农业系统工程讲义

第二分册

运筹学

刘德铭　张下宗　金治明

中国科学院农业现代化研究委员会
全国农业系统工程研究会学习班　编印
湖南省系统工程学会农业系统工程研究会

一九八一年八月

编 者 的 话

我不懂农业，更不懂农业系统工程，所以要完成这个任务是比较困难，，既然接受了，也就感到十分惶恐。特别是在写点什么没有什么主意。原来有一个想法，有的同志又建议我讲点这个，讲点那个。所以七拼八凑，终于写了这个“四不象”，丑媳妇总要见公婆，稿子催得紧，所以最后还是交了上去。可以想见，问题和错误恐怕是不会少的。衷心的希望得到大家的批评与帮助。

这本小册子大体分四个部分。其中 §1——§6是介绍一般的决策分析的原理、方法。§7——§12是介绍一般对策，并说明对策、决策之间的关系。§13是介绍了动态规划的知识，其中重点讲了一下马尔可夫决策。§14讲了多目标决策。这样，一般常见的决策方策都作了初步介绍。假如这本小册子对大家有点帮助的话，我就感到十分高兴了。

编者。

1981.6.25

目　　录

第一部分

第二部分

第三部分

线 性 规 划

前 言

运筹学是系统工程的理论基础，数学规划是运筹学的重要分支，线性规划是数学规划的一部分。线性规划所处理的基本问题是：在把各项“资源”分配给各项“活动”的“规划”中如何安排（计划、设计）才能达到“最优”的结果。所谓“线性”，是指数学模型中的目标函数和约束条件都是一次的。线性规划之所以受到人们的重视，是由于它的理论较完整，方法较成熟，应用十分广泛。这一分支从本世纪四十年代创立以来，已经形成许多有效的方法。随着电子计算机的发展和普及，这些方法更加显示出巨大作用。事实上，在生产组织管理、工程技术以及国民经济的许多领域中，它都得到了有效的应用。

这一部分讲义的重点是介绍单纯形算法，包括对偶单纯形法和改进单纯形法。为增加应用单纯形法的灵活性和有效性，介绍了实用的灵敏度分析方法。考虑到面临大型规划问题的可能性和计算机容量的限制，介绍了分解算法。针对学习班的学习时间和学员的具体情况，我们侧重于介绍方法，为帮助理解也适当加以分析，但不追求理论的严密和完整。并且尽量采用初等代数工具来分析和处理。在最后两章中使用矩阵工具，考虑到部分学员对矩阵不大熟习，特在附录中介绍了有关矩阵的基本知识，以供参考。这部分讲义的前三章是在朱自强同志为上海机械学院所编线性规划讲义的有关章节的基础上修改而成的。

第一章 线性规划问题及图解法

§1 线性规划问题举例

例1.1（运输问题）设有三座矿山A_1、A_2、A_3它们生产矿石的日产量分别为100吨，80吨，50吨。另有四个炼铁厂B_1，B_2，B_3，B_4，它们每天需要矿石分别为50吨，70吨，80吨，30吨，从A_1，A_2，A_3分别向B_1，B_2，B_3，B_4运一吨矿石所需运费由下表给出。

表1—1 运输问题的运费表

运费(元) 铁厂 \ 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5	2	0.3	3	100
A_2	7	0.8	1.4	2	80
A_1	1.2	0.3	2	2.5	50
需要量	50	70	80	30	230

问怎样运输才能使总的运费最小。

设从A_1，A_2，A_3分别向B_1，B_2，B_3，B_4运输矿石的运量为x_i（$i=1, 2, \cdots, 12$），如下表所示。

表1—2 运输问题的变量

运量 铁厂 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_1	x_2	x_3	x_4	100
A_2	x_5	x_6	x_7	x_8	80
A_3	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	50
需要量	50	70	80	30	230

由表1—2可知，从A_1分别向B_1，B_2，B_3，B_4运输矿石的运量之和$x_1+x_2+x_3+x_4$应等于A_1的日产量100吨，而B_1从A_1，A_2，A_3得到的矿石运量之和$x_1+x_5+x_9$应等于B_1的日需要量50吨，等等。因此，我们的问题是：

求一组变量x_i（$i=1, 2, \cdots, 12$）满足下列条件

$$
\begin{cases}
x_1+x_2+x_3+x_4=100 \\
x_5+x_6+x_7+x_8=80 \\
x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=50 \\
x_1+x_5+x_9=50 \\
x_2+x_6+x_{10}=70 \\
x_3+x_7+x_{11}=80 \\
x_4+x_8+x_{12}=30 \\
x_i \geqslant 0 \ (i=1, 2\cdots 12)
\end{cases}
$$

使得总的运费

$$
f=1.5x_1+2x_2+0.3x_3+3x_4+7x_5+0.8x_6+1.4x_7+2x_8+1.2x_9 \\
+0.3x_{10}+2x_{11}+2.5x_{12}
$$

取得最小值。

例1.2（资源利用问题）某工厂生产A，B两种产品，已知生产A种产品1公斤需耗煤9吨，电力4瓩和3个劳动日（一个劳动日为一个工人劳动一天）；生产B种产名1公斤需耗煤4吨，电力5瓩和10个劳动日。1公斤的A种产品利润是700元，1公斤B种产品利润是1200元。但因条件限制，工厂只能提供煤360吨，电力200瓩，劳动日300个。问生产A、B各多少，才能使总的利润最大。

问题中给出的数据可整理成如下的表。

表1—3　资源利用问题数据表

资源＼活动	产品A（公斤）	产品B（公斤）	资源限度
煤（吨）	9	4	360
电力(瓩)	4	5	200
劳动日	3	10	300
利润(百元)	7	12	

设生产A、B两种产品各为X_1，X_2公斤，则问题是：

求X_1，X_2满足下列条件

$$\begin{cases} 9X_1+4X_2\leqslant 360 \\ 4X_1+5X_2\leqslant 200 \\ 3X_1+10X_2\leqslant 300 \\ X_i\geqslant 0(i=1,2) \end{cases}$$

使得总的利润

$$f=7X_1+12X_2$$

取得最大值。

例1.3（营养问题）一消费者要购买营养物，且要求其中所含维生素A，C的单位数分别不能少于9，19。今设有6种营养物都含有这二种维生素，但含量各不相同，单位营养物价格也各不相同，如下表所示。

表1—4　营养问题数据表

每公斤营养物所含维生素(单位)＼营养物 维生素	1	2	3	4	5	6	各维生素的最小需要量
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
营养物单位价格	35	30	60	50	27	22	

问消费者应购买6种营养物各多少，才能使既获得必要的维生素A，C的数量。又花钱最少，

设X_i（$i=1,2\cdots,6$）依次表示购买上述6种营养物之数量，则问题为：

求X_i（$i=1,2\cdots6$）满足下列条件

$$\begin{cases} x_1+2x_3+2x_4+x_5+2x_6\geqslant 9 \\ x_2+3x_3+x_4+3x_5+2x_6\geqslant 19 \\ x_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots 6) \end{cases}$$

使得所花的钱

$$f=35X_1+30x_2+60X_3+50X_4+27X_5+22X_6 \text{取最小值。}$$

例1.4（种植计划问题）某生产队有耕地403亩，打算种植三种晚秋作物：晚地瓜、晚玉米、晚谷。该队现有粪肥3820车，化肥1138斤，可提供劳力5296个工。已知三种作物的单产和每亩所需粪肥，化肥和工的数量如表1—4所示。问怎样制订秋种计划（即各种作物分配多少土地），才能使总产量最高。

表1—4　种植计划问题数据表

资源＼作物	晚地瓜	晚玉米	晚谷	资源限制
土地（亩）	x_1	x_2	x_3	403
粪肥（车）	8	10	12	3820
化肥（斤）	0	4	26	1138
工（个）	16	12	12	5296
亩产（斤）	280(注)	300	320	

（注）地瓜亩产量已折合成粮食计算。

设三种作物各分配土地x_1，x_2，x_3亩，则问题为：

求x_1，x_2，x_3，满足下列条件

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=403 \\ 8x_1+10x_2+12x_3\leqslant 3820 \\ 4x_2+26x_3\leqslant 1138 \\ 16x_1+12x_2+12x_3\leqslant 5296 \\ x_i\geqslant 0 \ (i=1、2、3) \end{cases}$$

使得总产量

$$f=280x_1+300x_2+320x_3$$

取得最大值。

上述各例，都是要求一组非负变量，满足一组条件（线性方程或线性不等式组），使一个线性函数取得最大值（或最小值），这一类问题就是所谓线性规划问题。

§2　线性规划问题的标准形式

把上面所举的一类问题加以概括和抽象化，得出线性规划问题的一般形式：

求x_i（$i=1$，…n）满足条件

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \gtreqless b_i \ (i=1, \cdots, m) \\ x_j\geqslant 0 \ (j=1, \cdots, n) \end{cases} \qquad (1.1)$$

使函数

$$f=c_1x_1+\cdots+C_nX_n$$

取最小（大）值。

称条件（1.1）为约束条件，称函数f为目标函数。称（1.1）的任一组解为线性规划问题的可行解，可行解的全体称为问题的可行解集合，使目标函数取得极值的可行解称为最优解（或问题的解）。

（1.1）中记号$\gtreqless$表示$\geqslant$，$=$，$\leqslant$之中任取其一。即是说约束条件中可包含线性方程也可包含线性不等式。为了便于研究，可以把线性规划问题统一成如下的标准形式：

求x_1，$\cdots x_n$，满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (b_i\geqslant 0)\;,\; i=1,\;\cdots,m,\\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\;\cdots,\;n)\end{cases} \qquad (1.2)$$

使

$$f=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j=\mathrm{Min}, \qquad (1.3)$$

这是因为，如果约束条件中有不等式，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i \quad (\text{或}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\geqslant b_i)$$

则可引入松驰变量y_i（或Z_i），然后用条件

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+y_i=b_i\\ y_i\geqslant 0\end{cases} \qquad \left(\text{或}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-z_i=b_i\\ z_i\geqslant 0\end{cases}\right)$$

去代替原来的不等式条件。如果$b_i<0$，则在方程两端同乘（-1），即可使等式右端$\geqslant 0$。如果原问题是使f取最大值，则令$f_1=-f$，问题可化为使目标函数f_1取最小值。

另外，如果原问题中有某变量x_k是自由变量，即沒有非负限制，则可采用下面两种方法之一，使问题归为标准形式。

法一是，令$x_k=x_k'-x_k''$（$x_k'\geqslant 0$，$x_k''\geqslant 0$）将它代入约束条件和目标函数，即可化为标准形式。

例1.5　求x_1，x_2，x_3，满足

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=6\\ x_2\geqslant 0,\; x_3\geqslant 0\end{cases}$$

使得　$f=x_1+3x_2+4x_3=\mathrm{Min}$,

这里，x_1系自由变量。令$x_1 = x_1' - x_1''$，代入后，问题变成：

求x_1'，x_1''，x_2，x_3，满足

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1' - 2x_1'' + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1' \geqslant 0,\ x_1'' \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

使得

$$f = x_1' - x_1'' + 3x_2 + 4x_3 = \mathrm{Min},$$

解此问题，求出x_1'，x_1''，x_2，x_3后，再由$x_1 = x_1' - x_1''$求得x_1的值，从而得出原问题的解。

法二是，从某一约束方程解出x_k，然后代入其它约束方程和目标函数，即消去变量x_k，从而使问题化为标准形式。

如对例1.5的问题，可以从第一个约束方程解出x_1得

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3,$$

然后代入第二个约束方程和目标函数，即可使问题变为：

求x_2，x_3，满足

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

使得

$$f = 5 + x_2 + 3x_3 = \min$$

由此解出x_2，x_3后，再由$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$求得x_1的值，从而得出原问题的解。

根据上述讨论，我们在第二章中，将集中研究由（1.2）和（1.3）所表达的标准形式的线性规划问题的解法。即寻找一组非负变量，满足一个线性方程组，并使一个线性函数取最小值。

§3　二变量线性规划问题的图解法

在讲述线性规划问题的一般解法之前，先考虑一种特殊情形，即两个变量的线性规划问题下面通过例子来说明这种方法。

例1.6　求x_1，x_2，满足

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

使

$$f = x_2 - x_1 = \mathrm{Min},$$

约束条件有五个不等式，在x_1ox_2平面上，这每一个不等式表示一个半平面。由此，问题的可行解集合K是这五个半平面的交集，即如图1.1所示的凸多边形ABCDO，

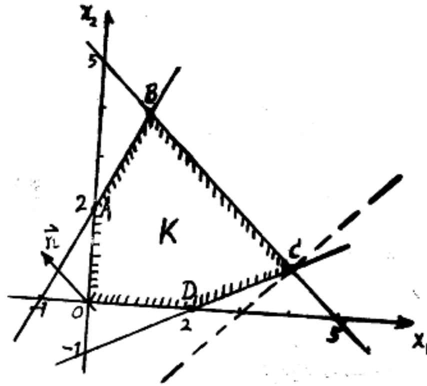

图1—1

现在的问题是：在域K上，找出使$f=x_2-x_1$取得最小值的点。注意到在直线$-x_1+x_2=h$上，目标函数f取常值h。把h视为参变量，得一平行直线束，此直线束的公共法矢量为$\{-1,1\}$。所要求的点应在此直线束中既经过K又使h最小值的那条直线上。由

$$h=\{x_1,x_2\}\cdot\{-1,1\}=\vec{x}\cdot\vec{n}=|\vec{n}|\,prj_{\vec{n}}\vec{x}$$

可知，直线束$-x_1+x_2=h$沿法矢量$\vec{n}=\{-1.1\}$方向移动时，h值增大；向相反的方向移动时，h值减小。特别，通过原点时，$h=0$。由此推知，我们要寻求的点是图中点C。点C是直线$x_1+x_2=5$与直线$x_1-2x_2=2$的交点。容易求出它的坐标为（4.1）。即得问题的解为：$x_1=4$，$x_2=1$，对应目标函数的最小值为$f(4.1)=-3$。

如问题改为求使$f=x_2-x_1$取最大值的点，则其解应为点B（1.4）

例1 7 求x_1，x_2，满足

$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 \\ x_1-3x_2\geqslant -3 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

使

$$f=x_2-2x_1=\mathrm{Min},$$

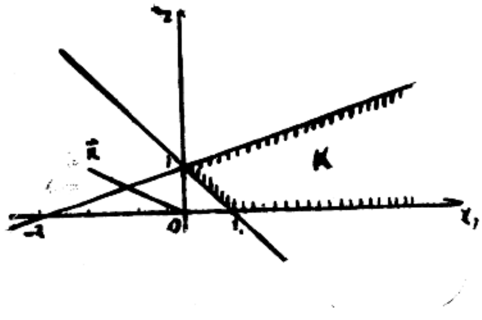

图1—2

易知，问题的可行解集合K对应于x_1ox_2平面的无界凸区域如图1—2所示。直线束$-2x_1+x_2=h$沿法矢量{-2.1}的反方向移动时，不管移动多远，总是与K相交。由此可知所给目标函数f在K上无下界，因而问题无解。

如果问题改为使$f=\max$，则其解应为（0.1）。

例1.8　求x_1，x_2，满足

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 5 \\ -x_1+x_2\leqslant 0 \\ 6x_1+2x_2\leqslant 21 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

使

$$f=3x_1+x_2=\text{Max}$$

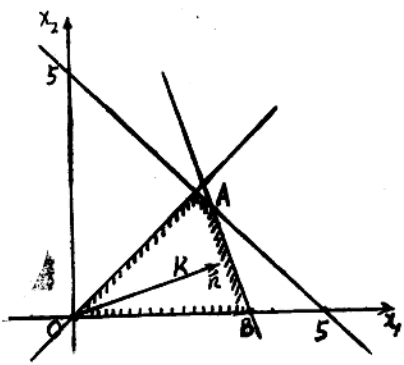

图1—3

容易求出问题的可行解集合K如图1—3所示。直线束$3x_1+x_2=h$沿法矢量$\{3.1\}$的正向移动时，h增大。到达A点时，与直线$\overline{AB}$重合，再移动就离开K了。由此可知，直线$\overline{AB}$上的任一点都能使f达到最大值。点A的坐标为$\left(\frac{11}{4},\ \frac{9}{4}\right)$，点B的坐标为$\left(\frac{21}{6},0\right)$。

$$f\left(\frac{11}{4},\ \frac{9}{4}\right)=f\left(\frac{21}{6},0\right)=\frac{21}{2}。$$

通过上述例子看出，二变量线性规划问题的可行解集合K为平面上一凸多边形（有可能是无界的）。问题的最优解一定在K的边界上达到，一般是在K的一个顶点上达到。

习　题

1.设某工厂有甲、乙、丙、丁四台机床，生产A、B、C、D、E、F六种产品。加工每一种产品各机床所需时间及每一种产品的单价都是已知的，如表1—5所示。假定在一个生产周期内，甲、乙、丙、丁四台机床最大工作能力分别为８５０、７００、１００和９００小时，问在机床能力许可的条件下，每种产品各应生产多少，才能使总的产值最大。试建立此问题的数学模型。

表1—5

产品 / 加工时间 / 机床	A	B	C	D	E	F
甲	0.01	0.01	0.01	0.03	0.03	0.03
乙	0.02			0.05		
丙		0.02			0.05	
丁			0.03			0.08
产品单价	0.40	0.28	0.32	0.72	0.64	0.60

2，某工厂要利用某类钢板下m种另件的毛料。人们在一块钢板上已设计出n种不同的下料方式。已知第i种另件的需要量为bi。按第j种方式下料时，可得第i种另件的个数为a_{ij}个。问如何制定下料计划（即确定按各种下料方式下多少钢板），使既满足需要，又使所用的钢板数最少。
试建立此问题的数学模型。

3，用图解法求解下列线性规划问题。

(1)
$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 \\ x_1-x_2\geqslant -1 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 6 \\ x_1-2x_2\leqslant 1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Max}=30x_1+20x_2$$

(2)
$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 10 \\ -10x_1+x_2\leqslant 10 \\ -4x_1+x_2\leqslant 20 \\ x_1+4x_2\geqslant 20 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Min}f=2x_1-x_2$$

(3)
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\geqslant 10 \\ -x_1+x_2\leqslant 20 \\ x_1-2x_2\leqslant 10 \\ x_1+x_2\leqslant 30 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Min}f=x_1+3x_2,$$

(4)
$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqslant 2 \\ x_1-x_2\leqslant 1 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Max}f=2x_1-2x_2$$

第二章　单纯形法

前面讲的解二变量线性规划问题的图解法对于一般的情形不适应。本章介绍一种解线性规划问题的一般解法——单纯形法。原则上，此法可用以求解一切线性规划问题。实际应用证明，此法常常是相当有效能的。

§1　单纯形算法引例

下面通过对第一章中例1.2的分析，来引入单纯形算法。

例1.2的问题可写成如下的标准形式：

求$X=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$，满足

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2+x_3=360 \\ 4x_1+5x_2+x_4=200 \\ 3x_1+10x_2+x_5=300 \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,\ \cdots 5) \end{cases} \qquad (2\cdot 1)$$

使得

$$f_1(X)=-7x_1-12x_2=\mathrm{Min}.$$

我们求解这个问题的基本思路是，先任取一个可行解，然后逐步改进，最后达到最优。

直接观察可知，

$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=360$，$x_4=200$，$x_5=300$是问题的可行解。此时意味着A，B产品不生产，对应利润$f(0,0)=-f_1(0,0)=0$。显然，此规划可以改善，因无论增大x_1还是x_2 f_1均可减少。为便于分析，我们每次只调整一个变量来达到改善规划的目的。为了较快地达到修正的目的，首先调整系数较小的变量x_2，而x_1仍取为0。但x_2不能任意增大，因由式（2.1）有

$$\begin{cases} x_3=360-9x_1-4x_2\geqslant 0 \\ x_4=200-4x_1-5x_2\geqslant 0 \\ x_5=300-3x_1-10x_2\geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

将$x_1=0$代入上列各式，分别解得

$$x_2\leqslant 90,\quad x_2\leqslant 40,\quad x_2\leqslant 30$$

由此可知，应取x_2增至

$$\min\{90,\ 40,\ 30\}=30,$$

于是得到另一个可行解：

$$x_1=0,\quad x_2=30,\quad x_3=240,\quad x_4=50,\quad x_5=0,$$

相应的利润为

$$f(0.30)=-f_1(0.30)=360,$$

为了考察规划是否可进一步改善，改写式（2.2）为（由第三式解出x_2，并代入第一、二式所得）：

$$\begin{cases} x_3=240-7.8x_1+0.4x_5 \\ x_4=50-2.5x_1+0.5x_5 \\ x_2=30-0.3x_1-0.1x_5 \end{cases} \qquad (2.3)$$

目标函数改写为

$$f_1(x_1.x_5)=-360-3.4x_1+1.2x_5$$

由此可知，只要增加x_1，f_1可进一步减少。x_5仍取0。由（2.3）式和x_3，x_4，$x_2\geqslant 0$并代入$x_5=0$可得

$$x_1\leqslant 30.76,\quad x_1\leqslant 20,\quad x_1\leqslant 100,$$

由此可知x_1应增至

$$\min\{30.76,\ 20,\ 100\}=20,$$

于是得出另一个可行解：

$$x_1=20,\quad x_2=24,\quad x_3=84,\quad x_4=0,\quad x_5=0,$$

相应的利润为：