-\delta < x-a < \delta$, 即 $a-\delta < x < a+\delta$, 所以有

$$U(a, \delta) = \{x | a-\delta < x < a+\delta\}.$$

由此可以看出邻域 $U(a, \delta)$ 所表示的就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$, 这个开区间是以 a 为中心的, 而长度为 2δ .

有时用到的邻域须把中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心(或空心)邻域, 记做 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$.

邻域用数轴表示如图 1-1-2 所示.

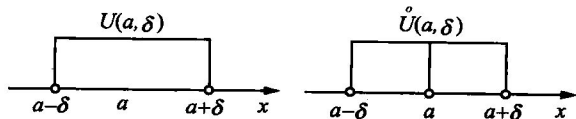


图 1-1-2

习题 1-1

1. 用描述法表示下列集合:

- (1) 大于 50 的所有实数集合;
- (2) 所有偶数组成的集合;
- (3) 圆 $x^2 + y^2 = 9$ 上所有的点组成的集合.

2. 用列举法表示下列集合:

- (1) 小于 20 的质数组成的集合;
- (2) 由英文前 8 个小写字母组成的集合;
- (3) 能被 5 整除的正整数组成的集合.

3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, 试写出 $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A - B$, $B - C$.

4. 用区间表示下列集合:

- (1) $|x| \leq 2$;
- (2) $|x - 5| \leq 1$;
- (3) $|x - 1| < \delta (\delta > 0)$;
- (4) $|x| > 1$;
- (5) $|x + 2| \geq 5$.

5. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合:

- (1) $|x - a| < \delta$ 其中 a 为常数, $\delta > 0$;
- (2) $1 < |x - 2| < 3$.

6. 设 $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}^-$, $C = \{0\}$, $D = \{2n | n \in \mathbf{Z}\}$, 试写出:

- (1) $A \cup B \cup C$;
- (2) $A \cap B$;
- (3) $(B \cap D) \cup C$;
- (4) $D \cap C$.

第二节 函数的概念与性质

在 17 世纪之前, 函数的概念一直与公式紧密关联, 到了 1873 年, 德国数学家狄利克雷抽象出了较为合理的函数概念, 直到今日仍为人们所沿用.

一、函数的基本概念

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y , 若当变量 x 在实数的某一范围 D 内, 任意取定一个数值时, 按照一定的规律 f , 有唯一确定的 y 值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记做

$$y = f(x), x \in D$$

其中变量 x 称为自变量, 变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范

围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$, 通过对应规律 f , 函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应, 则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记做

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$$

函数值的集合, 称为函数的值域, 可记做 M .

若函数在某个区间上的每一点都有定义, 则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素, 而函数的值域一般称为派生要素.

(1) 对应规律

例 1 $f(x)=3x^2+2x-5$ 就是一个特定的函数, f 确定的对应规律为:

$$f(\quad) = 3(\quad)^2 + 2(\quad) - 5.$$

例 2 已知 $f(x+1)=x^2-3x$, 求 $f(x)$.

解 设 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 所以

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)^2 - 3(t-1) \\ &= t^2 - 5t + 4 \end{aligned}$$

将上式中的 t 用 x 代替, 得 $f(x)=x^2-5x+4$.

(2) 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 3 求函数 $y=\sqrt{\ln(x-1)}$ 的定义域.

解 由 $\sqrt{\ln(x-1)}$, 可知此函数的定义域应当满足 $\ln(x-1) \geq 0$, 即 $x-1 \geq 1$, 也就是 $x \geq 2$.

所以, 所求函数的定义域是 $[2, +\infty)$.

例 4 判定下列各组函数是否是相同函数:

$$y=\ln x^2 \text{ 与 } y=2\ln x; \quad y=\sqrt{x} \text{ 与 } w=\sqrt{u}.$$

解 第一组两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不是相同的函数; 第二组两个函数的对应规律和定义域均相同, 所以这两个函数是相同的函数.

3. 函数的记号

y 是 x 的函数, 可以记做 $y=f(x)$, 也可以记做 $y=\phi(x)$ 或 $y=p(x)$ 等, 但同一函数在讨论中应取定一种记法. 当同一问题中涉及多个函数时, 则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律, 为方便起见, 有时也用记号 $y=y(x)$, $u=u(x)$, $s=s(x)$ 等表示函数. 这种函数的记号也称为函数的解析表达式.