理论力学

中册

胡楚雄 主编

电子科技大学出版社

理 论 力 学

中 册

胡楚雄 主编

土 木 工 程 学院 2001级 16班
孙 昱

电子科技大学出版社

内容提要

本书分上、中、下三册，上册包括静力学和运动学，中册为动力学，下册为运动力学专题。

为了适应不同专业、不同学时教学和不同程度学生的需要，全书内容大致分为"基本要求"、"基本要求加深、加宽"、"进一步要求"三个层次，并力求使较多的章、节具有相对独立性，以便教师选用、组合成各种类型的教学体系。

本书可作为高等工业学校土建、水利、机械等类专业理论力学课程的教材，亦可供有关工程技术人员参考。

理论力学

（中册）

胡楚雄　主编

出　　版：电子科技大学出版社　（成都建设北路二段四号，邮编：610054）
责任编辑：何时祺
发　　行：新华书店
印　　刷：成都理工学院印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　印张 17.5　字数 430 千字
版　　次：1998 年 9 月第一版
印　　次：1998 年 9 月第一次印刷
书　　号：ISBN 7—81043—869—7/O・63
印　　数：1—3000 册
定　　价：17.50 元

中　册　目　录

第三篇　动力学

第三篇　动　力　学

第十四章　质点运动微分方程

14-1　动力学的任务和基本概念

动力学是研究物体的机械运动与作用力之间关系的科学。

在静力学中，我们研究了物体在力系作用下处于平衡的条件，而没有研究受不平衡力系作用时物体将如何运动。在运动学中，我们只从几何方面描述了物体的运动过程，而未涉及那些使物体运动发生变化的原因，即未涉及物体本身的属性和所作用的力。而动力学则要对物体的机械运动进行全面的分析，研究物体的质量、作用于物体上的力与物体运动之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。

动力学的研究对象是运动速度远小于光速的宏观物体。原子等微观粒子的动力学研究属于量子力学；可以比拟光速的高速运动物体的动力学研究则属于相对论力学。动力学的研究以牛顿运动定律为基础，属于牛顿力学或经典力学的范畴。

动力学成为理论力学的一个分支学科，因为它不仅是物理学、天文学的基础，也是许多工程学科的基础。自 20 世纪以来，动力学又被人们理解为侧重于工程技术应用方面的一个力学分支。

动力学的基本内容包括质点动力学、质点系动力学、刚体动力学等。以动力学为基础而发展起来的应用科学有振动理论、运动稳定性理论、变质量力学、陀螺力学、外弹道学、天体力学以及正在发展中的多刚体系统动力学等。

动力学知识，无论在工程技术或科学研究中，都有极广泛的应用。例如，高速旋转机械的均衡，振动和稳定，各种机器、机构和结构的动力计算，控制系统的动态特性和稳定性，以及宇宙飞行和火箭技术中的轨道问题等，都要有动力学的专门知识作为基础。所以，掌握动力学基本理论及其应用，具有十分重要的意义。

动力学所研究的问题相当广泛，但可归纳为两类基本问题：一是已知物体的运动，求作用于物体上的力；二是已知作用于物体上的力和物体运动的初始条件，求物体的运动。在动力学中还有一些问题是这两类问题的综合。

研究动力学的方法主要有两种，一是牛顿力学的方法，即矢量力学的方法；二是拉格朗日、哈密顿力学方法，即分析力学的方法。分析力学将在专题中讨论，本篇主要介绍用三种方法来求解动力学的两类基本问题。这三种方法是：建立物体运动微分方程的方法，普遍定理的方法和达朗伯原理动静法。为使篇幅紧凑，本书将交错地叙述质点和质点系（包括刚体）动

力学，而不是严格地分为两部分，且重点是研究质点系动力学问题，质点作为质点系的特例来讨论。

牛顿定律是研究动力学的基础，尽管读者曾多次学习并应用过牛顿定律，但是我们还是简略地介绍一下牛顿定律的内容及意义。

牛顿第一定律（惯性定律）

任何质点都保持其静止的或匀速直线运动的状态，直到它受到其它物体的作用而被迫改变这种状态为止。

此定律表明任何质点都具有保持静止或匀速直线运动状态的属性，这种属性称为惯性，而匀速直线运动也称为惯性运动，所以第一定律又称为惯性定律。

此定律还表明只有当质点受到其它物体的作用时，才能改变其静止或匀速直线运动的状态，这就是说力是改变质点运动状态的原因。

牛顿第二定律（力和加速度之间的关系定律）

质点受力作用而产生的加速度，其方向与力相同，其大小与力成正比而与质量成反比。

如果用 m 表示质点的质量，以 $\boldsymbol{F}$ 表示质点所受的力，$\boldsymbol{a}$ 表示质点在 $\boldsymbol{F}$ 作用下获得的加速度，并选取适当的单位，则第二定律可表示为

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{14-1}$$

这个方程建立了质量、力和加速度三者之间的关系，是解决动力学问题的基本依据，故称为动力学基本方程。当质点同时受几个力作用时，则式中 $\boldsymbol{F}$ 应理解成各力的合力。

由第二定律可知，要使不同质量的质点获得同样的加速度，质量较大的质点则需要较大的力，这就表明较大的质量具有较大的惯性，由此可知，质量是质点惯性大小的度量。平动物体可视为质点，故质量也是平动物体惯性大小的度量。

设重量为 G 的物体，在真空中自由下落的加速度为 g，则

$$G = mg$$

或

$$m = \frac{G}{g}$$

式中 g 是重力加速度。注意重量与质量是两个不同的概念。质量是物体惯性大小的度量，在牛顿力学中视为常量；而重量是物体所受重力的大小，在地面各处的重力加速度随所在地的纬度和高度而略有不同，在我国一般取 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$，可见物体的重量随所在地域不同而改变，且只在地面附近的空间内才有意义。

牛顿第三定律（作用与反作用定律）

两物体之间的作用力和反作用力总是大小相等、方向相反、沿同一直线，且同时分别作用在这两个物体上。这个定律在静力学中已讲过，这里进一步指出它对运动情况仍然适用。

必须指出，牛顿定律中涉及到物体的运动与作用在物体上的力。显然，物体及其所受的力不因参考系选择的不同而改变。但是同一物体的运动在不同参考系中的表现可以完全不同。可见，这里存在着根本性的矛盾；它决定了牛顿定律不可能运用于一切参考系，而只能适用于对某些参考系的运动。凡是对牛顿定律成立的参考系，称为惯性参考系。相对惯性参考系静止或作匀速直线平动的参考系都是惯性参考系。相对惯性参考系作加速运动或转动的参考系，称为非惯性参考系。牛顿运动定律只适用于惯性参考系。

判断一个特定参考系是不是惯性参考系，取决于能以多大的精确度去测量这个参考系的微小加速度效应。在大多数工程实际问题中，可以近似地选取与地球相固连的坐标系为惯性坐标系。如果要考虑地球自转的影响，可取地心为原点，而三个轴分别指向三个恒星的坐标系为惯性坐标系。在研究宇宙飞船和天体运动时，需要考虑地球自转和绕太阳公转的影响，应将参考坐标系的原点取在太阳系的中心，三个坐标轴指向三个恒星。在本书中，如无特别说明，总是将与地球相固连的坐标系作为惯性坐标系，而不考虑地球自转时所产生的影响。

力学中的每个物理量都要用适当的单位来度量，而且各物理量之间又具有一定的关系，并不是每个物理量的单位都可以任意规定。国际单位制取质量、长度、时间为基本量，以千克(kg)、米(m)、秒(s)为基本单位；力的单位为牛顿(N)，是导出单位，$1N=1kg\cdot m/s^2$。而工程单位制取力、长度、时间为基本量，以公斤力(kgf)，米、秒为基本单位；质量单位是导出单位，1 工程质量单位$=1kgf\cdot s^2/m$。

工程单位制中的 1kgf 力是指 1kg 质量的物体在 45°纬度海平面上的重量，而此处的重力加速度为 $g=9.80m/s^2$，由式(14-1)有

$$1kgf=1kg\times 9.80m/s^2=9.80kg\cdot m/s^2=9.8N$$

$$1\ \text{工程质量单位}=(9.80kg\cdot m/s^2)\cdot s^2/m=9.8kg$$

以上给出了两种单位制的换算。

§ 14-2 质点运动微分方程

设一质点 M，质量为 m，受到力 $\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$ 的作用，沿某一空间曲线运动，如图 14-1 所示。某瞬时，质点位于 M，其加速度为 $\boldsymbol{a}$，则

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{a}$$

又由运动学知，当用质点 M 对于坐标原点 o 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表示质点的位置时，质点的位置矢径 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 三者之间的关系为：

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{b}$$

于是，式(a)可改写成为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{14-2}$$

或

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{14-3}$$

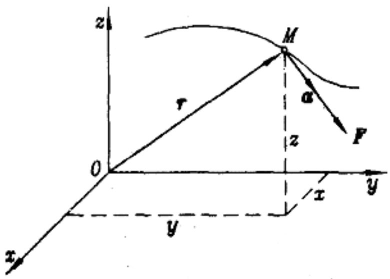

图 14-1

这就是矢量形式的质点运动微分方程。在实际的求解过程中，质点的运动微分方程可写成不同的坐标轴投影形式。

1. 质点运动微分方程的直角坐标轴投影形式

过原点 o 建立直角坐标系 $oxyz$（见图 14-1），将方程(14-3)中的各项投影到各轴上，就得到直角坐标轴投影形式的质点运动微分方程

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X \\ m\ddot{y} &= Y \\ m\ddot{z} &= Z \end{aligned}\right\} \tag{14-4}$$

其中：X、Y、Z 为作用在质点上的各力在 x、y、z 轴上的投影的代数和，$\ddot{x}$、$\ddot{y}$、$\ddot{z}$ 为质点加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y、z 轴上的投影。

如果质点在平面 oxy 内作平面曲线运动，则式(14-4)中 $\ddot{z}\equiv 0$；如果质点沿 ox 轴作直线运动，则式(14-4)中 $\ddot{y}\equiv\ddot{z}\equiv 0$。通常我们把质点的平面曲线运动和直线运动作为空间曲线运动的特例来处理。

2. 质点运动微分方程的自然坐标轴投影形式

设已知质点 M 的运动轨迹曲线如图 14-2 所示。在轨迹曲线上选 $t=0$ 时质点所在处为弧坐标原点，则任意时刻质点位于 M，其弧坐标为 S，规定其正负方向，并建立该时刻的自然轴系 $M\tau nb$，其中 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 分别为沿切线、主法线、次法线方向的单位矢量。将式(14-3)中的各项投影到自然坐标轴上，有

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= F_\tau \\ ma_n &= F_n \\ ma_b &= F_b \end{aligned}\right\} \tag{14-5}$$

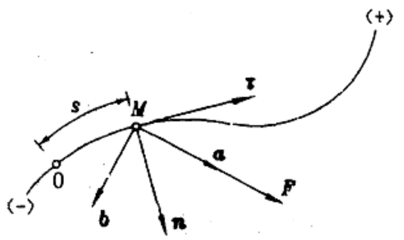

图 14-2

其中 F_τ、F_n、F_b 分别为作用在质点上的各力在轨迹上 M 处的切线、主法线、次法线上的投影的代数和，但由于

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= \frac{d^2S}{dt^2} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

于是，式(14-5)可写成

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2S}{dt^2} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} \tag{14-6}$$

这就是自然坐标轴投影形式的质点运动微分方程。

当质点 M 作平面曲线运动时，有时还可采用极坐标表示法。如图 14-3 所示，由运动学可知，质点的加速度在极坐标系下有如下的表达式：

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi \tag{d}$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 分别为沿径向和沿横向的单位矢量。

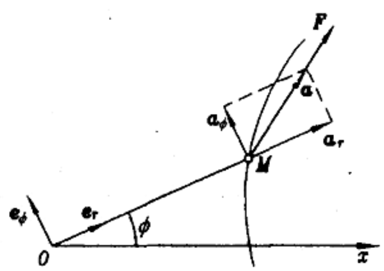

图 14-3

将式(d)代入式(14-1)，并将方程中各项分别投影到 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向，就得到

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{14-7}$$

这就是极坐标轴投影形式的质点运动微分方程。

利用以上的质点运动微分方程，原则上就能解决质点动力学的有关问题。至于在具体应用时选用什么形式的运动微分方程，则需根据具体情况而定。

§14-3 质点动力学的两类基本问题

应用质点运动微分方程，可求解质点动力学的两类基本问题。

第一类问题　已知质点的运动，求作用在质点上的力。即已知质点的运动方程，或已知质点在任意瞬时的速度或加速度，需求出作用在质点上的力。这一类问题可归结为数学中的微分问题。

第二类问题　已知作用在质点上的力，求质点的运动规律。这类问题归结为数学中的积分问题。但作用于质点的力可能是常力，也可能是变力，而且变力在通常情况下可以是时间的函数，也可以是质点位置坐标的函数，或质点速度的函数，还有可能是上述三种变量组合而成的函数。要求得质点的运动规律就需要求解运动微分方程，而在求解中将会出现积分常数，这些积分常数要由质点运动的初始条件即初速度和初位置坐标来决定。这就使得在求解质点运动规律时，如质点运动的初始条件不同，虽然受力情况相同，但所得到的运动规律并不相同。所以在求解这一类问题时，除了要知道作用于质点的力之外，还必须知道质点运动的初始条件。同时，由数学中的微分方程知识可知道，只有当力函数关系比较简单时，才能求得微分方程的解析解，如果函数关系复杂，求解将非常困难。甚至不能求得解析解，只能求出近似的数值解。

同样，在质点动力学问题中，有一些问题是同时包含着这两类问题的。

下面我们通过实例说明如何运用质点运动微分方程求解质点动力学的两类问题。

第一类问题

例 14-1　质量为 m 的质点 M 在图 14-4 所示坐标平面 oxy 内运动，已知其运动方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos\omega t \\ y &= b \cdot \sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中 a、b、ω 都是常数，求质点 M 所受到的力。

解　由运动方程消去时间 t，得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可见质点运动的轨迹曲线是以 a 及 b 为半轴的椭圆。

将式(a)代入式(14-4)，可得到力 $\boldsymbol{F}$ 的投影为

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = -ma\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2 x$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -mb\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2 y$$

于是，力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r$$

其中 r 为质点 M 相对于 o 点的位置矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模。力 $\boldsymbol{F}$ 的方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{i}) = \frac{X}{F} = -\frac{x}{r}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{j}) = \frac{Y}{F} = -\frac{y}{r}$$

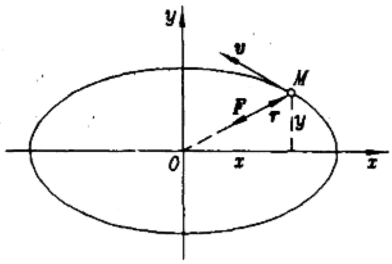

图 14-4

恰好与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦数值相等而符号相反，所以力 $\boldsymbol{F}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 成正比例而方向相反（即指向坐标原点 o），可用方程表示为

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}$$

这种力称为有心力。

例 14-2 质量为 1kg 的重物 M，系于长度 $L=0.3$m 的线上，线的另一端固定于天花板上的 o 点。重物在水平面内作匀速圆周运动而使悬线成为一圆锥面的母线，且悬线与铅垂线间的夹角恒为 60°，如图 14-5 所示。试求重物运动的速度和线上的张力。

解 选重物 M 为研究对象，作用在重物上的力有重力 mg 及悬线的拉力 $\boldsymbol{T}$，它们同在由悬线 oM 与 oz 轴所构成的铅垂平面内。由于已知 M 点的运动轨迹，故选用自然坐标轴投影形式的运动微分方程，由式(14-6)得

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau = 0 \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{r} = F_n = T\sin 60° \qquad (2)$$

$$0 = F_b = mg - T \cdot \cos 60° \qquad (3)$$

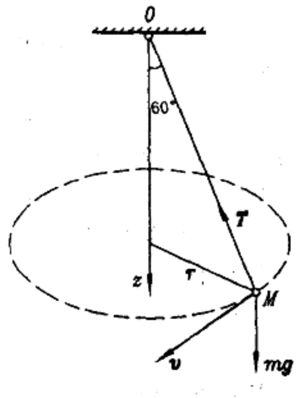

图 14-5

由式(1)得，$v=$ 常量，但不知其值。

由式(3)得

$$T = \frac{mg}{\cos 60°} = 19.6\text{N}$$

将此 T 值代入式(2)得

$$v = \sqrt{\frac{rT\sin 60°}{m}} = 2.1\text{m/s}$$

即重物的速度为 2.1m/s，悬线上的张力应与重物所受的拉力 $\boldsymbol{T}$ 大小相等，其值也为 19.6N。

例 14-3 质量为 m 的重物 A、用一弹簧连接，弹簧另一端系一绳，绳的一端绕在一圆轮上，如图 14-6 所示。在重力作用下，物 A 沿铅直线一下降，若圆轮突然被卡住，使其重物 A 沿上下按 $y=b \cdot \sin\omega t$ 的规律运动，其中 b，ω 为已知常数，求绳子所受的拉力。

解 选重物 A 为研究对象、作用在重物上的力有重力 mg 及绳的拉力 $\boldsymbol{T}$。

若以铅垂向下建立 y 坐标，由式(14-4)得

$$m\ddot{y} = mg - T$$

而

$$\ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t$$

代入上式得

T_1 静反力　T_2 动反力

$$T = mg - m\ddot{y} = mg + mb\omega^2\sin\omega t$$

从上式可以看出，绳子的拉力 T 中包括两部分，第一部分 mg 等于平衡时绳的拉力，它由重物 A 的重力引起的，我们称为静反力；而第二部分 $mb\omega^2\sin\omega t$ 是由重物 A 的运动而引起的绳的拉力，我们称为附加动反力。可以看出，附加动反力不仅数值可能较大，而且往往还是随时间而变化的。

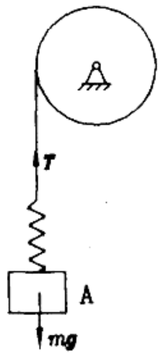

图 14-6

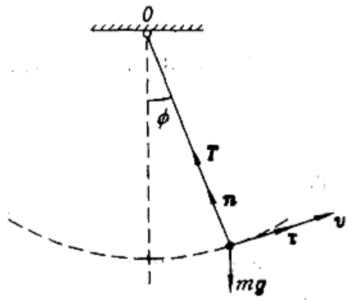

图 14-7

第二类问题

例 14-4 一长为 l，质量不计的细绳上端固结于 o 点，下端系一质量为 m 的小球并可在铅垂面内摆动，如图 14-7 所示。初始时绳的偏角为 φ_0，小球无初速释放。求绳微小摆动时的运动规律。（这种装置称为单摆）

解 取小球为研究对象，作用在小球上的力有重力 mg 和绳的拉力 $\boldsymbol{T}$。

由于细绳不可伸长，所以小球的运动轨迹为一已知圆弧。因此选用自然坐标轴投影形式的运动微分方程求解，建立 τ、n 方向如图所示。由式(14-5)有

$$ma_\tau = F_\tau$$

得

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi$$

如果我们选择 $\varphi=0$ 时，小球所在位置为弧坐标原点，则任意时刻偏角为 φ 时，小球的弧坐标为 $S=l\varphi$，因而有

$$v = \dot{S} = l\dot{\varphi}$$

代入上式得

$$m\frac{d(l\dot{\varphi})}{dt} = -mg\sin\varphi$$

即

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

整理得

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

由于作微小摆动，有 $\sin\varphi\approx\varphi$，可得此时微小摆动的运动微分方程

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0$$

令 $k^2=\frac{g}{l}$，则上式成为

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$$

这为二阶常系数线性齐次微分方程。可看出此题中力为位置坐标的函数。由数学知识可知，此微分方程的通解为

$$\varphi=A\cos(kt+\alpha)$$

其中 A、α 为待定常数，由初始条件确定。将 $t=0$ 时，$\varphi=\varphi_0$，$v=v_0=l\dot{\varphi}_0=0$ 代入得

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0&=A\cos\alpha\\0&=-kA\sin\alpha\end{aligned}\right\}$$

联立求解得

$$A=\varphi_0,\qquad\alpha=0$$

故微小摆动时的运动方程为

$$\varphi=\varphi_0\cos kt$$

可见，单摆作简谐振动，其周期为 $T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{l/g}$，周期与单摆的运动起初条件无关，具有等时性。

例 14-5 试求脱离地球引力场的宇宙飞船所需的最小初速度。

解 取宇宙飞船为研究对象，视为质点。设空气阻力忽略不计，作用于质点的力只有地球引力 F，其大小由万有引力定律确定。设飞船铅直向上，取地心为原点，建立 ox 轴如图 14-8 所示，则有

$$F=f\cdot\frac{mM}{x^2}$$

式中 m 为飞船质量，M 为地球质量，x 为飞船到地球中心的距离，f 为引力常数。由于飞船在地球表面时（即 $x=R$），地球对它的引力等于重力，即

$$mg=f\cdot\frac{mM}{R^2}$$

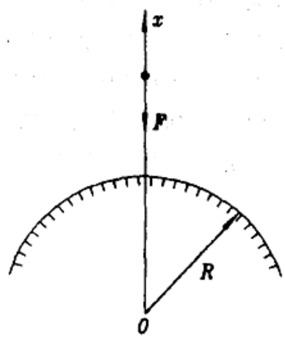

图 14-8

于是有

$$fM=R^2g$$

由此得到飞船离开地面后受到的地球引力为

$$F=\frac{mR^2g}{x^2}$$

从此式可看出，力为质点位置坐标的函数。

写出质点运动微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{mR^2g}{x^2}$$

或

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{R^2g}{x^2}$$

上式中包含 v、x、t 三个变量，必须化成两个变量才能积分。

因为

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

于是原微分方程可写成为

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{R^2g}{x^2}$$

整理得

$$vdv=-\frac{R^2g}{x^2}dx$$

两边分别积分，并且 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=R$ 得

$$\int_{v_0}^{v}vdv=\int_{R}^{x}-\frac{R^2g}{x^2}dx$$

解得

$$v_0^2-v^2=2gR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{x}\right)$$

所以

$$v_0=\sqrt{v^2+2Rg+\frac{2gR^2}{x}}$$

要实现脱离地球引力的条件是：当 $x\to\infty$ 时，$v\geqslant0$，取 $v=0$ 得 v_0 的最小值

$$v_0=\sqrt{2gR}$$

如以地球半径 $R=6370\text{km}$，$g=9.8\text{m/s}$ 的值代入则有

$$v_0=11.2\text{km/s}$$

此即为物体脱离地球引力的最小速度，也称为第二宇宙速度。

例 14-6 从地面附近高空由静止开始下落一质量为 m 的物体，设空气阻力 $R=\gamma v^2$，γ 为阻力系数，它与物体的形状，空气密度，迎风截面积等因素有关。试求物体的运动方程。

解 将物体简化为质点，它将作铅垂直线运动。选起始位置为坐标原点，x 轴以向下为正。作用在质点上的力有重力 mg 和空气阻力 $\boldsymbol{R}$，阻力方向与运动速度方向相反，分析如图 14-9 所示。

设任一瞬时质点的位置为 x，由质点运动微分方程有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-R$$

或

$$m\frac{d\dot{x}}{dt}=mg-\gamma\dot{x}^2 \tag{a}$$

可看出，力为质点速度的函数。

上式整理可得

$$\frac{m d\dot{x}}{mg - \gamma \dot{x}^2} = dt$$

令

$$a = \frac{\gamma}{m}, c = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$$

则上式成为

$$\frac{d\dot{x}}{c^2 - \dot{x}^2} = a dt$$

两边分别积分，并由 $t=0$ 时，$\dot{x}_0=0$ 得

$$\int_0^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{c^2 - \dot{x}^2} = \int_0^t a dt$$

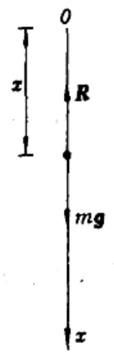

图 14-9

积分并整理得

$$\dot{x} = c \cdot \mathrm{th} \frac{g}{c} t \tag{b}$$

从而有

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot \mathrm{th} \frac{g}{c} t$$

即

$$dx = c \cdot \mathrm{th} \frac{g}{c} t dt$$

再积分，并由 $t=0$ 时，$x=0$ 得

$$\int_0^x dx = \int_0^t c \cdot \mathrm{th} \frac{g}{c} t \cdot dt$$

所以有

$$x = \frac{c^2}{g} \mathrm{lnch} \frac{g}{c} t$$

这就是所求的运动方程。

讨论：从式(b)看，由双曲正切的定义可知，当 $t \Rightarrow \infty$ 时，$\mathrm{th} \frac{g}{c} t \Rightarrow 1$ 而此时速度 v 趋于极限值 c，即

$$v_L = \lim_{t \to \infty} v = c = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$$

这一速度称为极限速度。

从式(a)可知，当物体的降落速度达到极限速度时，物体所受到的阻力与重力相等，因而物体的加速度为零，则物体将以不变的速度下落。从理论上讲，当 $t \to \infty$ 时，速度 v 才达到极限速度，但在实际上，当 $t = \frac{3c}{g}$ 秒时，速度 $v = 0.995 v_L$，误差已经很小，可以认为此时质点已经达到极限速度了。

通过上述例子可以看出，在求解质点动力学问题时，基本的步骤为：

1. 选择研究对象，分析研究对象的受力情况，包括主动力和约束反力，正确地画出研究

对象的受力图。

2. 分析研究对象的运动情况，即分析它的运动轨迹，速度及加速度等，并根据分析来确定选用合适的运动微分方程形式。

3. 建立运动微分方程，分析方程中的已知量和未知量，判明该题目属哪一类问题。属第一类问题时，用微分方法求解。属第二类问题时，用积分方法求解，但由于作用于质点的力可能是常量，也可能是时间、速度、位置等因素的变量，这就使得在积分时有可能要进行积分变量的变换，而且在积分里，为了确定积分的上下限，还要利用质点运动的初始条件。

4. 根据已知条件，求解方程，得到所求结果。

§14-4 质点在非惯性系中的运动

前面讨论了质点在惯性坐标系中的运动，即绝对运动。但在许多情况下，我们需要研究质点相对于非惯性坐标系的运动。例如，考虑地球自转时，河流中水的运动。远程导弹的轨道偏离，以及在变速运动的车、船中的物体的运动等等。在非惯性坐标系中，牛顿第二定律是不适用的。因而在研究质点相对于非惯性参考系的运动时，要采用其它的方法，通常采用如下两种方法：①通过坐标变换，把相对于惯性系的已知运动规律变换成相对于非惯性系的运动规律；②直接写出相对于所考察的非惯性系的运动微分方程，然后求积分，我们主要介绍后者，即用复合运动的分析方法，将质点在非惯性坐标系中的运动转换到惯性坐标系中，再利用牛顿第二定律，通过引入惯性力的概念，从而最终得到质点在非惯性坐标系中与在惯性坐标系中相似的运动微分方程。以使问题得以解决。

设质点 M 相对于非惯性坐标系 $o'x'y'z'$ 运动，而此坐标系又相对于一惯性坐标系 $oxyz$ 运动，如图 14-10 所示。质点的质量为 m，相对轨迹为 $A'B'$，绝对轨迹为 AB。相对加速度为 $\boldsymbol{a}_r$ 绝对加速度为 $\boldsymbol{a}$，质点所受力之合力为 $\boldsymbol{F}$。在惯性坐标系中，应用牛顿第二定律，有

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \qquad (a)$$

由运动学中点的加速度合成定理有

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_k \qquad (b)$$

其中 $\boldsymbol{a}_e$ 是质点 M 的牵连加速度，$\boldsymbol{a}_k$ 是科氏加速度，且

$$\boldsymbol{a}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r \qquad (c)$$

将式(b)代入式(a)，移项整理得

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_e - m\boldsymbol{a}_k \qquad (d)$$

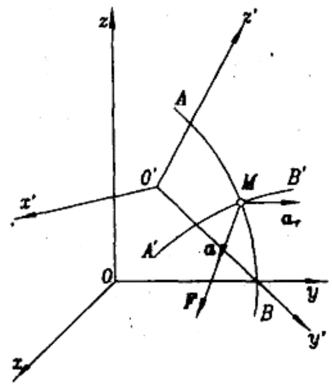

图 14-10

令

$$-m\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{F}_e^I, \; -m\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{F}_k^I$$

则式(d)成为

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_e^I + \boldsymbol{F}_k^I \qquad (14\text{-}8)$$

其中 $\boldsymbol{F}_e^I$ 和 $\boldsymbol{F}_k^I$ 都具有力的量纲，分别称为牵连惯性力和科氏惯性力。

式(14-8)是质点相对于非惯性坐标系 $o'x'y'z'$ 运动的动力学方程，称为质点相对运动动力学基本方程。即质点的质量与相对加速度的乘积等于作用于质点上的力与牵连惯性力、科