宋卫东　编著

# 微分几何

科学出版社
www.sciencep.com

# 微分几何

宋卫东　编著

科学出版社
北京

## 内 容 提 要

本书共分六章，第一章综述了预备知识；第二章研究了曲线的局部性质及一些整体性质；第三章研究了曲面的经典内容——曲面的局部性质；第四章介绍了曲面上的联络，这是近代微分几何中一个非常重要的概念；第五章讨论了曲面的整体性质，为近代微分几何的研究提供了一个直观背景；第六章介绍了微分流形的基本概念，这是近代数学中具有代表性的基本概念之一. 每章均配有习题，以巩固知识并训练解题技巧.

本书可作为大学数学专业的教材，也可供有关的数学工作者参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

微分几何 / 宋卫东编著. —北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-024945-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 微分几何-高等学校-教材
Ⅳ. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 112738 号

责任编辑：高 嵘 / 责任校对：王望容
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—3 000 字数：221 000

**定价：19.80 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　　言

微分几何是数学的一个分支学科，不仅历史悠久，而且由于它在发展过程中的不断更新，至今仍是一个十分活跃的领域，并且渗透到数学的各个分支，在理论物理、机械工程、力学等其他领域也得到了广泛的应用.

多年来，一般高校微分几何教材是以经典的初等微分几何为其主要内容，所讨论的主要是三维欧氏空间中的曲面与曲线的局部性质. 使用的方法以数学分析为主要工具. 由于微分几何的不断发展，也由于现代科学技术发展的需要，在文献（M. P do Carmo 著，田畴等译，1988. 孟道骥，1991）的启发影响下，本教材加入了整体微分几何的部分内容，引入了微分流形的基本概念. 在方法上，尽可能地用现代微分几何的方法、观点来处理经典微分几何的主要内容，关注整体性质与局部性质的相关联问题，试图架起从古典理论到近代理论的桥梁，及时传达近代数学思想、数学方法和发展精神.

本书分为六章，第一章综述了预备知识，即三维欧氏空间的拓扑学、向量分析、外微分形式、外微分算子、外代数等；第二章介绍了曲线的局部性质与整体性质；第三章讨论了曲面的局部性质；第四章介绍了曲面上的联络，这是近代微分几何中一个非常重要的概念；第五章研究了曲面的一些整体性质，为近代微分几何的研究提供了一个直观的背景；第六章引入了微分流形的基本概念，它是 20 世纪数学中具有代表性的基本概念之一.

本书论证严谨，同时力求简明，叙述上深入浅出、条理清晰，尽可能地把概念表述得比较具体、直观.

本书是以作者在安徽师范大学数学系开设《微分几何》课时所编的讲义的基础上并结合多年的教学实践编写而成的. 安徽师范大学数学系张量同志为本书选配了习题，并仔细地阅读了全部书稿，提出了许多宝贵意见；安徽师范大学数学系余静同志参加了第一章、第二章部分内容的编写. 在本书的编写和出版过程中，还得到了安徽省教育厅自然科学研究基金、教学研究基金和安徽师范大学教材建设基金的支持，在此表示诚挚的谢意！

在编写本书的过程中，采用了其他著作和相关成果，这里难以一一标示，特向原作者表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中有些内容的处理不一定妥当，错误也在所难免，诚望大家批评指正，以便改进.

宋卫东

2009 年 1 月

# 目　　录


**第一章　预备知识** …… 1

1.1　欧氏空间的基本概念 …… 1

1.1.1　$n$ 维欧氏空间 …… 1

1.1.2　邻域　开集　闭集 …… 2

1.1.3　连续性　同胚 …… 3

1.1.4　连通集 …… 4

1.1.5　紧致性 …… 4

1.2　向量函数 …… 4

1.2.1　向量函数的极限 …… 5

1.2.2　向量函数的连续性 …… 6

1.2.3　向量函数的微导，Taylor 公式 …… 6

1.2.4　向量函数的积分 …… 8

1.2.5　向量函数的几个常用性质 …… 8

1.3　一次形式 …… 10

1.3.1　一次形式的定义 …… 10

1.3.2　一次形式组成的空间 …… 11

1.4　Grassmann 积 …… 11

1.4.1　Grassmann 积的定义及其简单性质 …… 11

1.4.2　Cartan 引理 …… 13

1.5　$p$-形式及外代数 …… 17

1.5.1　$V^2$-空间 …… 17

1.5.2　$p$-形式及空间 $V^p$ …… 18

1.5.3　外代数(Grassmann 代数) …… 20

1.6　外微分 d …… 20

习题 …… 27

**第二章　曲线论** …… 30

2.1　曲线的一般概念 …… 30

2.1.1　曲线的概念 …… 30

2.1.2　曲线的弧长　自然参数 …… 31

2.2 空间曲线的活动标架(基本三棱形) …… 33
2.3 空间曲线的基本公式 …… 35
2.4 曲率和挠率 …… 37
2.4.1 曲率和挠率的计算 …… 37
2.4.2 曲率和挠率的几何意义 …… 38
2.5 曲线论的基本定理 …… 39
2.6 几种特殊曲线 …… 41
2.6.1 平面曲线 …… 41
2.6.2 球面曲线 …… 42
2.6.3 曲线在一点的密切圆 …… 44
2.6.4 空间曲线的球面像 …… 44
2.7 曲线的一些整体性质 …… 45
2.7.1 曲线的有关概念 …… 45
2.7.2 平面曲线的几个整体性质 …… 46
2.7.3 空间曲线的某些整体性质 …… 49
习题 …… 53
第三章 曲面的局部性质 …… 56
3.1 曲面的概念 …… 56
3.1.1 曲面的表示 …… 56
3.1.2 切平面与法向量 …… 58
3.2 曲面的第一基本形式 …… 59
3.2.1 曲面上的光滑函数 …… 59
3.2.2 第一基本形式 …… 60
3.2.3 等距对应 …… 65
3.2.4 共形对应 …… 67
3.3 曲面的第二基本形式 …… 69
3.4 曲面上的曲率 …… 74
3.4.1 法曲率 …… 74
3.4.2 主曲率 主方向 …… 76
3.4.3 Gauss 曲率 平均曲率 …… 80
3.5 曲面上的一些重要曲线 …… 82
3.5.1 曲率线 …… 82
3.5.2 渐近曲线 …… 85

3.5.3 测地线 …… 86
3.5.4 三种重要曲线的等价命题 …… 88
3.5.5 三种重要曲线之间的关系 …… 89
3.6 特殊曲面 …… 90
3.6.1 极小曲面 …… 90
3.6.2 常曲率曲面 …… 91
3.6.3 可展曲面 …… 93
3.6.4 单参数平面族的包络面 …… 96
3.7 曲面论的基本定理 …… 98
3.7.1 曲面的基本公式 …… 98
3.7.2 曲面的基本方程 …… 102
3.7.3 曲面论的基本定理 …… 110
习题 …… 113
**第四章　联络** …… 117
4.1 曲面上的向量场 …… 117
4.1.1 曲面上的光滑函数 …… 117
4.1.2 曲面 $S$ 在点 $p \in S$ 的切向量 $X_p$ …… 118
4.1.3 曲面 $S$ 上的切向量场 …… 121
4.2 曲面上的联络 …… 122
4.3 联络的曲率张量 …… 125
4.4 测地线 …… 127
习题 …… 130
**第五章　曲面的一些整体性质** …… 131
5.1 整体曲面 …… 131
5.2 球面的刚性 …… 135
5.3 Gauss-Bonnet 公式 …… 138
5.3.1 局部的 Gauss-Bonnet 公式 …… 138
5.3.2 整体的 Gauss-Bonnet 公式 …… 140
5.4 凸曲面与积分公式 …… 144
5.4.1 凸曲面 …… 144
5.4.2 积分公式 …… 145
5.5 全平均曲率与 Willmove 猜想 …… 147
5.5.1 全平均曲率 …… 147

5.5.2 环面的全平均曲率 …… 148
习题 …… 150
**第六章　微分流形初步** …… 152
6.1 微分流形的定义 …… 152
6.2 流形在一点的切空间 …… 156
6.3 Riemann 空间 …… 158
6.4 流形上的切向量场 …… 160
6.4.1 基本概念 …… 160
6.4.2 Poisson 括号积 …… 164
6.4.3 光滑切向量场的积分曲线 …… 166
6.5 仿射联络 …… 168
6.5.1 仿射联络的定义及局部表示 …… 168
6.5.2 仿射联络的存在性定理 …… 170
6.5.3 仿射联络的挠率和曲率 …… 170
习题 …… 172
**主要参考文献** …… 175

# 第一章

# 预备知识

本章主要介绍三维欧氏空间的向量分析及外微分形式学(当然可推广到高维情况),它们是研究经典初等微分几何和现代微分几何的重要基础理论.

## 1.1 欧氏空间的基本概念

### 1.1.1 $n$ 维欧氏空间

用 $\mathbf{R}$ 表示实数域. 设

$$\mathbf{R}^n = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \mid x^i \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

表示有序的 $n$ 个实数所构成的数组的集合. 其中每个元素 $x$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点,$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 称为点 $x$ 的**坐标**,$x^i$ 称为点 $x \in \mathbf{R}^n$ 的**第 $i$ 个坐标**. 对任意 $x, y \in \mathbf{R}^n$,令

$$\begin{cases}(x+y)^i = x^i + y^i \\ (\lambda x)^i = \lambda x^i \ (\lambda \in \mathbf{R})\end{cases}$$

这样在 $\mathbf{R}^n$ 中定义了加法和对实数的乘法,使得 $\mathbf{R}^n$ 成为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 $n$ 维向量空间,具有自然的基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$,其中

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

下面定义 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离. 对 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$,令

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} \tag{1-1}$$

容易验证 $d(x, y)$满足下列度量公理:

(1) $d(x, y) \geqslant 0$,等号成立当且仅当 $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n$,有

$$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$$

从而$\{\mathbf{R}^n, d\}$ 成为度量空间.

**定义 1.1** 以式(1-1)为距离函数的 $n$ 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 称为 **$n$ 维欧氏空间**.

### 1.1.2 邻域 开集 闭集

**定义 1.2** 设 $p \in \mathbf{R}^n$，$\varepsilon$ 是任一正数，称集合

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid d(p, x) < \varepsilon\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中以 $p$ 为中心、$\varepsilon$ 为半径的**开球**，或称此集合为点 $p$ 的**开球形邻域**，记为 $B_\varepsilon(p)$.

特别，当 $n = 2$ 时，$B_\varepsilon(p)$ 是一开圆盘；当 $n = 1$ 时，$B_\varepsilon(p)$ 为含 $p$ 的开区间.

**定理 1.1** $n$ 维欧氏空间中的开球具有下列性质：

(1) 每一点 $p$ 都包含在一个开球中；

(2) 如果点 $p$ 属于两个开球 $B_{q_i}(x_i)(i = 1, 2)$ 的交集，则存在点 $p$ 的一开集 $B_\varepsilon(p) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$.

**证明** (1) 是明显的，对于(2)，只要取 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i - d(p, x_i)$ $(i = 1, 2)$，事实上，设 $q \in B_\varepsilon(p)$，则

$$d(p, q) < \varepsilon < \varepsilon_i - d(p, x_i)$$

即 $d(x_i, q) < \varepsilon_i$，从而 $q \in B_{x_i}(q_i)$. ∎

**定义 1.3** 设 $U$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集，如果 $U$ 的每一点 $p$ 都有一个开球 $B_\varepsilon(p) \subset U$，则称 $U$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的**开集**，空集规定为开集.

显然，$\mathbf{R}^n$ 中的任一个开球形邻域 $B_\varepsilon(p)$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

**定理 1.2** $\mathbf{R}^n$ 的开集具有下列性质：

(1) $\mathbf{R}^n$，空集$\varnothing$是开集；

(2) 有限多个开集的交集是开集；

(3) 任意多个开集的并集是开集.

**证明** (1)、(3) 是明显的，现在证明(2). 如果有限多个开集 $A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的交集是空集，则由(1)知，它是开集. 如果 $\bigcap_{i=1}^m A_i \neq \varnothing$，设 $p$ 是它的任一点，由定义 1.3 知，存在开球 $B_{\varepsilon_i}(p) \subset A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$. 令

$$\varepsilon \leqslant \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$$

则 $B_\varepsilon(p) \subset \bigcap_{i=1}^m A_i$，从而 $\bigcap_{i=1}^m A_i$ 为开集. ∎

**定义 1.4** 设 $F \subset \mathbf{R}^n$，如果 $\mathbf{R}^n - F$ 是开集，则得 $F$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的**闭集**.

显然，$\mathbf{R}^n$，$\varnothing$既是开集又是闭集.

一般地,把定理 1.2 抽象为一般拓扑空间的定义.

**定义 1.5** 设 $S$ 为集合,$\mathscr{F}$是 $S$ 的某些子集构成的集合,如果$\mathscr{F}$满足

(1) $\varnothing$, $S \in \mathscr{F}$;

(2) $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathscr{F}$,有 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{F}$;

(3) 设 $A_\alpha \in \mathscr{F}$,$\alpha \in$ 某个指标集 $I$,有 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathscr{F}$.

则称$\mathscr{F}$为 $S$ 的一个**拓扑**,称$(S, \mathscr{F})$为**拓扑空间**.

### 1.1.3 连续性 同胚

**定义 1.6** 设 $\mathbf{R}^n$,$\mathbf{R}^m$ 分别是$n$ 维,$m$ 维欧氏空间,$f$ 是开集 $U(\subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^m$ 的映射,$x_0 \in U$,如果对于 $f(x_0)$ 的任一个开球 $B_\varepsilon(f(x_0))$,都存在$x_0$的开球 $B_\delta(x_0)$,使得

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

则称 $f$ 在$x_0$ 点连续,如果 $f$ 在 $U$ 的每一点都连续,则称 $f$ 在 $U$ 上**连续**,这时称 $f$ 是一个**连续映射**.

**定理 1.3** 映射 $f$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 连续的充要条件是对于 $\mathbf{R}^m$ 中的任一开集 $V$,$f^{-1}(V)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

**证明** 设 $f$ 连续,$V \subset \mathbf{R}^m$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的开集,若 $f^{-1}(V)$ 为空集,当然是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.若 $f^{-1}(V)$ 非空,设 $p \in f^{-1}(V)$,则 $f(p) \in V$,因为 $V$ 为开集.所以存在开球 $B_\varepsilon(f(p)) \subset V$,根据 $f$ 的连续性,存在开集 $B_\delta(p)$ 使得

$$f(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p)) \subset V$$

即

$$B_\delta(p) \subset f^{-1}(V)$$

因此 $f^{-1}(V)$为开集. ∎

反之,对于任一开集 $V \subset \mathbf{R}^m$,$f^{-1}(V)(\subset \mathbf{R}^n)$ 为开集,设 $p \in \mathbf{R}^n$,$\varepsilon > 0$,于是 $A = f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)) \subset \mathbf{R}^n$ 是开集.因此存在 $B_\delta(p) \subset A$,从而

$$f(B_\delta(p)) \subset f(A) \subset B_\varepsilon(f(p))$$

因此 $f$ 在 $p$ 连续,由 $p$ 的任意性知,$f$ 连续.

如果用坐标描述映射的连续性,可以证明定理 1.4.

**定理 1.4** 设 $x \in U \subset \mathbf{R}^n$,$f$: $x \to (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ 为 $U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 的映射,则 $f$ 在 $U$ 上连续的充要条件是每个 $f_i$ 都是连续函数.

**注** 由定理 1.3,可以定义一般的拓扑空间的连续映射.

**定义 1.7** 设 $S,T$ 是两个拓扑空间，$f$: $S \to T$ 是一双射. 若 $f, f^{-1}$ 都是连续的，则称 $f$ 为**同胚映射**，此时称 $S$ 与 $T$ 为**同胚**.

### 1.1.4 连通集

**定义 1.8** 设 $S$ 为拓扑空间，若 $S$ 不能表示为两个非空的不相交的开集之并，则称 $S$ 为**连通的**.

我们易于证明连通性的如下两个等价定理.

**定理 1.5** 空间 $S$ 是连通的，当且仅当它不是两个不相交的非空闭集的并.

**定理 1.6** 空间 $S$ 是连通的，当且仅当它的既开又闭的子集只有空间 $S$ 与空集.

应用定理 1.6，我们可以得到很重要的连通空间.

**定理 1.7** $\mathbf{R}^1$ 是连通的.

**定理 1.8** $n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是连通的.

### 1.1.5 紧致性

**定义 1.9** 拓扑空间 $S$ 的一个覆盖是指 $S$ 的子集的集合，其并集为 $S$. 若所有的子集都是开集，称为**开覆盖**.

若空间 $S$ 的一个覆盖，由其中的某些集合所成的覆盖称为原覆盖的一个**子覆盖**.

**定义 1.10** 若拓扑空间 $S$ 的任何一个开覆盖，都包含一个有限子覆盖（即由其有限个集合组成的子复盖），则称 $S$ 为**紧致的**.

**例 1.1** 实直线 $\mathbf{R}^1$ 不是紧致的.

**定理 1.9** $\mathbf{R}^n$ 中一个子集 $S$ 是紧致的，当且仅当它是闭的且为有界的.

定理 1.9 的证明，可参考一般的拓扑学教程.

## 1.2 向量函数

设 $\mathbf{R}^n$ 是 $n$ 维欧氏空间，$O$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一点，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的自然基底. 若对于区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 中的每一个 $t$ 值，有一个确定的向量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，则称 $\boldsymbol{r}$ 为数量 $t$ 的一个**向量函数**，记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

显然，向量函数的分量是 $t$ 的实值函数 $x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)$，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \{x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)\} \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

若把 $\boldsymbol{r}(t)$ 看成是 $\mathbf{R}^n$ 中一点 $P$ 的径向量,即 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$,则 $P$ 点的轨迹一般是一条曲线.

特别,当 $n=2$ 时,向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t)\}$ 表示平面上的一条曲线.

当 $n=3$ 时,向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 表示空间曲线.

在本节,若无特殊说明,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 表示三维欧氏空间的向量函数. 由于向量分析和数学分析中的相关概念的叙述及命题的证明无原则上的差别,因此在此对向量分析的基础知识只作简要的介绍.

### 1.2.1 向量函数的极限

**定义 1.11** 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为已知向量函数,$\boldsymbol{r}_0$ 是常向量,若对于 $\forall\varepsilon>0$,都存在 $\delta>0$,使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时,恒有

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon$$

成立,则称**当 $t\to t_0$ 时,$\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限 $\boldsymbol{r}_0$**,记为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

易知上式等价于

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|=0$$

**定理 1.10** 设 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$,$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$,则 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$ 成立的充要条件是

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0$$

**证明** 因为

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|&=\lim_{t\to t_0}|(x(t)-x_0,y(t)-y_0,z(t)-z_0)|\\&=\lim_{t\to t_0}\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+(z(t)-z_0)^2}\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$ 当且仅当 $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|=0$. 即

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0 \qquad \blacksquare$$

由此,可以证明

**定理 1.11** 设向量函数 $\boldsymbol{r}_1(t)$,$\boldsymbol{r}_2(t)$ 及数量函数 $\lambda(t)$,当 $t\to t_0$ 时都存在极

限，则

(1) $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$；

(2) $\lim\limits_{t\to t_0}(\lambda(t)\cdot\boldsymbol{r}_1(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)$；

(3) $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$；

(4) $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$.

### 1.2.2　向量函数的连续性

有了向量函数极限的概念，就可以引进向量函数连续性的概念了.

**定义 1.12**　若区间$[a, b]$上的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，对于 $t_0\in(a, b)$，有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$$

则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t_0$**连续**. 若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在$[a, b]$上每一点连续，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在$[a, b]$上是连续的.

显然，$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t), y(t), z(t)\}$ 在 $t_0$ 连续，当且仅当 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $t_0$ 连续. 利用定理 1.11 可以证明

**定理 1.12**　若向量函数 $\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \boldsymbol{r}(t)$ 及数量函数 $\lambda(t)$ 都在 $t_0$ 连续，则 $\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t), \lambda(t)\cdot\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t), \boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)$ 也都在 $t_0$ 连续.

### 1.2.3　向量函数的微导，Taylor 公式

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定义在区间$[a, b]$上的连续向量函数，$t, t_0\in(a, b)$，如果极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}$$

存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t_0$ 是**可导**的. 这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t_0$ 的**导向量**，记为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t_0)$. 即

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}\tag{1-2}$$

若用 $\Delta t$ 表示 $t$ 在 $t_0$ 处的增量，则(1-2)式等价于

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\tag{1-3}$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在某个开区间的每一点的导向量 $\boldsymbol{r}'(t)$ 都存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在此区间内是**可导的**.

由此可得,若 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}=\left\{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0},\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0},\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right\} \tag{1-4}$$

于是有

**定理 1.13** 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t)$ 及数量函数 $\lambda(t)$ 可导,则

(1) $(\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t))'=\boldsymbol{r}'_1(t)+\boldsymbol{r}'_2(t)$;

(2) $(\lambda(t)\boldsymbol{r}(t))'=\lambda'(t)\boldsymbol{r}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{r}'(t)$;

(3) $(\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t))'=\boldsymbol{r}'_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}'_2(t)$;

(4) $(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t))'=\boldsymbol{r}'_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}'_2(t)$;

(5) $(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\boldsymbol{r}(t))'=(\boldsymbol{r}'_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\boldsymbol{r}(t))+(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}'_2(t),\boldsymbol{r}(t))$
$+(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\boldsymbol{r}'(t))$.

对于复合函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ t=\varphi(u)$$

有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\varphi'(u)$$

**注** 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导向量 $\boldsymbol{r}'(t)$ 仍为 $t$ 的一个向量函数,若 $\boldsymbol{r}'(t)$ 仍然可导,则 $\boldsymbol{r}'(t)$ 的导向量 $\boldsymbol{r}''(t)$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的二阶导向量,类似可定为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的三阶,四阶……的导向量 $\boldsymbol{r}'''(t)$, $\boldsymbol{r}^{(4)}(t)$ ……

下面叙述向量函数的 Taylor 公式,关于其证明可根据实值函数的 Taylor 公式及(1-4)式.

**定理 1.14** 设向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在$[t_0,t_0+\Delta t]$ 上具有 $n+1$ 阶导向量,则

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)(\Delta t)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n+\frac{1}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}](\Delta t)^{n+1}$$

其中, $\Delta t\to 0$ 时, $\boldsymbol{\varepsilon}\to 0$.

**注** 对于二元向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$,很容易定义其偏导向量$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ 或 $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ 为

$$\boldsymbol{r}_u=\{x_u,y_u,z_u\},\ \boldsymbol{r}_v=\{x_v,y_v,z_v\}$$

### 1.2.4 向量函数的积分

向量函数的积分和实函数积分有类似概念和性质. 已知向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，若 $\boldsymbol{R}(t)$ 的导向量为 $\boldsymbol{r}(t)$，即

$$\boldsymbol{R}'(t)=\boldsymbol{r}(t)$$

则称 $\boldsymbol{R}(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个**原函数**. 原函数的一般表达式为 $\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$，称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的**不定积分**. 显然，若 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数，则

$$\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{C}$$

留作练习证明下列公式，设 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$，则

(1) $\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\left\{\int x(t)\mathrm{d}t,\int y(t)\mathrm{d}t,\int z(t)\mathrm{d}t\right\}$；

(2) $\int \lambda\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\lambda\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t,\lambda\in\mathbf{R}$；

(3) $\int (\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t))\mathrm{d}t=\int \boldsymbol{r}_1(t)\mathrm{d}t+\int \boldsymbol{r}_2(t)\mathrm{d}t$；

(4) $\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$；

(5) $\int \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$.

其中，$\boldsymbol{a}$ 为常向量.

关于实函数定积分的概念以及性质都可以推广到向量函数. 若 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{R}(b)-\boldsymbol{R}(a)$$

### 1.2.5 向量函数的几个常用性质

下面介绍关于向量函数的几个特殊性质. 假设所给的向量函数具有所需要的各阶连续导向量.

**定理 1.15**　向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有定长的充要条件是

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0$$

**证明**　设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定长向量，即

$$\boldsymbol{r}^2(t)=|\boldsymbol{r}(t)|^2=\text{常数}$$

两边关于 $t$ 求导，有

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

反之，若 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'=\mathbf{0}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^2(t)=0$$

故 $\boldsymbol{r}^2(t)$ 为常数，即 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有定长. ∎

**定理 1.16** 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有定向的充要条件是

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\mathbf{0}$$

**证明** 对于任一向量 $\boldsymbol{r}(t)\neq\mathbf{0}$，总可以取一个单位向量 $\boldsymbol{e}(t)$，使得

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$$

若 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定向的，则 $\boldsymbol{e}$ 为常向量，从而

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e}$$

故

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\lambda\lambda'(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e})=\mathbf{0}$$

反之，设 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\mathbf{0}$，对 $\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$ 两边求导得

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{e}'(t)$$

于是

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\lambda^2(t)\ (\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t))$$

故

$$\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t)=\mathbf{0}$$

应用 Lagrange 恒等式及定理 1.15，得

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=(\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t))^2\\&=\boldsymbol{e}^2(t)\cdot(\boldsymbol{e}'(t))^2-\boldsymbol{e}(t)\cdot\boldsymbol{e}'(t)\\&=(\boldsymbol{e}'(t))^2\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{e}(t)$ 为常向量，因此 $\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}$ 有固定方向. ∎

**定理 1.17** 向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于固定平面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))=0$$