

庫文技科文正

冊手用應式公械機

編譯會員委譯編局書文正

行印局書文正

23-61
4

庫文技科文正

冊手用應式公械機

編譯會員委譯編局書文正

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

3400
行印局書文正

原序

要說機械工業是工業的基礎，當不敢誇大其詞，唯其如此，從事機械工業的技術人員之培養，乃成為斯界熱切盼望的課題。我國的機械技術進步神速，但是，無論如何必須多多瞭解較基礎性的領域。

我們這幾個同仁，在一次聚會促膝談心之餘，曾經檢討過機械技術之最基礎的是什麼？如何學習？等許多問題。當時，有人提議為了要養成解決問題之能力，最重要的是能把公式運用自如。以此為契機，同仁乃以公式之有效運用為着眼點，去無存精，編纂本書，俾經常利用。

本書之編纂，我們特別留意下列幾點。

- (一) 關於公式之選定，曾經考慮以高工機械科學生學習之程度，並着重於重要性和必需性。
- (二) 公式首考慮到有機性的關聯性，做有系統的編排。
- (三) 也考慮到將一個公式予以變形，俾收有效運用之效
- (四) 關於列題則選用能有效運用公式而也能養成計算能力的適當的例題。

本書之執筆同仁，皆在高級等工業學校長年為培養技術人員而不遺餘力的名師，編者深信透過他們的經驗，本書將有助於各位讀者對機械公式有更深一層瞭解與進步，則讀者幸甚。

編者謹識

數學符號

符 號	意 義	符 號	意 義
+	加, 正	$n!$	n 階層
-	減, 負	$ x $	x 之絕對值
$\pm$	加或減, 正或負	$ $	行列式, 絕對值
$\times$	乘	Σ	總和
$\div$	除	Π	相乘積
$=$	等於	e, e	自然對數之底
$\neq$	不等於	i, j	虛數之單位
$\approx$	幾乎等於	π	圓周率
$>$	大於	$()$	小括弧
$<$	小於	$\{ \}$	中括弧
$\nlessgtr$	不大於	$[]$	大括號
$\nlessgtr$	不小於	$\bar{a}$	a 之平均值
$\geq$	大於或等於	%	百分比
$\leq$	小於或等於	G.C.M.	最大公約數
$\gg$	非常大於	L.C.M.	最小公倍數
$\ll$	非常小於	$\angle R$	直角
$\equiv$	經常等於	$\parallel$	平行
$\nlessgtr$	經常不等於	∞	相似
:	比	$\therefore$	故
$\propto$	成比例	$\because$	因爲
∞	無限大	$^{\circ}$	度
x^n	x 之 n 次方	θ'	分
$\sqrt{x}$	x 之平方根	θ''	秒
$\sqrt[n]{x}$	x 之 n 次方根	rad	弧度

希臘文

α	alpha	ι	iota	ρ	rho
β	beta	κ	kappa	σ	sigma
γ	gamma	λ	lambda	τ	tau
δ ∂	delta	μ	mu	υ	upsilon
ϵ	epsilon	ν	nu	ϕ	phi
ζ	zeta	ξ	xi	χ	chi
η	eta	$\omicron$	omicron	ψ	psi
θ	theta	π	pi	ω	omega

機械公式應用手冊

目 錄

1. 二力之合成	1	29. 轉矩與旋轉運動	29
2. 矩	2	30. 旋轉運動之功、動力、能	30
3. 多數力之合成	3	31. 滾動摩擦	31
4. 平行力之合成	4	32. 單振動（調和振動）	32
5. 重心與圖心	5	33. 單擺	33
6. 作用於一點上的力之均衡	6	34. 彈簧擺	34
7. 着力點不同的力之均衡	7	35. 扭轉擺	35
8. 構架之解法	8	36. 垂直應力	36
9. 滑動摩擦	9	37. 剪應力	37
10. 速度與相對速度	10	38. 應變	38
11. 等加速運動	11	39. 彈性係數	39
12. 落體運動	12	40. 蒲松氏比	40
13. 拋物線運動	13	41. 應力集中	41
14. 角運動	14	42. 熱應力	42
15. 力與運動之關係	15	43. 容許應力與安全係數	43
16. 向心力與離心力	16	44. 承受內壓的薄壁圓筒	44
17. 動量與衡量	17	45. 承受內壓的厚壁圓筒	45
18. 動量不滅定律與衝突	18	46. 彈性應變能	46
19. 功	19	47. 衝擊負荷	47
20. 動力	20	48. 梁的支點之反力	48
21. 能量	21	49. 梁之剪力與彎曲矩	49
22. 能與功之關係	22	50. 承受着集中負荷的懸臂梁	50
23. 功之原理	23	51. 承受着勻佈負荷的懸臂梁	51
24. 斜面	24	52. 承受着勻佈負荷的兩端支持梁	52
25. 螺旋	25	53. 承受着勻佈負荷的兩端支持梁	53
26. 輪軸	26	54. 承受着數個負荷之梁	54
27. 滑輪	27		
28. 慣性矩	28		

55. 斷面二次矩與斷面係數	55	85. 皮帶速度較小時之張力	85
56. 彎曲應力	56	86. 皮帶傳達動力與強度	86
57. 梁之撓曲	57	87. 扁皮帶傳動裝置之設計	87
58. 平等強度之梁	58	88. 三角皮帶之傳達動力	88
59. 歐拉公式	59	89. 鏈齒輪尺寸	89
60. 朗肯之公式	60	90. 鏈之鏈桿數與傳達動力	90
61. 扭轉 (其一)	61	91. 滾子鏈傳動裝置之設計	91
62. 扭轉 (其二)	62	92. 摩擦傳動裝置	92
63. 組合應力 (其一)	63	93. 單楔與徑節	93
64. 組合應力 (其二)	64	94. 法節	94
65. 組合應力 (其三)	65	95. 標準齒輪尺寸	95
66. 螺釘之配合部長度與面壓力	66	96. 清角限界齒數	96
67. 螺栓直徑	67	97. 移位係數與移位量	97
68. 壓力容器與管	68	98. 移位齒輪之尺寸	98
69. 承受彎曲的軸徑	69	99. 移位齒輪之尺寸 (續)	99
70. 承受扭轉的軸徑	70	100. 跨齒齒厚	100
71. 同時承受彎曲與扭轉的軸徑	71	101. 路易士公式	101
72. 傳動軸之徑與跨距	72	102. 面壓強度與旋轉力	102
73. 摩擦離合器	73	103. 螺旋齒輪之尺寸	103
74. 徑向端軸頸之設計	74	104. 螺旋齒輪之相當齒數與強度	104
75. 徑向中間軸頸之設計	75	105. 斜齒輪之圓錐角	105
76. 視摩擦熱而定的軸承大小	76	106. 直齒斜齒輪之尺寸	106
77. 推力軸頸之軸承壓力與摩擦阻力矩	77	107. 螺輪之速比	107
78. 薄軸頸之設計	78	108. 蝸齒輪尺寸 (之一)	108
79. 套環軸頸之設計	79	109. 蝸齒輪尺寸 (之二)	109
80. 四節曲柄回轉機構	80	110. 齒輪系之速比	110
81. 往復滑件曲柄	81	111. 行星齒輪組	111
82. 帶之速比, 長度, 掛帶中心角	82	112. 差速齒輪組	112
83. 皮帶輪各部尺寸	83	113. 棘輪	113
84. 帶之張力	84	114. 單塊狀剎車	114
		115. 帶剎車 (之一)	115
		116. 帶剎車 (之二)	116
		117. 螺旋彈簧	117

118. 三角板片彈簧.....	118	141. 帕爾登水輪機.....	141
119. 疊板彈簧.....	119	142. 法氏水輪機.....	142
120. 造模砂之通風度.....	120	143. 泵之輸出與效率.....	143
121. 熔化金屬給鑄模帶來的壓力	121	144. 離心泵.....	144
122. 毛坯之大小.....	122	145. 熱力學之第一定律.....	145
123. 使用鋼球規測定內徑.....	123	146. P - V 線圖與焓.....	146
124. 推拔栓及推拔孔之測定.....	124	147. 理想氣體之狀態式.....	147
125. 利用三線法測定有效徑.....	125	148. 理想氣體之狀態變化(之一)	148
126. 壓力強度.....	126	149. 理想氣體之狀態變化(之二)	149
127. 液體壓力計.....	127	150. 多變變化.....	150
128. 水壓機之原理(巴斯噶定理)	128	151. 理想氣體之混合.....	151
129. 作用於壁面的壓力.....	129	152. 熱力學之第二定律.....	152
130. 連續性原理.....	130	153. 蒸汽之狀態量.....	153
131. 柏努利定理.....	131	154. 朗肯循環.....	154
132. 托氏定律.....	132	155. 蒸汽流之基礎公式.....	155
133. 雷諾數.....	133	156. 熱交換器.....	156
134. 因摩擦而引起的損失.....	134	157. 燃燒.....	157
135. 管內諸損失.....	135	158. 燃燒裝置.....	158
136. 流量測定(之一).....	136	159. 鍋爐之性能.....	159
137. 流量測定(之二).....	137	160. 汽輪機之作用.....	160
138. 噴流作用於物體之力(之一)	138	161. 汽輪機之性能.....	161
139. 噴流作用於物體之力(之二)	139	162. 內燃機之基準循環.....	162
140. 水輪機之特性.....	140	163. 內燃機之輸出與效率.....	163
		附錄.....	164

1. 二力之合成

[1] 二力在角 α 交叉時(見圖1)

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad [\text{kg}] \quad (1)$$

$$\tan \phi = \frac{F_2 \sin \alpha}{F_1 + F_2 \cos \alpha} \quad (2)$$

ϕ : 合力 R 和力 F_1 所形成之角

[2] 二力交叉成直角時(見圖2)

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad [\text{kg}] \quad (3)$$

$$\tan \phi = \frac{F_2}{F_1} \quad (4)$$

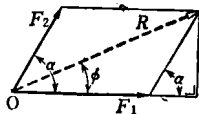


圖1

【例題】試求30 kg與40 kg 二力形成 60° 而作用於一點時之合力。

【解答】將 $F_1 = 30 \text{ kg}$, $F_2 = 40 \text{ kg}$ 代入於公式(1), (2), 則

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \times \cos 60^\circ} \\ = \sqrt{3700} = 60.8 \text{ kg}$$

$$\tan \phi = \frac{40 \times \sin 60^\circ}{30 + 40 \times \cos 60^\circ} = \frac{40 \times 0.866}{30 + 40 \times 0.5} = 0.693$$

$\therefore \phi = 34^\circ 45'$ (和30 kg之力所形成之角)

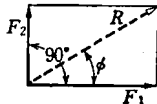


圖2

【例題】將50 kg之力以水平施於水平面上重量100 kg的物體時, 則物體有何力作用於該水平面上?

【解答】該面承受之力如圖3所示, 是100 kg與50 kg之合力 R 。將 $F_1 = 100 \text{ kg}$, $F_2 = 50 \text{ kg}$ 代入於公式(3), (4)求之。

$$R = \sqrt{100^2 + 50^2} = 112 \text{ kg}$$

$$\tan \phi = \frac{50}{100} = 0.5$$

$\therefore \phi = 26^\circ 34'$

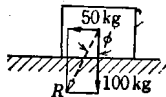


圖3

【例題】如圖4所示, 將二條纜索繫於船上, 互相以 120° 之角度, 以15 kg之力拉纜索, 試問該船被多大之力拉至哪一方向?

【解答】將該船拉至進行方向之力是二力之合力。將 $F_1 = F_2 = 15 \text{ kg}$,

$\cos \alpha = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -0.5$ 代入於公式(1), 則

$$R = 15^2 + 15^2 - 2 \times 15 \times 15 \times 0.5$$

$$= 15 \text{ kg}$$

合力之二力相等, 故成其方向在所夾住之角 120° 之二等分線上。

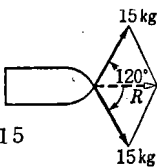


圖4

MEMO 二力不作用於一點而作用於二點時, 將二力移動至各作用線之交叉點, 應用公式(1), (2)求出。

2. 矩

[1] 力矩 (見圖 1(a))

$$M = Fl = Fl' \cos \theta$$

$$= Fcc. \theta l' \quad [\text{kg cm}] \quad (1)$$

[2] 偶力矩 (見圖 1(b))

$$M = Fd \quad [\text{kg cm}] \quad (2)$$

[3] 矩之合成

$$M = \sum M_i = \sum F_i l_i \quad (= \sum F_i d_i) \quad (3)$$

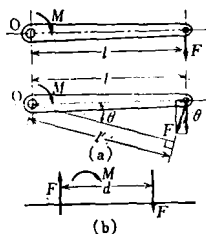


圖 1

【例題】試就圖 2，求軸周圍之矩。

【解】將 $F = 15 \text{ kg}$, $l = 20 \times \cos 30^\circ + 10 = 27.32 \text{ cm}$ 代入於

公式(1)，則

$$M = 15 \times 27.32 = 409.8 \text{ kg cm}$$

(左轉)

【例題】試就圖 3 求軸周圍之矩。

【解】設右轉之矩為 (+)，則應用公式(1)，(3)，

$$M = 10 \times 50 \times \cos 60^\circ - 30 \times 30 - 20 \times 20 + 10 \times 40 = -650 \text{ kg cm} \quad (\text{左轉})$$

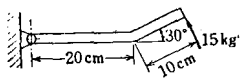


圖 2

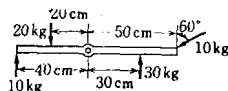


圖 3

【例題】如圖 4 所示，有四力作用於正方形的零件。這時候的軸 O 承受何力之作用？

【解】以四力構成着 100 kg 與 50 kg 之二力偶。應用公式(2)，(3)，

$$M = 100 \times 10 - 50 \times 20 \times \cos 45^\circ$$

$$= 293 \text{ kg cm} \quad (\text{右轉力偶})$$

【例題】如圖 5 所示，力 F 在離軸僅 l 之位置發揮作用時，軸所承受的力之作用如何？

【解】即使大小相同而方向相反的二力在一點上發揮作用，在力學上來說，其結果和二力不發揮作用時相同，故認為如圖 5 所示，使和 F 相等的二力 F'，F' 在軸發揮作用。軸由於 F 與 F' 而承受 $M = F \cdot l$ 的力偶矩，而且也和 F 同方向承受力 F' ($= F$)。

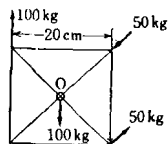


圖 4

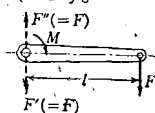


圖 5

MEMO

① Σ 是表示總和的符號。如果將公式(3)寫得更詳細，則

$$\sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = \sum F_i l_i = F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + \dots$$

② 力偶矩是旋轉之原動力。當力偶作用於物體時，不論將軸裝於該物體之任何部位，使物體在該軸周圍旋轉的能力均等。故力偶矩並不加力矩之有中心。

3. 多數力之合成

[1] 力作用於一點 (見圖 1)

該點周圍之合成矩 $M_i = 0$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_i \cos \alpha_i)^2 + (\sum F_i \sin \alpha_i)^2} \quad [\text{kg}] \quad (1)$$

$$\tan \phi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sum F_i \cos \alpha_i}{\sum F_i \sin \alpha_i} \quad (2)$$

[2] 着力點不同 (見圖 2)

可應用公式(1), (2)求作用於某點 O 的合力 R 。

$$M = \sum M_i$$

(參閱 2. 矩, 例 5)

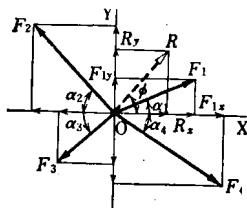


圖 1

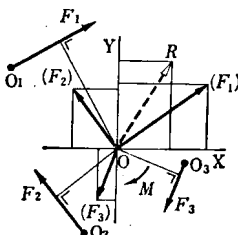


圖 2

【例題】試求作用於一點的後列四力之合力。

$F_1 = 7 \text{ kg}$, $F_2 = 6 \text{ kg}$, $F_3 = 5 \text{ kg}$, $F_4 = 4 \text{ kg}$, $\angle F_1 F_2$ (F_1 與 F_2 所形成之角) $= 90^\circ$,
 $\angle F_2 F_3 = 60^\circ$, $\angle F_3 F_4 = 60^\circ$

【解】依照圖 3, 畫 $X Y$ 正交軸, 使 F_1 重疊於 X 軸, 以圖示各力。

$$\begin{cases} F_1 x = -F_3 \cos 30^\circ = -5 \times 0.866 \\ \quad = -4.33 \text{ kg} \\ F_3 y = F_3 \sin 30^\circ = 5 \times 0.5 \\ \quad = 2.5 \text{ kg} \end{cases}$$

應用公式(1)

$$\begin{cases} R_x = 7 + 0 - 4.33 - 3.46 = -0.79 \text{ kg} \\ R_y = 0 + 6 + 2.5 - 2 = 6.5 \text{ kg} \end{cases}$$

$$\therefore R = \sqrt{0.79^2 + 6.5^2} = \sqrt{42.87} = 6.55 \text{ kg}$$

$$\tan \phi = -\frac{6.5}{0.79} = -8.23$$

$\therefore \phi = 83^\circ$ (因 $\tan \phi$ 之結果為負, 故比 $-X$ 軸更向 Y 軸)

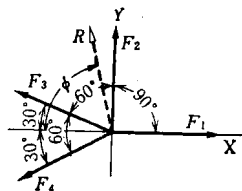


圖 3

MEMO 將 $X Y$ 軸予以重疊的力可以不分解。

4. 平行力之合成

[1] 同向的二平行力之合成 (見圖 1)

$$R = F_1 + F_2$$

$$l_1 = l \frac{F_2}{F_1 + F_2} \quad l_2 = l \frac{F_1}{F_1 + F_2}$$

l_1 : 合力 R 與力 F_1 所作用的作用線間之距離 [cm]

l_2 : 合力 R 與力 F_2 所作用的作用線間之距離 [cm]

l : 力 F_1 與力 F_2 所作用的作用線間之距離 [cm]

[2] 反向的二平行力之合成 (見圖 2)

$$R = F_1 - F_2$$

$$l_1 = l \frac{F_2}{F_1 - F_2} \quad l_2 = l \frac{F_1}{F_1 - F_2}$$

合力 R 在大的力之外側為同向。

[3] 多數的平行力之合成 (見圖 3)

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = \sum F_i$$

$$l = \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + \cdots}{R}$$

$$= \frac{\sum F_i l_i}{\sum F_i}$$

各平行力 [kg]

任意之點 O 至力 F_i 為止之距離 [cm]

點 O 至合力 R 為止之距離 [cm]

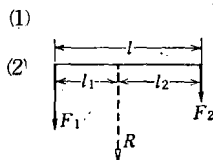


圖 1

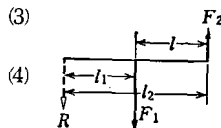


圖 2

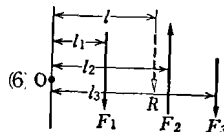


圖 3

【例題】 平行的二力 40kg 與 10kg 以 5cm 之距離互相作用。試求二力為同向時與反向時之合力。

【解】 二力同向時，將 $F_1 = 40\text{ kg}$, $F_2 = 10\text{ kg}$ 代入於公式(1)

，(2)。二力為反向時，則代入於公式(3)，(4)。

$$R = 40 + 10 = 50\text{ kg}$$

$$l_1 = 5 \times \frac{10}{40+10} = 1\text{ cm}$$

$$R = 40 - 10 = 30\text{ kg}$$

$$l_2 = 5 \times \frac{10}{40-10} = 1.67\text{ cm}$$

【例題】 試求依圖 4 發揮作用的四平行力之合力。

【解】 力以向下為正，而矩則以右轉為正。將 $F_1 = 50\text{ kg}$, $F_2 = -80\text{ kg}$, $F_3 = 70\text{ kg}$,

$F_4 = 40\text{ kg}$, $l_1 = 0$, $l_2 = 20\text{ cm}$, $l_3 = 30\text{ cm}$, $l_4 = 50\text{ cm}$ 代入於公式(5)，(6)

$$R = 50 - 80 + 70 + 40 = 80\text{ kg (向下)}$$

$$l = \frac{-80 \times 20 + 70 \times 30 + 40 \times 50}{80} = \frac{2500}{80} = 31.3\text{ cm}$$

因合力之矩 2500kgcm 是右轉，故合力 R 就作用於比 F_1 更右邊 31.3cm 之處。

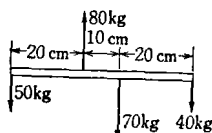


圖 4

5. 重心與圖心

[1] 重心之位置 (見圖 1)

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{W} \quad \bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{W} \quad (1)$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$: 重心之座標 [cm], x_i , y_i : 各部份之座標 [cm]

w_i : 各部份之重量 [kg], W : 物體之重量 [kg]

[2] 圖心之位置

$$\bar{x} = \frac{\sum a_i x_i}{A} \quad \bar{y} = \frac{\sum a_i y_i}{A} \quad (2)$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$: 圖心之座標 [cm], x_i , y_i : 各部份之座標 [cm], a_i : 各部份之面積 [cm²]

A : 全面積 [cm²], $a_i x_i$, $a_i y_i$: 各部份之面積矩 [cm³]

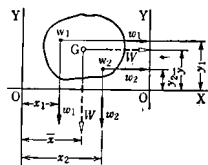


圖 1

【例題】有一個使用勻質的材料製成的形狀如圖 2 (a) 所示的零件。假設其厚度均勻，則其重心之位置在何處？

【解】將圖 2 (a) 之零件，依照 (b) 所示分割為 I、II、III 三個部份。因

材料勻質而厚度均勻，故重心和將厚度剖成一半的面之圖心一致。因形狀左右對稱，故圖心就在中心線上。根據圖 2 (b)，將 $a_1 = 10 \times 20 = 200 \text{ cm}^2$, $a_2 = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2$, $a_3 = 10 \times 30 = 300 \text{ cm}^2$, $A = 200 + 200 + 300 = 700 \text{ cm}^2$, $y_1 = 10 + 20 + 5 = 35 \text{ cm}$, $y_2 = 10 + 10 = 20 \text{ cm}$, $y_3 = 5 \text{ cm}$ 代入於公式 (2)

$$\bar{y} = \frac{200 \times 35 + 200 \times 20 + 300 \times 5}{700} = \frac{12500}{700} = 17.9 \text{ cm}$$

【例題】有一依圖 3 所示開了圓孔的正方形的薄板。試求此圖心之位置。

【解】依照圖 3 取 X Y 軸。圖心在 X 軸上。圓圓地缺損的部份之面積矩須以負予以計算。將 $a_1 x_1 = 100 \times 100 \times 50 = 500000 \text{ cm}^3$, $a_2 x_2 = -\pi \times 20^2 \times (50 - 20) = -37700 \text{ cm}^3$, $A = 100 \times 100 - \pi \times 20^2 = 8744 \text{ cm}^2$ 代入於公式 (2)，

$$\bar{x} = \frac{500000 - 37700}{8744} = \frac{462300}{8744} = 52.8 \text{ cm}$$

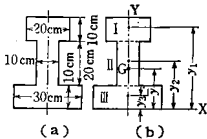


圖 2

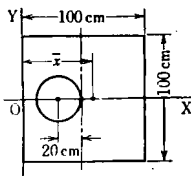


圖 3

MEN O

①公式(1), (2)的 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 唸如 x bar, y bar。

②認為物體是簡單的形狀部份之和或差時，首先須各別求各部份的圖心（圖心），認為各部份之重量（面積）以正或負落在各點上，決定全體的重心（圖心）之位置，做為其合力之位置。

6. 作用於一點上的力之均衡

〔1〕作用於一點上的力之均衡條件

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots = \Sigma F_{ix} = 0 \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots = \Sigma F_{iy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

F_{ix}, F_{iy} : 以着力點為原點的 X Y 正交軸上之各力之分力 [kg]

R_x, R_y : 各力的 X Y 分力之總和

〔2〕三力之均衡 (拉密的定理) (見圖 1)

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3} \quad (2)$$

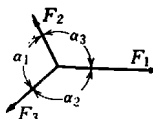


圖 1

【例題】依圖 2 所示，將二條繩子繫於重量 50 kg 的物體之一點，分別向和水平形成 $60^\circ, 45^\circ$ 的方向拉下去，把物體掛起來。試求這時候的二條繩子之張力。

【解】假設繩子的張力為 T_1, T_2 ，物體的重量為 W ，則 T_1, T_2, W 之三力呈均衡。故應用公式(1)，可得下式的均衡之公式。

$$R_x = T_{1x} + T_{2x} + W_x = 0 \cdots \cdots (1) \quad R_y = T_{1y} + T_{2y} + W_y = 0 \cdots \cdots (2)$$

$$T_{1x} = T_1 \cos 45^\circ = 0.707 T_1, T_{1y} = T_1 \sin 45^\circ = 0.707 T_1, T_{2x} = -T_2 \cos 60^\circ = -0.5 T_2,$$

$$T_{2y} = T_2 \sin 60^\circ = 0.866 T_2, W_x = 0, W_y = -50 \text{ kg}$$

$$\therefore 0.707 T_1 - 0.5 T_2 = 0 \cdots \cdots (3) \quad 0.707 T_1 + 0.866 T_2 - 50 = 0 \cdots \cdots (4)$$

$$(4) - (3) \quad 1.366 T_2 = 50 \quad \therefore T_2 = 36.6 \text{ kg}$$

$$\text{代入於(3)} \quad T_1 = 25.9 \text{ kg}$$

【例題】使用拉密定律試解前題。

【解】將 $F_1 = W = 50 \text{ kg}$, $F_2 = T_1$, $F_3 = T_2$, $\sin \alpha_1 = \sin \{180^\circ - (60^\circ + 45^\circ)\} = \sin 75^\circ = 0.966$, $\sin \alpha_2 = \sin (60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ = 0.5$, $\sin \alpha_3 = \sin (45^\circ + 90^\circ) = \cos 45^\circ = 0.707$ 代入於公式(2)，則

$$\frac{50}{0.966} = \frac{T_1}{0.5} = \frac{T_2}{0.707}$$

據此。 $T_1 = 25.9 \text{ kg}$, $T_2 = 36.6 \text{ kg}$

【例題】圖 3 之各力呈均衡。試求繩子的張力 T 和水平形成之角 θ 。

【解】根據公式(1)，可得下列的均衡之公式。

$$R_x = 4 \cos 30^\circ - T \cos \theta = 0 \cdots \cdots (1)$$

$$R_y = 4 \sin 30^\circ + T \sin \theta - 20 = 0 \cdots \cdots (2)$$

根據①, ②, $T \cos \theta = 3.46$, $T \sin \theta = 18$

$$T = \sqrt{(T \cos \theta)^2 + (T \sin \theta)^2} = \sqrt{3.46^2 + 18^2} = 18.3 \text{ kg}$$

$$\tan \theta = \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{18}{3.46} = 5.2$$

$$\therefore \theta = 79^\circ 10'$$

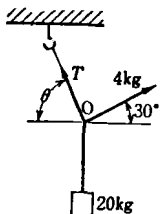


圖 3

MEMO 同一平面上的三力，在三力為平行或集中於一點時，能夠均衡。

7. 着力點不同的力之均衡

[1] 着力點不同的力之均衡條件

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots = \sum F_{ix} = 0 \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots = \sum F_{iy} = 0 \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 + \cdots = \sum M_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

F_{ix} , F_{iy} : 任意的 X Y 正交軸方向的各力之分力 [kg], R_x , R_y : 各自的 X Y 分力之總和, M_i : 任意的點之周圍各力矩 [kg m], M : 任意的點之周圍各力矩之總和。

【例題】依圖 1 所示，將 40kg 負荷施於由銷與繩支承成平行的棍子之端時，試求繩之張力。

【解】作用於該棍之力，是負荷 40kg 與繩張力 T 與銷的反力之三力，而這三力呈均衡。此題所要求的是張力 T 而已，故根據 銷周圍之二力矩之均衡，可以解答。

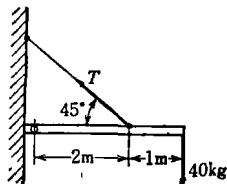


圖 1

將 $M_1 = 40 \times 3 = 120 \text{ kg m}$, $M_2 = -T \times \sin 45^\circ \times 2 = -1.4 T \text{ kg m}$ 代入於公式(1)，則

$$M = 120 - 1.4 T = 0$$

將其解之 $T = 85.7 \text{ kg}$

【例題】依圖 2 所示，有 200kg, 150kg 兩負荷作用於長 2m 的水平梁。須將那一支點設於何處，左端的支點之反力才能夠達到 50kg？又試求該支點之反力大小？

【解】假設 R 是所求之反力，而該反力位於離左端 l 之位置。考慮垂直力與 O 點周圍之矩之均衡，應用公式(1)，

$$R_y = 50 - 200 - 150 + R = 0 \cdots \cdots (1)$$

$$M = -Rl + 150 \times 1.5 + 200 \times 1 = 0 \cdots \cdots (2)$$

根據(1), $R = 300 \text{ kg}$

根據(2) $l = 1.42 \text{ m}$

【例題】試就圖 3，求銷之反力 P 與繩之張力 T 。

【解】圖 3 上， P , W , T 三力呈均衡。

應用公式(1): $R_x = P_x - T \cos 30^\circ = 0 \cdots \cdots (1)$

$$R_y = P_y - 20 + T \sin 30^\circ = 0 \cdots \cdots (2)$$

$$M = -T \sin 30^\circ \times 2.5 + 20 \times 1.5 = 0 \cdots \cdots (3)$$

根據③

$$2.5 T \sin 30^\circ = 30 \therefore T = 24 \text{ kg}$$

根據①

$$P_x = T \cos 30^\circ = 24 \times 0.866 = 20.8 \text{ kg}$$

根據②

$$P_y = 20 - T \sin 30^\circ = 20 - 24 \times 0.5 = 8 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \therefore P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{20.8^2 + 8^2} = \sqrt{495} \\ &= 22.3 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{8}{20.8} = 0.384 \therefore \theta = 21^\circ$$

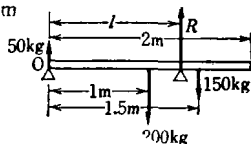


圖 2

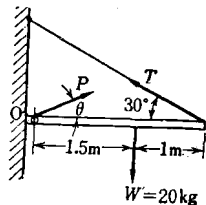


圖 3

8. 構架之解法

[1] 接合點之方法 (求作用於全部構件之力)

按每一節點。適當應用和由構件作用的力均衡的力均衡條件，算出作用於各構件之力。

⇨ 參閱 6. 作用於一點的力之均衡

$$R_x = \Sigma F_{ix} = 0 \quad R_y = \Sigma F_{iy} = 0 \quad (1)$$

[2] 切斷法 (求作用於一部構件之力)

以假想方法考慮將構架予以切斷，對於作用於該部份的外力和由於構件而形成的力適應均衡之條件，算出作用於構件之力。

⇨ 參閱 7. 着力點不同的力之平衡

$$R_x = \Sigma F_{ix} = 0 \quad R_y = \Sigma F_{iy} = 0 \quad M = \Sigma M_i = 0 \quad (2)$$

【例題】試求作用於如圖 1 所示的構架的各構件之力。

【解】將作用於各構件之力，譬如說按 F_{AC} 表示作用於 AC 構

件之力。利用 A 點周圍的矩之均衡，

$$-R_B \times 4 + 2000 \times 3 + 2000 \times 2 + 1000 \times 1 = 0$$

$$\therefore R_B = 11000 \quad \therefore R_B = 2750 \text{ kg}$$

$$R_A = 2000 + 2000 + 1000 - R_B = 2250 \text{ kg}$$

在節點 A, $F_{AD} \sin 60^\circ = R_A \quad \therefore F_{AD} = 2600 \text{ kg}$ (壓縮)

$$F_{AC} = F_{AD} \cos 60^\circ = 1300 \text{ kg} \text{ (拉力)}$$

在節點 B, $F_{BE} \sin 60^\circ = R_B \quad \therefore F_{BE} = 3180 \text{ kg}$ (壓縮)

$$F_{BC} = F_{BE} \cos 60^\circ = 1590 \text{ kg} \text{ (拉力)}$$

在節點 D, F_{DC} , F_{DE} 無法以視察知道其方向，故須依圖所示假定為拉力予以計算。

$$F_{DE} + F_{DC} \cos 60^\circ + 2600 \cos 60^\circ = 0 \quad \text{.....①}$$

$$1000 + F_{DC} \sin 60^\circ - 2600 \sin 60^\circ = 0 \quad \text{.....②}$$

根據② $F_{DC} = 1440 \text{ kg}$ (拉力)

根據① $F_{DE} = -2020 \text{ kg}$ (壓縮)

在節點 E $2000 + F_{EC} \sin 60^\circ - 3180 \sin 60^\circ = 0$

$$F_{EC} = 870 \text{ kg} \text{ (拉力)}$$

【例題】試就前題，求作用於構件 DE, DC, AC 之力。

【解】以圖 2 之鏈線將構架切斷，考慮五力之均衡。取 C 點周圍之矩，

$$1000 \times 1 - 2250 \times 2 - F_{DE} \times 2 \sin 60^\circ = 0$$

$$\therefore F_{DE} = -2023 \text{ kg} \text{ (壓縮)}$$

在 D 點周圍, $F_{AC} \times 2 \sin 60^\circ - 2250 \times 1 = 0 \quad \therefore F_{AC} = 1300 \text{ kg}$ (拉力) 或根據垂直方向之均衡，

$$F_{DC} \sin 60^\circ + 1000 - 2250 = 0 \quad \therefore F_{DC} = 1445 \text{ kg} \text{ (拉力)}$$

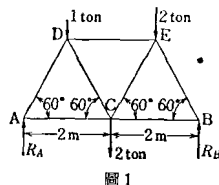


圖 1

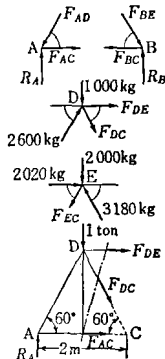


圖 2

9. 滑動摩擦:

[1] 靜止摩擦 (見圖 1)

$$F_0 = \mu_0 N \quad (1)$$

$$\tan \phi_0 = \mu_0 \quad (2)$$

F_0 : 最大摩擦力 [kg]

ϕ_0 : 靜止摩擦角

N : 接觸面之垂直壓力 [kg]

μ_0 : 靜止摩擦係數

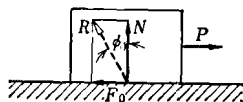


圖 1

[2] 運動摩擦

$$F = \mu N \quad (3)$$

$$\tan \phi = \mu \quad (4)$$

F : 運動摩擦力 [kg], μ : 運動摩擦係數

ϕ : 運動摩擦角, N : 接觸面之垂直壓力 [kg]

【例題】使 20kg 水平力作用於靜止於水平面上的重 80kg 的物體，這才使該物體移動。

試求靜止摩擦係數與摩擦角。

【解】將 $F_0 = 20\text{kg}$, $N = 80\text{kg}$ 代入於公式(1),

$$20 = \mu_0 \times 80 \quad \mu_0 = \frac{20}{80} = 0.25$$

將 $\mu_0 = 0.25$ 代入於公式(2)

$$\tan \phi_0 = 0.25 \quad \text{據此, } \phi_0 = 14^\circ$$

【例題】將重量 100kg 的物體放在板上，使板傾斜至和水平形成 30° 之角，結果該物體才開始滑下來。將板再度放成水平，則需要多大之力，才能夠以水平方向之力推動該物體？

【解】在圖 2 上，是欲將物體沿著傾斜的板拉下來之力，達到最大摩擦力，所以，物體才開始滑動。

$$W \sin \theta = \mu_0 W \cos \theta$$

$$\mu_0 = \frac{W \sin \theta}{W \cos \theta} = \tan \theta$$

試將此公式和公式(2)互相比較，則 $\theta = \mu_0$ ，而物體僅藉自重沿斜面滑下來時之傾斜角（叫做靜止角）和摩擦角相等。

$$\mu_0 = \tan \theta = \tan 30^\circ = 0.577$$

將 $\mu_0 = 0.577$, $N = W = 100\text{kg}$ 代入於公式(1), 則

$$F_0 = 0.577 \times 100 = 57.7\text{kg}$$

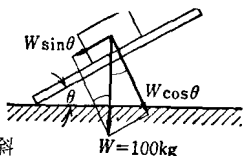


圖 2

MEMO 靜止摩擦力產生於和外力相反方向，隨外力一起增加，達到最大摩擦力而不會再大。摩擦力是一種阻力，如果沒有產生該摩擦力之原因的外力，則不能存在。

10. 速度與相對速度

[1] 速度

$$v = \frac{s}{t} \text{ [m/sec]} \quad s = vt \text{ [m]} \quad (1)$$

[2] 相對速度 (見圖 1)

$$\vec{v}_r = \vec{v}_b + (-\vec{v}_a) = \vec{v}_b - \vec{v}_a \quad (2)$$

v_r : B 對 A 之相對速度

v_a : A 之絕對速度

v_b : B 之絕對速度

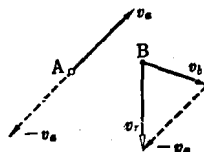


圖 1

【例題】試求進行等速運動的物體在 12 秒鐘之間前進 240 m 那時候之速度。

【解】將 $s = 240 \text{ m}$, $t = 12 \text{ sec}$ 代入於公式(1), 則

$$v = \frac{240}{12} = 20 \text{ m/sec}$$

【例題】試求以三小時走完 T 市與 O 市間 553.7 km 的列車之平均時速, 並以秒速表示該時速。

【解】所求的是平均的速度, 故將 $s = 553.7 \text{ km}$, $t = 3 \text{ hr}$ 代入於公式(1), 則

$$v = \frac{553.7}{3} = 184.6 \text{ km/hr} = \frac{184.6 \times 1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ sec}} = 51.3 \text{ m/sec}$$

【例題】試求從以 36 km/hr 以水平疾駛的列車中看以 10 m/sec 垂直下來的雨時之雨落下方向與速度。

【解】求雨對觀察者的相對速度即可。

在公式(2), 因 $\vec{v}_a = 36 \text{ km/hr}$, $\vec{v}_b = 10 \text{ m/sec}$, 故

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_b^2} \quad \tan \theta = v_a / v_b$$

在這裡, 因為 $v_a = 36 \text{ km/hr} = 36 \times 1000 / (60 \times 60) \text{ m/sec} = 10 \text{ m/sec}$, $v_b = 10 \text{ m/sec}$, 故

$$v_r = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} \div 14 \text{ m/sec}$$

$$\tan \theta = \frac{10}{10} = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

【例題】有 500 m/sec 速度的蒸汽如圖所示, 噴於正旋轉的汽輪機之輪葉。試就圖 2, 求以 200 m/sec 之周速碰到輪葉上的蒸汽的速度。

【解】在公式(2), $\vec{v}_a = 500 \text{ m/sec}$, $\vec{v}_b = 200 \text{ m/sec}$, 故

$$v_r = \sqrt{500^2 + 200^2 - 2 \times 500 \times 200 \cos 15^\circ} = 311 \text{ m/sec}$$

$$\sin \theta = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = \sin 15^\circ \times \frac{500}{311} = 0.416$$

$$\therefore \theta = 24^\circ 35'$$

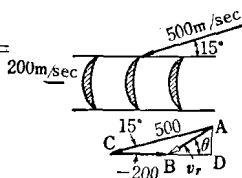


圖 2

MEMO 公式(2)的 $\vec{v}_a$ 表示向量 v_a 。故公式(2)之計算須將向量予以合成。