

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·华东师大数学系编

九章丛书

数学分析

(第三版·下册)

同步辅导及习题全解

主 编 焦艳芳

- ◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解
- ◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

新版

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第三版·下册）同 步辅导及习题全解

主 编 焦艳芳



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是为了配合华东师范大学数学系出版的《数学分析（第三版·下册）》而编写的配套辅导书。

全书按教材内容，对各章的重点、难点做了较深刻的分析。针对各章节全部习题给出详细解题过程，并附以“知识点窍”和“逻辑推理”，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，各章还附有典型例题与解题技巧，以及历年考研真题评析。

本书可作为工科各专业、本科学生、“数学分析”课程教学辅导材料和复习参考用书，也可作为工科考研强化复习的指导书及“数学分析”课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（第三版下册）同步辅导及习题全解 / 焦艳芳主编. —北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6665-1

I. 数… II. 焦… III. 数学分析—高等学校—教学参考资料 IV.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 124394 号

策划编辑：杨庆川 责任编辑：杨元泓 加工编辑：周益丹 封面设计：李佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 数学分析（第三版·下册）同步辅导及习题全解
作 者	主编 焦艳芳
出版发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail: mchahnel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京方水电子信息有限公司
印 刷	北京市梦宇印务有限公司
规 格	170mm×227mm 16开本 18.5印张 425千字
版 次	2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷
印 数	0001—6000册
定 价	18.80元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

编 委（排名不分先后）

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘 岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄 河	李思琦	刘 闯	侯朝阳

前 言

本书是华东师范大学编写的《数学分析》(第三版·下册)的配套辅导书及习题全解。

数学分析是数学专业的一门最重要的基础课。习题是数学教学中的一个重要组成部分,在数学分析中尤其如此。因为通过数学分析中的习题训练而获得的数学思想、方法、技巧和素质,可以使邻近和后继的课程的学习变得容易,从而达到融会贯通的目的。

本书是九章系列课题组根据市场调研结果,吸纳广大从事数学分析教学的老师和大学生朋友的意见精心编写而成。其中对每章的知识进行了系统的归纳和总结,对一些实例进行细致剖析、深化。对习题不仅给出详细解答,而且给出了“知识点窍”和“逻辑推理”,前者精辟地点明知识点,后者全面透析题意,阐述解题思路,以培养学生正确的思维方式和逻辑推理能力。

本书在编写过程中,参考了高等教育出版社出版的《数学分析学习指导书》一书,在此深表感谢。

本书可作为大、中专院校学生学习数学分析课程的参考用书,也可作为考研学生的复习参考资料。

对于本书的不足之处,恳请读者予以批评指正,以期不断完善。

编 者

2009 年 7 月

目 录

第十二章 数项级数	1
内容简介	1
课后习题全解	4
第十三章 函数列与函数项级数	25
内容简介	25
课后习题全解	27
第十四章 幂级数	44
内容简介	44
课后习题全解	46
第十五章 傅里叶级数	62
内容简介	62
课后习题全解	64
第十六章 多元函数的极限与连续	86
内容简介	86
课后习题全解	90
第十七章 多元函数微分学	109
内容简介	109
课后习题全解	112
第十八章 隐函数定理及其应用	141
内容简介	141
课后习题全解	144
第十九章 含参量积分	170
内容简介	170

课后习题全解	173
第二十章 曲线积分	190
内容简介	190
课后习题全解	193
第二十一章 重积分	202
内容简介	202
课后习题全解	209
第二十二章 曲面积分	248
内容简介	248
课后习题全解	250
第二十三章 流形上微积分学初阶	271
课后习题全解	271

第十二章 数项级数

内容简介

§ 1 级数的收敛性

1.1 级数收敛性定义

	定 义	说 明
数项级数	给定一个数列 $\{a_n\}$, 对它的各项依次用于“+”号连接起来的表达式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 称为数项级数或无穷级数. 其中 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 为级数的通项	数项级数常记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
部分和	数项级数的前 n 项之和记为 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为数项级数第 n 个部分和(简称部分和)	
级数收敛(发散)	若数项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$), 则称数项级数收敛, 称 S 为数项级数的和	例: $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} (x < 1)$
	若 $\{S_n\}$ 是发散数列, 则称数项级数发散 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$	例: $\sum_{n=1}^{2n} (-1)^n = 0$ $\sum_{n=1}^{2n+1} (-1)^n = -1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} n = +\infty$

1.2 级数的基本性质

级数的性质	说 明
若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛, 则对任意常数 c, d, 级数 $\sum (cu_n + dv_n)$ 亦收敛, 且 $\sum (cu_n + dv_n) = c \sum u_n + d \sum v_n$	

续表

级数的性质	说 明
级数去掉, 增加或改变级数的有限个项, 并不改变级数的敛散性	若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S , 则级数 $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 也收敛, 且其和 $R_n = S - S_n$. 级数 $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 个余项, 它表示以部分和 S_n 代替 S 所产生的误差
在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛, 也不改变它的和	对发散级数不可随便加括号 例如: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散, 但级数加括号后为 $(-1+1)(-1+2)+\cdots=0$
设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S_1, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S_2, \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$	
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S, c$ 是与 n 无关的常数, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = cS$	

1.3 级数收敛的柯西准则

柯西准则: 级数收敛的充要条件是: 任给正数 ϵ , 总存在正整数 N , 使得当 $m > N$ 以及对任意的正整数 p 都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon$$

推论: 若级数收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

[说明] 可用此推论的逆否命题推断级数发散.

1.4 几种重要的级数

	级数	说明
等比级数	等比级数(几何级数) $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ $ q < 1 \Rightarrow$ 级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$; $ q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 级数发散; $q = 1 \Rightarrow S_n = na$, 级数发散; $q = -1 \Rightarrow$ 级数发散	$0 \leq q < 1$ 时收敛; $ q \geq 1$ 发散
调和级数	调和级数形式为: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$	调和级数是发散级数
p 级数	p -级数形为 $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ $p > 1$ 收敛, $0 < p \leq 1$ 发散	

§2 正项级数

2.1 正项级数的收敛性判定法

定义:若数项级数各项都是由正数组成的级数称为正项级数

收敛 准则	正项级数 $\sum u_n$ 收敛充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 即存在某正数 M ,对一切正整数 n ,有 $S_n \leq M$	由此可将求 $\{S_n\}$ 极限问题转化到估计 S_n 是否有上界的问题
达朗贝尔 判别法 (或称比 式判别 法)	设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数,若 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$,级数 $\sum u_n$ 收敛 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1$ 或 $q = +\infty$,级数 $\sum u_n$ 发散	若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$,则推不出级数的敛散性,例如: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. 其 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$,但 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛
根式判别 法	设 $\sum u_n$ 为正项级数,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ ① 当 $l < 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛 ② 当 $l > 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散	
积分判别 法	原理:利用非负函数的单调性和积分性质,并以反常积分为比较对象来判断正项级数敛散性 设 f 为 $[1, +\infty)$ 上非负减函数,那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散	积分余项 r_n 可估计, $\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx$
比较判 别法	设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数,如果存在某正数 N 对一切 $n > N$ 都有 $u_n \leq v_n$ ① 若级数 $\sum v_n$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 也收敛 ② 若级数 $\sum u_n$ 发散,则级数 $\sum v_n$ 也发散	可利用已知级数的敛散性来判断所要考虑级数的敛散性
	若 $\exists N$ 使当 $n > N$ 时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 则 ① 由 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛 ② 由 $\sum a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum b_n$ 发散	
	设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 两正项级数若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ ① 当 $0 < l < +\infty$ 时,级数 $\sum u_n$, $\sum v_n$ 同时收敛或发散 ② 当 $l = 0$ 且级数 $\sum v_n$ 收敛,级数 $\sum u_n$ 也收敛 ③ 当 $l = +\infty$ 且级数 $\sum v_n$ 发散,级数 $\sum u_n$ 也发散	$\sum v_n$ 可取等比级数或 p 级数,有时也直接研究 u_n 趋于零的阶

§3 一般项级数

名称	判定定理	说明
莱布尼茨判别法	交错级数:若级数的各项符号正负相间,即 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots (u_n > 0)$, 则称为交错级数 若交错级数满足下述两个条件 ① 数列 $\{u_n\}$ 单调递减 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 则级数收敛	用莱布尼茨判别法判别交错级数是否收敛,要考察 u_n 与 u_{n+1} 的大小,比较 u_n 与 u_{n+1} 大小的方法有三种: ① 比值法,即考察 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于 1 ② 差值法,即考察 $u_n - u_{n+1}$ 是否大于 0 ③ 由 u_n 找出一个连续可导函数 $f(x)$,使 $u_n = f(n)$,考察 $f'(x)$ 是否小于 0
绝对收敛	(1) 若级数 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 各项绝对值所组成的级数 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 收敛,则称原级数绝对收敛 (2) 若 $\sum u_n$ 收敛,则称 $\sum u_n$ 绝对收敛;若 $\sum u_n$ 发散,而 $\sum u_n$ 收敛,则称为条件收敛 (3) 设级数 $\sum u_n$ 绝对收敛,且其和等于 S,则任意重排后得到的级数 $\sum u_n$ 也绝对收敛亦有相同的和数	
柯西定理	若级数 $\sum u_n, \sum v_n$ 都绝对收敛,则对所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛,且其和等于两级数和的乘积	
阿贝尔判别法	设级数 $\sum u_n$ 收敛又 $\{v_n\}$ 单调有界, $ v_n \leq M$ 则级数 $\sum u_n v_n$ 收敛	
狄利克雷判别法	设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的部分和 $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ 有界, $B_n \leq M$, 又 $\{a_n\}$ 单调递减数列, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛	

课后习题全解

§1 级数的收敛性(教材下册 P5)

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和数:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; (4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}); (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

逻辑推理 先确定级数部分和 S_n 的表达式, 再根据级数的收敛定义, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. 若极限存在, 则级数收敛.

证 (1) 因为

$$S_n = \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right) \right] = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1}\right),$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$, 由定义知该级数收敛, 且和为 $\frac{1}{5}$.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ 是公比为 } \frac{1}{2} \text{ 的级数, 故收敛于 } \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ 同理 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ 收敛于 } \frac{1}{2}, \text{ 由级数的性质知}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right), \text{ 则}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

级数收敛且和为 $\frac{3}{2}$.

$$(3) \text{ 因 } a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right],$$

$$\text{从而 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$, 故该级数收敛且和为 $\frac{1}{4}$.

$$(4) S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) - (\sqrt{n+1} - 1) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$. 级数收敛且和为 $1 - \sqrt{2}$.

$$(5) (\text{错位相减法求部分和 } S_n) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}, \text{ 则有}$$

$$S_n = 2S_n - S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{2^k} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} (n \geq 2).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$. 级数收敛且和为 3.

2. 证明: 若级数 $\sum u_n$ 发散, $c \neq 0$, 则 $\sum cu_n$ 也发散.

知识点窍 级数发散的定义:即存在正数 ε_0 , 使对任意给定的正整数 N , 总存在正整数 $m_0 > N$ 及 p_0 , 使 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0$.

逻辑推理 利用级数发散的定义和绝对值等式 $|c \sum_{n=1}^{\infty} u_n| = |c| |\sum_{n=1}^{\infty} u_n|$ 求解.

证 级数 $\sum u_n$ 发散, 则存在某个正数 ε_0 . 对任何 $N \in \mathbf{N}_+$, 总存在 $m_0 \in \mathbf{N}_+$, $m_0 > N$ 及 $p_0 \in \mathbf{N}_+$, 有 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0$, 所以 $|cu_{m_0+1} + cu_{m_0+2} + \cdots + cu_{m_0+p_0}| = |c| |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq |c| \varepsilon_0$. 由此可知级数 cu_n 也发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗? 又若 u_n 与 $v_n (n = 1, 2, \cdots)$ 都是非负数, 则解得出什么结论?

逻辑推理 级数发散, 则存在某个正数 ε_0 , 使 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0$, 再利用不等式的相关变换, 即可求解.

解 (i) $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 但 $\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散.

例: $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ 与 $\sum v_n = \sum (-\frac{1}{n})$ 都发散, 而 $\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0$ 收敛

(ii) 若 $\sum u_n, \sum v_n$ 发散, 且 $u_n \geq 0, v_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\exists \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$.

对任何正整数 N , 总存在正整数 $m_0 (m_0 > N)$ 和 p_0 及 $m_1 (m_1 > N)$ 及 p_1 有

$$\begin{aligned} |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| &\geq \varepsilon_0, \\ |v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1}| &\geq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned} &|(u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{m_0+p_0} + v_{m_0+p_0})| \\ &= |(u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}) + (v_{m_0+1} + v_{m_0+2} + \cdots + v_{m_0+p_0})| \\ &\geq |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

由柯西准则得: $\sum (u_n + v_n)$ 也发散.

4. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

逻辑推理 由数列收敛可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_1 - a_{k+1}) = a_1 - a$, 然后根据级数收敛定义即可得证.

证 由数列 $\{a_n\}$ 收敛知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 而 $S_k = \sum_{n=1}^k (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$,

$$\text{所以 } \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_1 - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = a_1 - a,$$

$$\text{即级数 } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a.$$

5. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则

$$(1) \text{ 级数 } \sum (b_{n+1} - b_n) \text{ 发散; } \quad (2) \text{ 当 } b_n \neq 0 \text{ 时, 级数 } \sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}.$$

逻辑推理 根据定义求解, 首先应确定部分和 S_n 表达式, 再求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 的极限, 如极限存在则级数收敛, 不存在(或 $\pm \infty$) 则发散.

证 (1) 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$, 所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty$, 故级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$, 级数部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$, 因此 $\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4、5 题的结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}.$$

知识点窍 题 4、5 的结论: ① 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

② 数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty (b_n \neq 0)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

逻辑推理 由因式分解把部分和公式表达为 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$, 而数列 $\{a_n\}$ 收敛易求, 则再应用题 4、5 结论求出级数的和.

解 (1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n} \right)$,

而数列 $\left\{ \frac{1}{a+n-1} \right\}$ 收敛于零, 且 $a_1 = \frac{1}{a}$, 由习题 4 知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a+1-1} - 0 = \frac{1}{a} (a \neq 0).$$

(2) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) \right]$,

而数列 $\left\{ -\frac{(-1)^n}{n} \right\}$ 收敛于 0, 且 $a_1 = 1$, 由第 4 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = a_1 - a = 1$$

(3) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} \right]$, 而数列 $\left\{ \frac{1}{n^2+1} \right\}$ 收敛于 0,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{1^2+1} - 0 = \frac{1}{2}$.

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum \frac{\sin 2^n}{2^n}; \quad (2) \sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1}; \quad (3) \sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad (4) \sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

知识点窍 柯西准则: 级数收敛的充要条件是: 任给正数 ϵ , 总存在正整数 N , 使得当 $m > N$ 以及对任意的正整数 p , 都有 $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon$.

逻辑推理 根据柯西准则定义求解. 这里主要是寻找 ϵ_0, m_0 与 p_0 , 对于任何正整数 N , 通常都是通过

对绝对值不等式用缩小法找出 m_0 与 p_0 即可凑出 ϵ_0 .

解 (1) 对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = [\log_2 \frac{1}{\epsilon}]$ (不妨设 $\epsilon < 1$). 则对 $\forall n > N$ 及 $\forall p \in \mathbf{N}_+$.

因为 $n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$, 所以 $2^n > \frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 则

$$\begin{aligned} |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| &= \left| \frac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+1}} + \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin 2^{n+p}}{2^{n+p}} \right| \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2^n} < \epsilon \end{aligned}$$

由柯西收敛准则推得: 级数 $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛.

(2) 对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 恒有 $(n+1)^2 > \frac{1}{2}$, 所以 $4(n+1)^2 > 2(n+1)^2 + 1$, 即 $\frac{(n+1)^2}{2(n+1)^2 + 1} > \frac{1}{4}$.

所以对 $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$. 对任何正整数 N , 总存在正整数 m_0 ($m_0 > N$) 和 $p_0 = 1$,

$$\text{有 } |u_{m_0+1}| = \frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2 + 1} > \frac{1}{4} = \epsilon_0.$$

由柯西准则推得: 级数 $\sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2 + 1}$ 发散.

(3) 由于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减小, 故

$$\begin{aligned} |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p}| &= \left| \frac{1}{m_0+1} - \frac{1}{m_0+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{m_0+p} \right| \\ &< \frac{1}{m_0+1} < \frac{1}{m_0} \end{aligned}$$

因此, $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$

当 $m_0 > N$ 及 $p = N+1$ 时, 都有 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p}| < \epsilon$ 成立.

由柯西准则可知级数 $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛.

(4) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\forall N \in \mathbf{N}_+$, 及取 $m_0 = 2N$, $p_0 = m_0$, 则当 $m_0 > N$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{(m_0+k)} + (m_0+k)^2} \right| &> \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{2(m_0+k)^2}} = \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{2}(m_0+k)} \\ &> \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{2}(m_0+m_0)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

由柯西准则知 $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散.

8. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: 任给正数 ϵ , 存在某个正整数 N , 对一切 $n > N$, 总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \epsilon.$$

逻辑推理 由结论 $|u_N + \cdots + u_n| < \epsilon$ 的形式推出, 用柯西准则证明.

证 必要性 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则由柯西准则可知

$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}_+$ 使得 $\forall n > m > N_1$ 时有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \epsilon$$

取 $N > N_1 + 1$, 则 $\forall n > N$, 有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \epsilon$$

充分性 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

则 $\forall m > N$ 及 $P \in \mathbf{N}_+$ 有

$$\begin{aligned} & |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| \\ & \leq |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_{m+p}| + |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

由柯西准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

9. 举例说明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 对每个固定的 p 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0$, 此级数仍可能不收敛.

解 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 已知此级数发散, 但对每个固定的 p ,

$$\frac{p}{n+p} \leq u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+1}.$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+1} = 0,$$

从而也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right) = 0.$$

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足: 加括号后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$ 收敛 ($n_1 = 0$), 且在同一括号内的加数

$u_{n_k+1}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 符号相同 (注: 对不同的括号, 这个符号可以是不同的). 试证原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛.

证 分别记 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 的部分和为 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 加括号后的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$$
 的部分和为 T_k , 则

$$T_k = \sum_{i=1}^k v_i = \sum_{i=1}^k (u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_{i+1}}) = \sum_{j=1}^{n_{k+1}} u_j = S_{n_{k+1}}.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 中同一括号内的所有加数有相同的符号, 因此当 $n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}$ 时, S_n 将单调地变化, 因而

$$T_{k-1} = S_{n_k} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}} = T_k \text{ (或 } T_k \leq S_n \leq T_{k-1} \text{)}.$$

又因 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 则存在极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

且当 $k \rightarrow \infty$ 时,随之有 $n \rightarrow \infty$ (反之亦然), 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_n = T.$$

这就证得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且与 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 有相同的和.

§ 2 正项级数(教材下册 P16)

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{1}{n^2 + a^2}; \quad (2) \sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}; \quad (3) \sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad (5) \sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); \quad (6) \sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}};$$

$$(7) \sum (\sqrt[n]{a} - 1) (a > 1); \quad (8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad (9) \sum (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2) (a > 0).$$

知识点窍 比较原则: 两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 有 $u_n \leq v_n$, 则 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; ②

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

逻辑推理 应用比较原则判别级数的敛散性, 最关键的是要找到合适的比较级数. 常用的比较级数

有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 等.

解 (1) 由于 $0 < \frac{1}{n^2 + a^2} \leq \frac{1}{n^2} (n = 1, 2, \dots)$, 而正项级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$ 收敛.

(2) 因为当 $n \geq 1$ 时, $0 < \frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{2}$ 而 $2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < \pi \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 且 $\sum \pi \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故 $\sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(3) 因为 $n \geq 1$ 时 $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} > \frac{1}{n}$, 而正项级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

(4) 因为 $0 < \frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n} (n > e^2)$, 而正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数收敛.

(5) 因为 $0 < 1 - \cos \frac{1}{n} = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n^2}$, 而正项级数 $\sum \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

(6) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[n]{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, 而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

(7) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t \ln a}{1} = \ln a > 0$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum (\sqrt[n]{a} - 1)$ 发散.

(8) 因为当 $n > e^{e^2}$ 时, $\ln n > \ln e^{e^2} = e^2$, 则 $(\ln n)^{\ln n} > (e^2)^{\ln n} = n^2$, 所以

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}} = \frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2},$$