

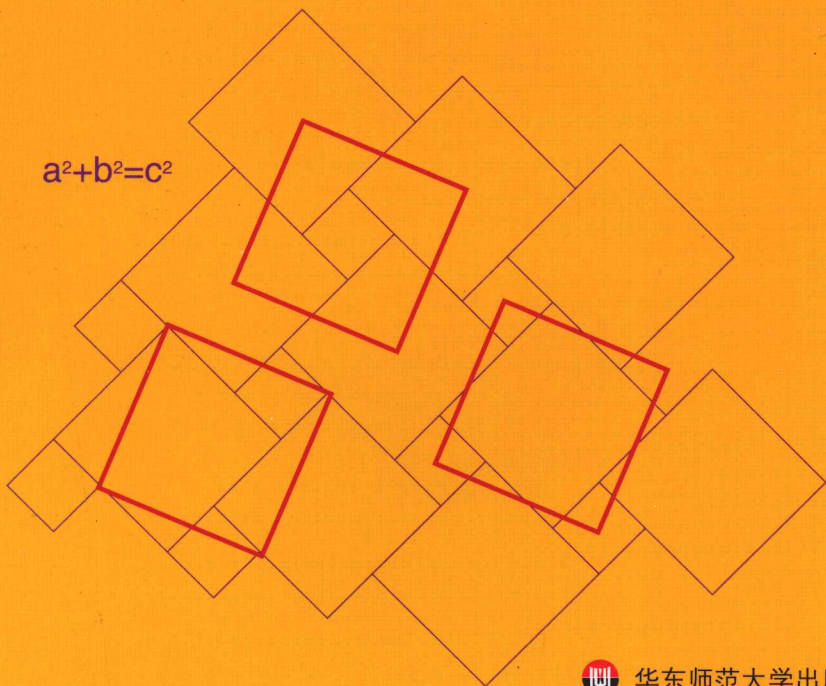
解题高手

第四版

初中数学

杭顺清 何强 沈军 袁海斌 编著

$$a^2+b^2=c^2$$



华东师范大学出版社

解题高手

(第四版)

杭顺清 何 强 编 著
沈 军 袁海斌



图书在版编目(CIP)数据

解题高手. 初中数学/杭顺清等编著. —上海:华东师范大学出版社, 2003

ISBN 978-7-5617-3297-7

I. 解… II. 杭… III. 数学课—初中—解题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 035254 号

解题高手/初中数学(第四版)

编 著 杭顺清等
策划编辑 应向阳
组稿编辑 徐 金
文字编辑 孔繁荣
封面设计 卢晓红
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 江苏扬中市印刷有限公司
开 本 890×1240 32 开
印 张 7.625
字 数 229 千字
版 次 2008 年 3 月第四版
印 次 2008 年 10 月第三次
书 号 ISBN 978-7-5617-3297-7/G·1734
定 价 12.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

序 XU



薄薄的一本小册子：名为《解题高手》，初看很不起眼，翻阅之后，始觉别有韵味。

数学解题方面的著作不少，有的很深沉，摆开架子讲“思维”；有的很实惠，面面俱到讲方法。虽然这些书都不错，对数学学习有帮助，但是，总觉得太呆板，在意境上并不怎样出色。

“意境”是文学里用的词。王国维在《人间词话》里谈到“词”的一种意境时提到：“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”。我们做数学题，也有这样的意境。在百思不得其解时，突然一个想法冒出来，思路豁然开朗，问题迎刃而解。那种美妙，味道好极了。我想，这样的数学学习意境，大家一定都碰到过。倘若你还没有这样的感觉，大概你是不喜欢数学了。

如果把数学解题比做文学，那么这本《解题高手》就像一本诗集。每个题目就像一首诗。书中要先从常规策略分析，然后出示巧妙解法，最后还要画龙点睛一番。它比平铺直叙的解题意境要高，让你思考、咀嚼、体会隐藏在题目背后的“妙”，在意境上得到升华。

许多数学书崇尚“形式化”、“符号化”，把生动活泼的数学思想、解题策略淹没在“形式主义”的海洋里，像被榨干以后的橙子，味同嚼蜡。《解题高手》则告诉我们，数学书可以有另外的写法：把原始的想法和动机和盘托出，把“妙招”的意境公之于众，让读者欣赏遐想、

留连忘返,如嚼橄榄,回味无穷.这是数学教育形态的上乘.

诗不能代替文学.《解题高手》自然不能代替数学教育.但是,一个没有诗词意境的人,文学水准恐怕是不行的.因此,读读这本带有“诗”味的解题著作,必有裨益.

本书的几位作者解题功力上乘,文字表达也不错.至于是否尽善尽美,恐怕也未必.愿和各位共勉,把数学的“诗味”做得更浓些,更好地为中学的数学学子服务.

张奠宙

2005年岁尾

于华东师大数学教育研究所

致 读 者 ZHIDUZHE



也许你在为某道数学题目而烦恼.那么,你就打开眼前的这本《解题高手·初中数学》,它会让你豁然开朗——书中的题解给了你解题的钥匙.

也许你对学习数学缺乏兴趣.那么,你就打开眼前的这本《解题高手·初中数学》,书中每一个巧妙的解法,会让你感受数学的奥妙,会让你享受学习数学的无限乐趣.

也许你是一个数学爱好者.那么,你更应该立即打开眼前的这本《解题高手·初中数学》,这里的每道题解都会让你学到新的思路、新的方法,使你的数学水平从此再上一个新的层次.

《解题高手·初中数学》是《解题高手》系列图书中的一种.这套《解题高手》是一批长期从事中学教学、富有教学经验的教师题海淘金、研究探索的结果.

《解题高手》力图通过练习,形成适合你自己的更科学的学习方法.

《解题高手》注重基础与提高的统一,关注技巧与知识的统一,着眼知识形成过程与结果的统一,让你在练习中得到最大的收益.

《解题高手》在编写体例上遵循学习规律,让你在练习中得到全面系统的提高.全书每个专题都有以下几个栏目:

(1) 精选妙题:以精、准为原则选择每一道题目,为你奉献经典“美食”,力求以一当十.

(2) 常规策略:讲解一般思路及解法,是你解题的必备基础,千万不可轻视.

(3) 巧妙点悟:详细介绍题目的巧妙解法,令你耳目一新,茅塞



顿开。

(4) 画龙点睛:比较常规解法和巧妙解法的不同之处,归纳要点,指出妙解适用的题目类型,予你指点捷径,定会受益匪浅。

(5) 相关链接:提供类似的题目,望你举一反三,巩固提高。

在本系列图书第二版面世的时候,我们开展了“巧解共享”活动,赢得了众多读者的参与,一些读者朋友为我们提供了精巧的解法,部分解法已收录在第三版中(在各册中一一作了说明)。他们是内蒙古呼和浩特第14中学的冯海波、江西鄱阳县高家岭镇中学的何凌云、湖北黄石的汤明、广东佛山南海九江中学的谭毅明、江苏徐州睢宁的沈峰、湖南永州第4中学的王中立、广东清远高桥中学的张利云、上海青浦的张袁媛、安徽枞阳浮山中学的陈杰等。在此,我们对广大读者的鼎力支持表示由衷的感谢。

第四版出版之际,我们决定继续“巧解共享”活动,希望得到读者们一如既往的支持,将解题研究进行到底。来信请寄上海市中山北路3663号华东师范大学出版社教辅分社《解题高手》策划组收,邮编:200062。

愿《解题高手》成为你的好朋友,助你成为解题高手。

华东师范大学出版社
教辅分社



先睹为快 XIANDUWEIKUAI



这是一本“妙题”与“巧解”的小册子,收集了许多精彩的题目,提供了很多很好的解法.这里,让你先睹为快,欣赏下面的题目和它的“巧妙解法”.

问题是这样的:设有甲、乙两个杯子.甲杯中装有 10 升 A 溶液,乙杯中装有 10 升 B 溶液.现在从甲杯中取出一定量的 A 溶液,倒入乙杯并搅拌均匀,再从乙杯中取出等量的混合液倒入甲杯.测得甲杯 A 溶液和 B 溶液的比为 5 : 1,求第一次从甲杯中取出的 A 溶液是多少升?

通常的解法是:设从甲杯取出 x 升 A 溶液倒入乙杯,则乙杯中 A 溶液与 B 溶液的比为 $x : 10$. 从这混合液中取出 x 升,其中含 A 溶液为 $\frac{x}{10+x} \cdot x$ 升, B 溶液为 $\frac{10}{10+x} \cdot x$ 升,所以

$$\frac{(10-x) + \frac{x}{10+x} \cdot x}{\frac{10}{10+x} \cdot x} = \frac{5}{1},$$

化简得 $50x = 100$, 即 $x = 2$.

巧妙解法:注意到:(1)经过两次混合后,甲、乙两杯仍各有 10 升混合液,甲杯中 A、B 溶液比为 5 : 1,说明乙杯中 A、B 溶液比为 1 : 5;(2)第一次混合后乙杯中的 A、B 溶液比就是 1 : 5. 所以,设第一次从甲杯倒入 x 升 A 溶液到乙杯,则在第一次倒入后得

$$\frac{x}{10} = \frac{1}{5},$$

即 $x = 2$ (升).

看了上面的解法,是不是觉得很巧妙吧,从中是否体会到解题的乐趣.赶快去看吧,里面还有很多精彩的题目和解答.不过,在读题的时候一定细细地读,仔细地品,同时还要做“相关链接”的题目.只有这样,才能提高你的解题能力,使你成为“解题高手”.

设甲、乙两桶中原来各有 x 升水,则第一次倒出后,甲桶中剩下 $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ 升水,乙桶中剩下 $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ 升水.

$$\frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{\frac{10}{x} + \frac{x}{10}}$$

解得 $x = 100$, 即 $x = 100$.

解法二: 注意到(1)中两次倒水后,甲、乙两桶中各有 10 升水. 设甲桶中 A、B 两桶的水量比为 $1:2$, 则甲桶中 A、B 两桶的水量比为 $1:2$. 第一次倒出后, A、B 两桶的水量比为 $1:2$. 所以, 第一次从甲桶中倒出 x 升水后, 乙桶中 A、B 两桶的水量比为 $1:2$. 则第一次从甲桶中倒出 x 升水后, 乙桶中 A、B 两桶的水量比为 $1:2$.

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$$

目 录 MULU



(1) 第一章 有理数

- 1.1 妙用乘法分配律(1)
- 1.2 巧用凑整(2)
- 1.3 用乘法公式进行数的运算(3)
- 1.4 合理整体代换(4)
- 1.5 比较大小的巧妙方法(6)

(7) 第二章 整式的加减

- 2.1 整体代换,巧妙求值(7)
- 2.2 巧解绝对值求值(8)
- 2.3 绝对值几何意义的妙用(9)

(11) 第三章 一次方程(组)及其应用

- 3.1 用消常数解题(11)
- 3.2 把握整体,灵活解题(12)
- 3.3 设而不求(13)
- 3.4 巧取倒数(14)
- 3.5 变量多,巧相加(16)
- 3.6 巧解一元一次方程(17)

(19) 第四章 整式乘除

- 4.1 利用整体巧求面积(19)
- 4.2 用平方差公式解题(20)
- 4.3 用对称式求值(21)



目 录 MULU

(23)

第五章 线段、角

5.1 利用内角和定理解题(23)

5.2 运用外角和定理解题(24)

(26)

第六章 相交线、平行线

6.1 划分图形,细数三线八角(26)

(29)

第七章 因式分解

7.1 合理运用配方法解题(29)

7.2 巧用主元法解题(30)

7.3 利用换元法解题(31)

7.4 待定系数法(32)

7.5 双十字相乘法(33)

7.6 巧求值(34)

(35)

第八章 分式

8.1 合理运用逐项通分(35)

8.2 恰当利用拆项解题(36)

8.3 巧用换元法解题(37)

8.4 用形如 $(x + \frac{1}{x})$ 式解题(38)

8.5 设辅助参数(40)

(42)

第九章 数的开方与二次根式

9.1 巧求整数部分(42)

9.2 分子有理化(43)

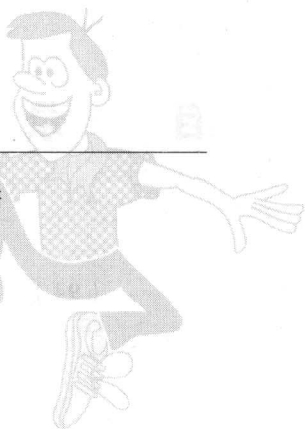
9.3 运用换元法化简二次根式(44)

9.4 利用和差代换解二次根式(45)

9.5 巧用一元二次方程求值(47)

9.6 巧用对偶式求值(48)

9.7 代数问题几何化(48)



(50)

第十章 三角形

- 10.1 巧用三角形面积(50)
- 10.2 用三角形的中位线解题(52)
- 10.3 构造等边三角形(54)
- 10.4 寻找解决过的问题解题(55)
- 10.5 旋转对称变换的应用(57)
- 10.6 轴对称变换的应用(59)

(61)

第十一章 四边形

- 11.1 巧用外角和(61)
- 11.2 特殊四边形的证明(62)
- 11.3 构造平行四边形证明(63)
- 11.4 妙用全等形(65)
- 11.5 巧用旋转(67)

(69)

第十二章 相似形

- 12.1 运用面积的比证明(69)
- 12.2 应用基本图形(71)
- 12.3 巧用梅涅劳斯定理(73)

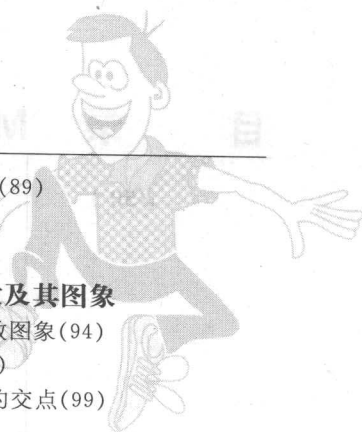
(76)

第十三章 一元二次方程

- 13.1 降次的妙用(76)
- 13.2 用换元法巧解题(77)
- 13.3 反客为主(78)
- 13.4 形如 $(x + \frac{1}{x})$ 的应用(79)
- 13.5 不用判别式解题(81)
- 13.6 利用韦达定理解题(82)
- 13.7 用构造法巧解题(83)
- 13.8 “1”的妙用(85)
- 13.9 根的定义妙用(86)
- 13.10 巧用“配偶”式解题(87)
- 13.11 适当变形,巧解分式方程(88)



目 录 MULU



	13.12 利用换元解无理方程(89)
	13.13 巧解特殊方程组(91)
(94)	第十四章 函数及其图象
	14.1 巧解直角三角形与函数图象(94)
	14.2 挖掘隐含条件解题(96)
	14.3 巧用函数图象与 x 轴的交点(99)
	14.4 判别式的妙用(100)
	14.5 方程在函数图象中的巧用(102)
	14.6 数形结合,化繁为简(104)
	14.7 函数与几何(106)

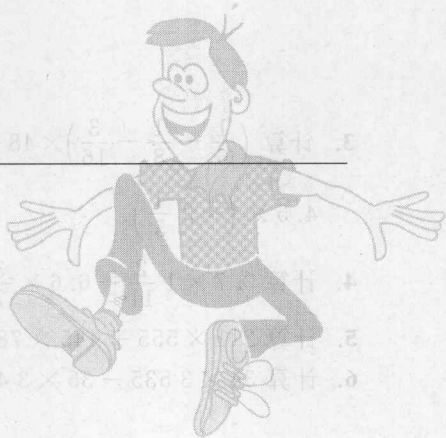
(109)	第十五章 解直角三角形
	15.1 寻找相等的角(109)
	15.2 巧添平行线(110)
	15.3 巧添垂线(112)
	15.4 巧用公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求值(114)
	15.5 基本图形的巧用(115)
	15.6 补全直角三角形(117)

(119)	第十六章 圆
	16.1 巧用三角形外接圆(119)
	16.2 用圆的定义巧解题(121)
	16.3 用弦心距解题(123)
	16.4 巧添切线(125)
	16.5 切点三角形的妙用(127)
	16.6 巧用直径(129)
	16.7 巧用四点共圆(131)
	16.8 利用补形解题(133)

(135)	习题解答
-------	-------------



第一章 有理数



1.1 妙用乘法分配律

精选妙题

计算 $51 \frac{2}{3} \div \frac{5}{3} + 71 \frac{3}{4} \div \frac{7}{4} + 91 \frac{4}{5} \div \frac{9}{5}$.

常规策略

我们可以把带分数化为假分数后,通过分数的运算法则求解.

巧妙解法

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(50 + \frac{5}{3}\right) \times \frac{3}{5} + \left(70 + \frac{7}{4}\right) \times \frac{4}{7} + \left(90 + \frac{9}{5}\right) \times \frac{5}{9} \\ &= 30 + 1 + 40 + 1 + 50 + 1 \\ &= 123.\end{aligned}$$



画龙点睛

在有理数运算中,运用乘法分配律是化繁为简的常用方法.

相关链接

1. 计算 $-19 \frac{18}{19} \times 15$.
2. 计算 $-29 \frac{13}{19} \div 6$.



3. 计算 $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{3}{16}\right) \times 48 - 35.75 \times 2\frac{4}{5} + \left(-25\frac{1}{4}\right) \times \left(-2\frac{4}{5}\right) + 4.5 \times \left(-2\frac{4}{5}\right)$.
4. 计算 $0.7 \times 1\frac{2}{11} - 6.6 \times \frac{3}{7} - 2.2 \div \frac{7}{3} + 0.7 \times \frac{9}{11} + 3.3 \div \frac{7}{8}$.
5. 计算 $211 \times 555 + 445 \times 789 + 555 \times 789 + 211 \times 445$.
6. 计算 $34 \times 3\,535 - 35 \times 3\,434$.

1.2 巧用凑整

精选妙题

计算 $1\,991 \div 25 - 1\,992 \times 1.25 + 1\,993 \times 0.5$.

常规策略

我们可以应用四则混合运算的方法,依次运算得到结果.

巧妙解法

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 1\,991 \times 4 \div (25 \times 4) - (1\,992 \div 8) \times 1.25 \times 8 + (1\,993 \div 2) \\
 &\quad \times 0.5 \times 2 \\
 &= (1\,991 \times 4) \div 100 - (1\,992 \div 8) \times 10 + (1\,993 \div 2) \times 1 \\
 &= 79.64 - 2\,490 + 996.5 \\
 &= 76.14 - 2\,490 + 1\,000 \\
 &= -1\,413.86.
 \end{aligned}$$



画龙点睛

有的题目从表面上看不出凑整的可能,注意到 $25 \times 4 = 100$ 、 $1.25 \times 8 = 10$ 、 $0.5 \times 2 = 1$, 对原式中的数目进行凑整,简化计算.

相关链接

1. 计算 $1\,625\,000 \div 125 - 604 \times 25$.
2. 计算 $4\frac{1}{5} \times 25 + 32\frac{4}{7} \div 4 + 0.25 \times 124$.



3. 计算 $8.88 \times 1.25 \times 9 + 0.1$.

4. 计算 $25 \times (9.1 + 9.1 + 9.1 + 9.1)$.

5. 计算 $(-0.125)^{12} \times \left(-1\frac{2}{3}\right)^7 \times (-8)^{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^9$.

6. 计算 $33\,333 \times 3\,333 - \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{8} - 0.125\right)$.

1.3 用乘法公式进行数的运算

精选妙题

计算:

(1) $999 \times 1\,001$;

(2) $65^3 + 35^3$;

(3) $3.777\,7^2 + 1.222\,3^2 + 3.777\,7 \times 2.444\,6$.

常规策略

此类题目可以通过四则混合运算,依次运算得到结果.

巧妙解法

(1) 原式 $= (1\,000 - 1) \times (1\,000 + 1)$

$= 1\,000^2 - 1$

$= 1\,000\,000 - 1$

$= 999\,999$.

(2) 原式 $= (65 + 35) \times (65^2 - 65 \times 35 + 35^2)$

$= (65 + 35) \times [(65 + 35)^2 - 3 \times 65 \times 35]$

$= 100 \times [100^2 - 3 \times (50 + 15)(50 - 15)]$

$= 100 \times [10\,000 - 3 \times (2\,500 - 225)]$

$= 100 \times (10\,000 - 3 \times 2\,275)$

$= 100 \times (10\,000 - 6\,825)$

$= 317\,500$.



(3) 原式 = $(3.777\ 7 + 1.222\ 3)^2 = 5^2 = 25$.



画龙点睛

在有理数的运算中,合理运用乘法公式是使运算简便的有利工具.

相关链接

1. 计算 $6\frac{3}{8} \times 7\frac{5}{8}$.
2. 计算 $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.
3. 计算 $\frac{135\ 792\ 468}{135\ 792\ 468^2 - 135\ 792\ 467 \times 135\ 792\ 469}$.
4. 计算 $\frac{(774^2 - 780)(774^2 + 1\ 545) \times 775}{771 \times 773 \times 776 \times 777}$.
5. 计算 $2 \times \left(1 - \frac{1}{1\ 995^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1\ 994^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1\ 993^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$.

1.4 合理整体代换

精选妙题

计算 $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$.

常规策略

我们可以采用通分的方法来解题.

巧妙解法

设 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = A$, 则

