改編

三S平面幾何學

趙型 編譯

新中國聯合出版社出版

改編

三S平面幾何學

趙型 編譯

新中國聯合出版社出版

改編三S平面幾何學

編譯者	趙型
出版者	新中國聯合出版社 上海：(9)石門二路41弄44號
發行者	通联書店 上海：(11)九江路295號
經售處	全國各大書店

一九五四年五月二版　3001—5000　定價 ¥ 7.400

編者自白

本書係以舊三S平面幾何爲藍本，編譯而成，妄參陋見，頗有增删，兹擇要說明如次。

1. 增列示範例題　初學幾何，對於習題之寫法，每感生疏，故本書於證明題，作圖題，計算題，及軌跡題等每種開始之前，先列示範例題，詳示寫法格式，使學者知所取法，不致疑難趦趄。

2. 增列共圓定理　三S幾何內，無共圓定理，但習題內往往又須用到，學者每感無所依據，故本書增列共圓定理於第二編作圖之前，使理論較爲周密。

3. 擴充軌跡教材　軌跡爲作圖之基礎，但初學者往往見而生畏，本書將基本軌跡，列爲定理，證法務求詳盡，雖嫌嚕嗦，但爲使初學者澈底瞭解起見，不得不然。

4. 提前極限原理　極限原理三S幾何內，擺在第五編，本書提前於第三編內卽行講到，卽以極限原理證不可通約情形，自信比近似證法較爲妥當。

5. 提前代數作圖法　三S書內，代數分析作圖法，擺在附錄，頗嫌太遲，本書將此法，移前在第三編內，學者可以多得練習之機會。

6. 删去附錄　三S書內附錄之對稱，極大極小，及應用題等，一律删去，以免與高中教材衝突。

其他說明之詳簡，習題之增減等，均屬細微末節，不再具論，自問該書優點，本書均儘量保存，不使喪失，希望改編以後，對學習效率，更可增進，但編者並非數學專家，只憑數年來做教書匠的一點粗淺實踐經驗，不自量力，侈言改編，貽笑大方，知所難免，敝帚自珍，大胆問世，邦人君子，幸垂教焉。

平面幾何學目次

緒論…………………………………………………… 1

第一編　直線形………………………………………22

第二編　圓 ………………………………………… 101

第三編　比例及相似形 …………………………… 166

第四編　面積………………………………………… 229

第五編　正多邊形，圓的度量…………………… 251

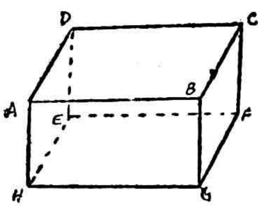
緒　論

1. 立體　空間的有限部分叫做**立體**.立體有三個向度,就是長,闊,和厚

我人所處的宇宙叫做空間,宇宙無窮無疆,故空間大而無限,一人一物,一草一木,各佔據空間的有限部分,叫做立體;人、物、草、木、叫做物質的立體,物質的立體佔據的空間有限部分,叫做幾何的立體.

立體的形狀大小各異,但不外向三個方向擴展,就是長,闊與厚,叫做立體的三個向度.

立體可用圖形表示之,如下圖:



2. 面　立體的界叫做**面**.面有二個向度,就是**長**和**闊**.

上圖內,$ABCD$, $BCFG$ 等都是面.面是立體的界,就是立體和立體的分界處,或交處,故面無厚.

3. 線　面的界叫做**線**.線祇有一個向度,就是**長**.

上圖內,AB,BC,DE……等都是線.線是面的界,就是面和面的分界處或交處,故線無厚亦無闊.

4. 點　線的界叫做**點**.點祇有位置而無向度.

上圖內,A,B,C,D,E……等都是點.點是線的界,就是線和線的分界處或交處,故點祇有位置而無長,闊,和厚.

點的表示和記法 點常以細點表示之，而以一大寫之字母記之，如點 A。

$$\cdot\ A$$

5. 直線 一線，若取其任意一部分，用任意放法，使其兩端落在任意另一部分上，而二部分完全重合的，叫做直線.

線的種類很多，最簡單而最重要的一種叫做直線，要試驗一線是否直線，須在線上截取任意部分，放在任意另一部分上，若二部分之各點，完全相合，叫做重合，則此線必爲直線，若此線有一部分不直時，此試驗必告失敗，因必有若干點不能落在另一部分上也.

如下圖所示：AB 爲直線，CD 則非直線.

直線的表示和記法 直線常以筆依直尺作細線表示之，而以線上二點之名稱記之，如直線 AB；有時亦可以一小寫之字母記一直線，如直線 l.

直線有時即簡稱線，過二點的直線簡稱二點的聯線.

6. 直線的研究

(a) **直線的長** 直線的全長是無限的，在直線上二指定點間的有限部分叫做線段或線分.線段或線分有時亦簡稱直線，直線的長即指線段或線分的長.

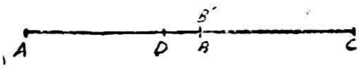
爲實用便利起見，直線的長恆用一一定的單位量之，如尺，寸等.

線段或線分的二頭定點叫做直線的二端.如上圖，A和 B 是

直線 AB 的二端.

(b) **直線相等或大小的比較**　把二線段的一個端點重合而置他端在同一方向,若另一端亦彼此重合, 則二線相等, 若另一端不重合,則另一端在外的線分較長.

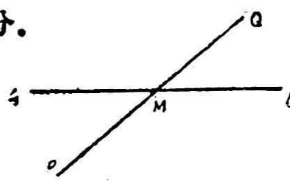
如圖:　$AB=AB'$, $AC>AB$, $AD<AB$.



附註:　相等的記號爲 $=$
　　　大於的記號爲 $>$
　　　小於的記號爲 $<$

(c) **中點與二等分**　若一點將一直線分成二相等線段時,此點叫做此直線的**中點**,此直線叫做被此點**平分**或**二等分**.過此點的直線也叫做二等分此直線.

如圖: 若 $AM=MB$, 則 M 叫做 AB 的中點. AB 叫做被 M 點二等分.



又若 PQ 過 M 點,則 PQ 也二等分 AB.

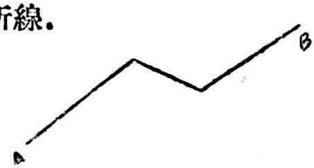
(d) **直線的加減**　把二線段的各一端重合, 而另一端向反對方向伸展,則不重合的二端間的長叫做二線段的**和**. 把二線段的各一端重合而另一端向同方向伸展, 則不重合二端間的長叫做二線段的**差**.

如圖:　$AB+BC=AC$,　$DE-DF=FE$.

(e) **直線的方向和延長** 直線 AB 的方向就是從 A 到 B 的方向，直線 BA 的方向就是從 B 到 A 的方向，延長 AB 就是由 A 過 B 點延長，延長 BA 就是由 B 過 A 點延長.

7. 折線 由幾個不同方向的線段，連接而成的線叫做**折線**.

如圖: AB 為折線.



8. 平面 一面，取面上任意二點而以直線聯結之，若此直線完全在此面之上，則此面叫做**平面**.

面的種類很多，最簡單而最重要的一種叫做平面，要試驗一面是否平面，須在面上任取二點，聯以直線，而視直線是否完全在此面之上，若此試驗永不失敗，則面為平面；若此面有高低不平處，則此試驗必將失敗，因直線過不平處時，必有若干點不在平面之上.

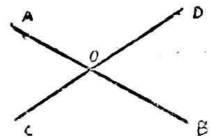
9. 幾何圖形 表示點，線，面，體等的圖形叫做**幾何圖形**. 在一個平面內的幾何圖形叫做**平面圖形**. 完全用直線做成的幾何圖形叫做**直線圖形**.

本書內所討論的圖形，都是平面圖形.

10. 幾何學 研究幾何圖形性質的科學叫做**幾何學**. 研究平面圖形的性質的叫做**平面幾何學**.

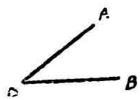
11. 交線 二直線過一公共點，叫做二線**相交**，公共點叫做**交點**.

如圖: 直線 AB 和 CD 相交於 O.

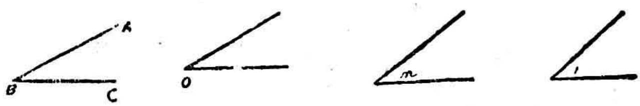


12. 角　二直線相交而止於一點，叫做角，交點叫做角的頂點.二直線叫做角的邊.

如圖：　AO, OB，相交於 O，成角 AOB，O為角頂，AO 及 OB 爲邊.



角的記號和記法：　角的記號爲$\angle$，角的記法有三種.



(a) 以頂點及二邊上各另一點記之，頂點須放在中間，如 $\angle ABC$.

(b) 以頂點的名字記之，如 $\angle O$.

(c) 以小寫字母或數字記之，如 $\angle m$, $\angle 1$.

13. 角的研究

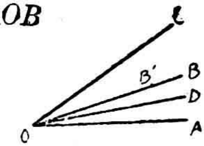
(a) **角的大小**　角的大小，以一邊繞頂點旋轉至與他邊重合爲止之旋轉量定之，與邊之長短無關.

(b) **二角相等或大小的比較**　二角放在一處，使頂點重合，一邊亦重合，而另一邊在重合邊的同側，若另一邊亦重合時，則二角相等；若另一邊不重合時，則另一邊在外側的是大角。

如圖：　$\angle AOB = \angle AOB'$

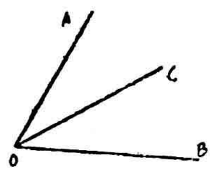
$\angle AOC > \angle AOB$

$\angle AOD < \angle AOB$



(c) **角的平分線**　若一線分一角成二相等的角時，此線叫做角的平分線，角二等分線，或分角線.

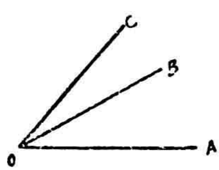
如圖：　若 $\angle AOC = \angle COB$，則 OC 叫做 $\angle AOB$ 的分角線.



(d) **角的加減**　把二個角放在一起，使角頂及一邊重合，若另一邊在重合邊的異側，其不重合的二邊所夾的角叫做二角的和；若另一邊在重合邊的同側，其不重合的二邊所夾的角叫做二角的差.

如圖：　$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

$\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$



14. 角的種類

(a) **平角**　角的二邊在一直線上而由頂點向反對方向伸張的，叫做平角.

平角的記號是 $st.\angle$

(b) **直角**　一個角等於平角的一半的，叫做直角。

直角的記號是 $rt.\angle$

(c) **銳角**　一個角小於一個直角的，叫做銳角.

(d) **鈍角**　一個角大於一個直角而小於一個平角的叫做鈍角.

銳角和鈍角統稱斜角.

平角　　直角　　銳角　　鈍角

15. 角的度量　角的大小，以直角爲單位計算之，但爲實用便利起見，往往以直角的$\frac{1}{90}$做單位，叫做度（符號爲°），一度的$\frac{1}{60}$叫做**分**，一分的$\frac{1}{60}$叫做**秒**（符號爲′及″）.

如 28 度 38 分 42 秒，寫作 $28°38'42''$.

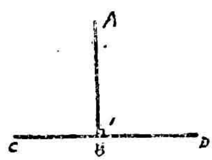
如上所述，一直角等於 $90°$，一平角等於 $180°$.

16. 垂直　兩直線相交而成直角，則兩直線叫做互相垂直，交點叫做垂足.　（二線垂直亦稱正交）

垂直的記號是$\perp$

如圖：　若 $\angle 1 = rt.\angle$;

則 $AB \perp CD$，B 爲垂足.

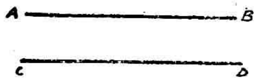


17. 平行　在同一平面上的二直線，向任意方向延長而永不相交的，叫做平行線.

依上定義，在一平面上的二直線，若不平行，則適當延長後必能相交.

平行的記號是//

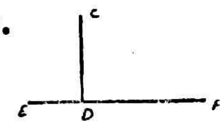
如圖: $AB//CD$



18. 點與點的距離 二點間聯線的長，叫做二點間的距離.

19. 點與直線的距離 從一點到一直線的垂直線的長，叫做此點與此直線的距離.

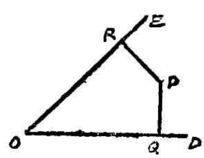
如圖: AB 的長叫做 A 與 B 的距離.



若 $CD\perp EF$，則 CD 的長叫做 C 與 EF 的距離.

20. 等距 二個距離相等時，叫做等距.

如圖: 若 $AB=AC$，則 A 與 B,C 等距.



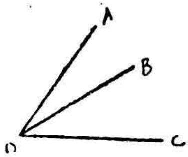
若$PQ\perp OD$，$PR\perp OE$，而$PQ=PR$；則P與OD OE等距.

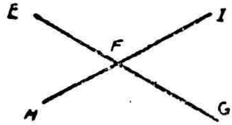
21. 鄰角 凡兩個角有公共頂點，且有一公共邊，而他兩邊在公共邊的異側，這二個角叫做鄰角.

22. 對頂角 凡兩個角有公共頂點，而一角的二邊爲他角的二邊過頂點的延長線時，這二個角叫做對頂角.

如圖: $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 爲鄰角.

$\angle EFH$ 及 $\angle IFG$ 爲對頂角.





23. 餘角　凡兩角的和,等於一個直角的,這二個角叫做互爲餘角,或一角爲他角的餘角.

24. 補角　凡兩角的和等於一個平角的，這二個角叫做互爲補角,或一角爲他角的補角.

二個相鄰又相補的角叫做鄰補角.

如圖:　如 $\angle 1+\angle 2=rt.\angle$.

則 $\angle 1$ 爲 $\angle 2$ 的餘角.

$\angle 2$ 爲 $\angle 1$ 的餘角.

如 $AB \perp BD$.

則 $\angle ABC$ 與 $\angle CBD$ 互爲餘角.

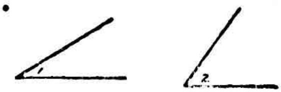
如 $\angle 3+\angle 4=st.\angle$.

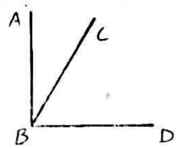
則 $\angle 3$ 爲 $\angle 4$ 的補角.

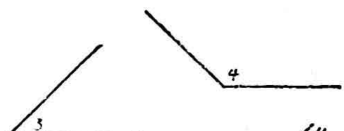
$\angle 4$ 爲 $\angle 3$ 的補角.

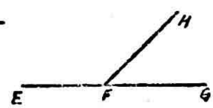
如 EFG 爲一直線

則 $\angle EFH$ 與 $\angle HFG$ 叫做鄰補角.





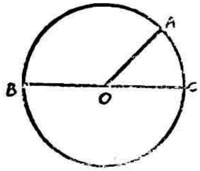




25.　曲線　無一部分爲直線的線,叫做曲線.

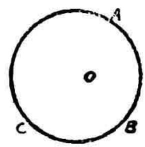
如圖:　HK 爲曲線.

26. 圓　在一平面內首尾相接的封閉曲線，而曲線上的各點皆與中央一點等距的,叫做圓.



與圓上各點皆等距的中央一點叫做**圓心**，如 O，自圓心到圓上任意點的聯線叫做**半徑**，如 OA. 過圓心而二端止於圓上的直線叫做**直徑**如 BC. 構成圓的封閉曲線的全長叫做**圓周**. 構成圓的曲線的一部份，叫做**圓弧**或**弧**

圓的記號和記法： 圓的記號為⊙，以圓規在代表平面的紙張或黑板上所作的封閉細線代表之，以圓心的點或圓上任意三點的名稱記之，如⊙O 或 ⊙ABC.



圓弧的記號和記法： 圓弧的記號為 ⌒，以圓弧二端的二點記之. 如 $\overparen{AB}$.

27. 名詞的解釋：

(a) **定義** 解釋一個名詞的含義的敍述，叫做**定義**.

凡與定義所述的情形完全相同的，方才可以叫做這個名詞，這叫做**定義的必須性**；凡叫做這個名詞的，必含有定義所述的情形，這叫做**定義的必然性**.

以上各節(從1-26)及本節，都是定義.

(b) **公理** 公認為眞確而不必證明的敍述，叫做**公理**.

適用於一般數學的公理，叫做**普通公理**.

祗用於幾何學的公理，叫做**幾何公理**.

(c) **定理** 必須經過證明而確定成立的敍述，叫做**定理**.

定理之易從其他定理推得的叫做**系**.

(d) **問題** 要求解決的一種敍述叫做**問題**.

問題的求計算的叫做**計算題**.

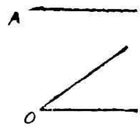
問題的求作圖的叫做**作圖題**.

(e) **命題** 定理及問題的總稱叫做**命題**.

28. 普通公理.

(a) 等量公理.

(1) 同量恒等.



如:　$3=3$

$AB=AB$

$\angle O=\angle O$

(2) 等於同量的量相等,等於等量的量相等.

如 $a=b$,又 $c=b$;則 $a=c$,叫做等於同量的量相等.

如 $a=b, c=d$ 而 $b=d$;則 $a=c$,叫做等於等量的量相等.

(3) 等量加等量,其和相等.

如 $a=b, c=d$;則 $a+c=b+d$.

(4) 等量減等量,其差相等.

如,$a=b, c=d$;則 $a-c=b-d$.

(5) 等量之同倍量相等.

如 $a=b$;則 $2a=2b, ca=cb$.

(6) 等量之同分量相等.

如 $a=b$; 則 $\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}b$, $\frac{a}{d}=\frac{b}{d}$.

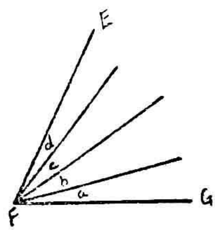
(7) 等量之同次方積或同次正方根皆相等.

如 $a=b$;則 $a^2=b^2, a^3=b^3, a^n=b^n$.

如 $a=b$;則 $\sqrt{a}=\sqrt{b}, \sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}, \sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$.

(8) 全量等於其各分量之和.

如: $AD=AB+BC+CD$.



$\angle GFE=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d$.

(b) 不等量公理.

(1) 若三量中，第一量大於第二量，第二量大於第三量，則第一量大於第三量。

如 $a>b, b>c$; 則 $a>c$.

(2) 等量加不等量，其和不等，大者仍大.

如 $a=b, c>d$; 則 $a+c>b+d$.

(3) 從不等量減去等量，其差不等，大者仍大.

如 $a>b, c=d$; 則 $a-c>b-d$.

(4) 從等量減去不等量，其差不等，減大量者餘小。

如 $a=b, c>d$; 則 $a-c<b-d$.

(5) 不等量加不等量，大量與大量相加，其和不等，大者仍大.

如 $a>b, c>d$; 則 $a+c>b+d$.

(6) 自不等量減不等量，自大量減去小量，其差不等，大者仍大.

如 $a>b, c<d$; 則 $a-c>b-d$.

(7) 不等量的同倍量或同分量不等，大者仍大.

如 $a>b$, 則 $2a>2b, ma>mb$.

如 $a>b$, 則 $\frac{1}{2}a>\frac{1}{2}b$, $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$. (m, n須爲正數)

(8) 正不等量的同次方積，或同次正方根亦不等，大者仍大.

如 $a>b$, 則 $a^2>b^2$, $a^3>b^3$.

如 $a>b$, 則 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$.

(9) 全量大於其任何部分量.

如 $AB>AC$, $\angle DEF>\angle DEG$.