高等数学学习辅导

（上册）

杨中易　主编

东北工学院出版社

高等数学学习辅导

（上册）

赵广畲　杨中易　孙文芳　李建华
丁仲英　李启国　齐秉寅　尤全德

内 容 简 介

高等数学学习辅导是理工大学本科生学习本门课程的实用教学用书．内容与同济大学数学教研室主编的《高等数学》相吻合．医农林各专业及夜大、函授、电大的学生也能满足需要．全书分上下两册．

做为辅导用书，本书有鲜明的特点，如取材广泛，讲解简明，重点突出，对典型问题与疑难问题有适宜的配合等．

高 等 数 学 学 习 辅 导

（上册）

杨中易　主编

东北工学院出版社出版发行　　东北工学院印刷厂印刷

（沈阳·南湖）　　（辽新出许字 89084 号）

开本：787×1092 1/[illegible]　　印张：[illegible]375　　字数：300 千字

1991 年 3 月第 1 版　　[illegible]91 年 3 月第 1 次印刷

印数：1～5000 册

责任编辑：李世晋　王金邦　　责任校对：张德喜

封面设计：唐敏智

ISBN 7-81006-106-2/O·11　　定价：2.79 元

前　　言

本书编者在各自多年的教学实践中积累了许多经验，已系统地总结在所编的本书各部分之中；在内容上，本书是与同济大学数学教研室主编的《高等数学》相配合的，并在此基础上有所拓宽．相信将会给学生的学习带来便利．编写中力求做到取材广泛，注意典型问题和疑难问题的配合，难易程度适当，满足教学多方面的需要．

本书分上下两册，各部分编者如下：第一部分由赵广畬编写；第二部分由杨中易编写；第三部分由孙文芳编写；第四部分由李建华编写；第五部分由丁仲英编写；第六部分由李启国编写；第七部分由齐秉寅编写；第八部分由尤全德编写。编写工作由杨中易主持并统稿。

在本书编写过程中，赵惠元教授、李世晋教授详尽地审阅了全部书稿，并做了许多订正．

在本书编写与出版过程中得到东北工学院辽宁分院主管院长的大力支持，并得到数学系领导与同事们的帮助，在此深致谢意．

对本书的错误与不足恳请指正．

编　者

1990．2．14

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分　极限与连续

高等数学主要是指微积分学，微积分的理论基础是极限理论．高等数学中许多主要概念，如连续、导数、定积分、重积分、线积分、面积分等的定义与计算都以极限为基础，并且，极限概念还推进了各种理论的发展，促使更多的问题得到解决．

然而，极限理论的建立与完善是后于微积分的．微积分是牛顿(Newton 1642—1727)和莱布尼兹(Leibniz 1646—1716）两人创立的，到现在已经有300多年的历史，而极限理论的建立与完善却是上一个世纪的事情． 1821 年法兰西大数学家柯西（Cauchy 1789—1857）在他的《分析教程》和《无穷小计算讲义》中给出了微积分中一系列基本概念的严格定义．这种里程碑性的工作澄清了人们长达一个多世纪的对极限的模糊认识，也结束了宗教偏见对微积分的非议与攻击．柯西的极限定义的最后完善是由德国数学家维尔斯特拉斯（Weierstrass 1815—1897）完成的．

连续是函数的一种重要性质，连续函数的一些重要性质在微积分学的理论中起着关键作用．自然界不少现象反映在数量关系上都具有连续性，连续性是人们在观察自然现象中所抽象出来的一种概念．

应该指出中学里学习的极限在深度和广度方面都是远远不够的；也应该指出近代数学的许多分支中的某些重要概念与理论正是极限与连续概念的推广、延拓与深化．本部分所

谈的是一元函数的极限与连续问题.

一、目 的 要 求

1. 正确理解极限概念. 特别是对极限的严格定义, 即对"$\varepsilon-N$","$\varepsilon-X$","$\varepsilon-\delta$" 的叙述法要有较正确理解. 对于用定义证明极限问题, 虽然题量不宜多, 但分析与证明方法要掌握。

2. 较熟练地掌握极限运算法则. 会运用两个重要极限计算较复杂一些的题目, 也要熟记一些基本极限公式, 进而建立一套处理不定式的基本方法与技巧.

3. 会运用函数极限存在的充要条件判定函数在指定点处（特别是分段函数在分界点处）的极限存在与否问题.

4. 对无穷小的概念有正确理解. 特别是对于有极限的变量（或函数）与无穷小的关系, 以及无穷大与无穷小的关系要加以掌握. 要了解无穷小的比较, 特别是等价无穷小代换要注意代换的等价性.

5. 正确理解连续性概念, 掌握三种定义方法, 也要了解单侧连续性.

6. 掌握函数连续的充要条件, 并会运用来判定给定函数在指定点处的连续性问题.

7. 了解间断点的类型及其判定方法.

8. 掌握初等函数连续性, 了解反函数与复合函数连续性的条件.

9. 熟悉闭区间上连续函数性质, 并会用以证明一些不太难的证题.

二、内容纲要及重要概念

（一）各种类型极限定义

为了叙述简明，采用如下逻辑量词：

$\forall$ 代表语句"如果对于任意给定的"．

$\exists$ 代表语句"总存在"．

考察函数 $f(x)$当 x 作某种趋向时 $f(x)$的趋向，这种极限过程可以简括记成

$$\lim_{x \to p} f(x) = Q$$

自变量 x 的趋向可有 6 种情况：$p = x_0$（定值，x 既可从 x_0 的左方趋向 x_0，又可从 x_0 右方趋向 x_0）；$p = x_0 - 0$（x 只从左方趋向定值 x_0）；$p = x_0 + 0$（x 只从右方趋向定值 x_0）；$p = \infty$（x 既趋向 $+\infty$，又趋向 $-\infty$）；$p = +\infty$（x 只趋向 $+\infty$）；$p = -\infty$（x 只趋向 $-\infty$）．函数 $f(x)$的趋向 Q 可有四种情况：$Q = A$（定值）；$Q = \infty$（$f(x)$ 既趋向 $+\infty$，又趋向 $-\infty$）；$Q = +\infty$（$f(x)$ 只趋向 $+\infty$），$Q = -\infty$（$f(x)$ 只趋向 $-\infty$）．

上述各种方式组合起来共有 24 种类型极限．对于数列 $f(n)$，当然只有 $n \to +\infty$，而 $f(n)$ 的趋向仍有上述四种．$f(x) \to \infty$（或 $+\infty$，或 $-\infty$）虽然表示极限不存在，但也是一种有用的趋向．从这些类型中取出几种主要类型给出定义，其余类型可仿照作出．

【数列极限定义】

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$ 成立，称常数 A 为数列 x_n 当 $n \to \infty$ 时的极限，记成

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A \quad (n\to\infty)$$

【$x\to x_0$（定值）时 $f(x)$ 的极限定义】

$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\delta$ 成立，称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记成

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to x_0)$$

采用其他方式再给出几种极限定义。

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A: \quad （称左极限）$$

$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A:$$

$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty:$$

$\forall\,M>0$，$\exists\,X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $f(x)<-M$ 成立。

（二）函数在一点连续定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其某一邻域内有定义，下面三种定义方式是等价的：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0);$$

$$\lim_{x-x_0\to 0} [f(x)-f(x_0)] = 0;$$

$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad 成立。$$

由第一种方式知函数在 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

（三）主要定理

【有关数列极限定理】

（1）（极限唯一性定理）若数列 x_n 收敛，它只能收敛于唯一数，而不能收敛于两个或更多的不同的数（对函数极限也是唯一的）．

（2）（收敛数列必有界定理）若数列 x_n 收敛，即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $|x_n| \leqslant M = \max\{|A-\varepsilon_0|, |A+\varepsilon_0|, M_1\}$，其中 $M_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|\}$，当 $n>N$ 时恒有 $|x_n - A| < \varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ 是事先任意取定的正数．

此定理的逆定理不成立．如 $x_n = (-1)^n$．

（3）单调有界数列必有极限．

（4）（夹逼定理）若对于 $n>N$，数列 y_n，x_n，z_n 有如下关系：$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$（有限数），则 x_n 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$．

（5）数列 x_n 有极限的充要条件是：

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m>N$，$n>N$ 时，恒有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 成立．

（6）若数列 x_n 收敛于 A，则数列 x_n 的任一子列 x_{n_k} 都收敛于 A．

（7）若数列 x_n 及 y_n 均收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，$A>B$，则 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$x_n > y_n$ 恒成立．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(8)（(7)的推论）若有一个正数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n>y_n$ 恒成立，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则恒有 $A\geqslant B$（不能推论出 $A>B$）。

(9) 对于数列 x_n，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\rho<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0。$$

【有关函数极限定理】

(1) 在自变量的一定趋向下，如果函数 $f(x)$ 有极限，则自变量在这种趋向下，函数 $f(x)$ 是有界函数。

(2) 在自变量的一定趋向下，若 $f(x)$ 是有界函数，$\alpha(x)$ 是无穷小量，则 $\alpha(x)f(x)$ 也是无穷小量。

(3) 在自变量的一定趋向下，$f(x)$ 以 $A(A\neq0)$ 为极限，$\alpha(x)$ 是无穷小量，则 $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ 也是无穷小。

(4) 在自变量的一定趋向下，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充要条件是：函数 $f(x)$ 可以表示为 A 与一个无穷小 $\alpha(x)$ 的和，即

$$f(x)=A+\alpha(x)\ \text{（其中 } \alpha(x) \text{ 是无穷小量）}$$

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，且在 x_0 的某一邻域内除去 x_0 外，$\alpha(x)$ 恒不为零，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$；若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$。

(6) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有极限的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$ 时的一切 x'，x''，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \text{成立。}$$

（7）当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有极限的充要条件是：对于任意收敛于 x_0 的数列 x_n 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

（8）若在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 及 $h(x)$ 均有极限为 A，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

（9）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的空心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$，使在此邻域内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（10）（（9）的推论）. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（11）设函数 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 复合而成，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的一个邻域内(除 x_0 外) $\varphi(x)\neq u_0$，又 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=A$$

（12）极限四则运算（略）

【有关连续性定理】

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 当 $x\to x_0$ 时有极限等于 $f(u_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right)$$

（2）设函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在

$x=x_0$ 也连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=f(\varphi(x_0)).$$

（3）（反函数的连续性）设函数 $y=f(x)$ 在区间〔a,b〕上连续，且函数是递增的(或递减的)，$f(a)=A$，$f(b)=B$，则反函数 $x=\varphi(y)$ 在区间〔A,B〕（或区间〔B,A〕）上也连续，且也是递增的（或递减的）。

（4）初等函数在其定义区间上是连续的。

（5）设函数在闭区间〔a,b〕上连续，则函数 $f(x)$在该区间上有界。

（6）（最大值和最小值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间〔a，b〕上是连续的，则此函数在此区间上一定有最大值与最小值。

（7）（介值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间〔a,b〕上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个实数 C，在开区间内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C \qquad (a<\xi<b)$$

（8）（过零定理）设函数 $f(x)$在闭区间〔a,b〕上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)f(b)<0$），则在开区间（a，b）内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 ξ（$a<\xi<b$）使

$$f(\xi)=0$$

（9）（中间值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间〔a,b〕上连续，M 和 m 分别为 $f(x)$ 在〔a,b〕上的最大值与最小值，则对于满足条件 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 的任何实数 μ，在区间〔a,b〕上至

少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\mu。$$

（10）连续性四则运算（略）

（四）常用的基本极限

对一些基本极限应当熟记。

【第一重要极限类】

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$。

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

【第二重要极限类】

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e.$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}=e^{ab}$ （a，b，c 为常数）.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=e$.

【无穷小类】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$ （$a>1$）.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$ （$a>1$）.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{e^x}=0$ （$a>0$）.

(5) $\lim\limits_{x\to0+0}x^a\ln x=0$ （$a>0$）.

【其它类】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ （$a>0$）.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{\ln x}=+\infty$ （$a>0$）.

(5) $\lim\limits_{x\to0+0}x^a e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ （$a>0$）.

【幂指类】

(1) (1^{∞})型公式：在自变量一定趋向下

$$\lim u^{v}=e^{\lim(u-1)v}$$

其中　$\lim u=1$，$\lim v=\infty$.

(2) 第三类不定式：在自变量一定趋向下

$$\lim u^{v}=e^{-\lim\frac{u' v^{2}}{u v'}}$$

其中 u,v 可导，$\lim u^{v}$ 是(1^{∞})，(0^{0})或(∞^{0})型。

(3) $$\lim_{n\to\infty} r^{n}=\begin{cases}0, & \text{当}\ |r|<1\\ 1, & \text{当}\ r=1\\ +\infty, & \text{当}\ r>1\\ \text{不定}, & \text{当}\ r\leqslant -1.\end{cases}$$

三、例 题 分 析

有关极限方面的题目多数是计算极限，少量的是证明题。极限题目分数列极限与函数极限。无论哪种极限题目都很庞杂，有的还相当难，又没有统一的解题方法。所谓处理极限有几种办法，都是经验性的说法，但仍可供借鉴。极限题目中一大类是处理不定式，不定式有七种，这是经常遇到的。带有极限符号的计算题目 $\lim\limits_{x\to p} f(x)$（或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n}$）的处理办法大致可有五方面：首先是把“极限点”$p$“代入”函数 $f(x)$，看其是否为不定式，若是不定式看其是何种不定式，然后设法计算；有时依 $f(x)$的结构特点把 $f(x)$ 作适当的变形（如分子分母同乘除一个量；分子同加减一个量；把 $f(x)$分项组合或括号组合配成基本极限形式等等）；大量的不定式是可用罗比达法则的，或能转化成罗比达法则的；如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com