微積分学教程

第三卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

高等教育出版社

微積分学教程

第三卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著
吳亲仁，路見可譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著“微积分学教程”（Курс дифференциального и интегрального исчисления）第三卷1949年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为大学数学系学生及研究生用教学参考書。

本書共三卷，第一卷由楊弢亮、叶彦謙合譯，第二卷由北京大学数学系集体翻譯，第三卷由路見可等譯。

本書（第三卷）中譯本暂分三册出版。第一分册內容为曲綫积分，斯底尔吉斯积分及二重积分；第二分册內容为曲面积分，三重及多重积分；第三分册則全部是傅立叶級数。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

吳学仁 路見可譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印訂 新华書店發行

統一書号13010·299 開本850×1168 1/32 印張5 1/16 字數154,000 印數13,001—16,000

1953年12月商務初版（共印11,000）

1957年2月新1版 1959年7月北京第4次印刷 定價(6)¥0.70

俄中名詞對照表

А

Аддитивная функция от области пространственной 空間區域的可加函數

— — — —, определение её по производной 由導數確定區域的可加函數

Архимеда закон 阿基米德定律

Б

Бесселевы функции 貝塞爾函數

В

вектор 向量

— потока тепла 熱流量向量

векторная линия, поверхность 向量線,向量面

— трубка 向量管

векторное поле 向量場

— произведение 向量積

Вивиани тело 維維安尼立體

винтовая поверхность 螺旋曲面

вихревая линия 轉動線

—поверхность 轉動面

— трубка 轉動管

вихрь 旋轉量

вихря поток 旋轉量的流量

вращение тела 立體的旋轉

вращения поверхность 旋轉曲面

— тело 旋轉體

Г

Гамильтон 哈密爾頓

гамма-функция Г 函數

гамоническая функция в области пространственной 在空間區域中的調和函數

Гаусс 高斯

Гаусс-Остроградского формула 高斯-奧斯特洛格拉斯基公式

Гауссовы коэффициенты поверхности 曲面的高斯係數

Гельмгольц 赫爾姆霍爾茨

градиент 梯度

Грам 格蘭姆

Гульдина теорема 古里金定理

Д

Дарбу суммы для интеграла тройного 三重積分的達布和

двусторонняя поверхность 雙側曲面

дивергенция 發散量

Дирихле формулы 第里希萊公式

дифференциал точный, признаки 全微分,檢定法

— —, связь с криволинейным интегралом 全微分,與曲線積分的關係

дифференциальное уравнение гидродинамики 流體動力學的微分方程

— — теплопроводности 熱傳導的微分方程

дифференцирование по области 對區域的微分法

длина дуги 弧長

Ж

жидкий контур 流體閉路

З

замена переменных в интегралах тройных 三重積分中的變數更換
— — — — n-кратных n重積分中的變數更換

И

инверсия 反演法
инерции главные оси 主慣性軸
— момент поверхности 曲面的慣矩
— — тела 立體的慣矩
интегральная сумма 積分和
интегрируемая функция 可積分函數
интегрируемости условие (для дифференциальных выражений) (微分式的)可積分條件
источники 泉源
—, плотность 泉源密度
—, производительность 泉源生產率

К

Каталан 喀塔朗
Каталана формула 喀塔朗公式
квадрируемая поверхность 可求積的曲面
кинетическая энергия вращающегося тела 旋轉體的動能
координатные поверхности 坐標曲面
Коши 科西
кратные интегралы 重積分
кривизна поверхности, Гауссова 曲面的高斯曲率
криволинейные координаты в пространстве 空間的曲線坐標
— —, элемент объёма 體積元素的曲線坐標
— —, элемент площади 面積元素的曲線坐標
криволинейный интеграл второго типа 第二型曲線積分
— — — —, независимость от пути 第二型曲線積分與道路的無關性
— — — — по замкнутому контуру 沿閉路的第二型曲線積分
Кусков 枯斯科夫

Л

Лагранж 拉格朗謝
Лаплас 拉潑拉斯
левая координатная система 左手坐標系
— ориентация пространства 空間的左手定向
Лежандр 勒戎德
Лейбниц 萊布尼兹
линейный интеграл 線性積分
Лиувилль 立烏維里
Лиувилля формулы 立烏維里公式

М

масса кривой поверхности 曲面的質量
— тела 立體的質量
Мёбиус 莫彼阿斯
много кратные интегралы 多重積分
— —, замена переменных 多重積分的變數更換
— —, сведение к повторному 多重積分化爲逐次積分

Н

Набла 奈布拉
неразрывности уравнение 連續性方程
несобственный тройной интеграл 廣義三重積分
Ньютона закон притяжения 牛頓引力定律

О

объём в криволинейных координатах 曲線坐標下的體積
—, выражение поверхностным интегралом

——— эллипсоидом 由橢球體構成的牛頓位勢
—— тела на само себя 立體在自身上的牛頓位勢
———— другое тело 立體在另一立體上的牛頓位勢
потенциальная функция 位勢函數
потенциальное поле 位勢場
поток вектора через поверхность 向量通過曲面的流量
— тепла 熱流量
——, вектор 熱流量向量
правая координатная система 右手坐標系
—ориентация пространства 空間的右手定向
преобразование пространственных области 空間區域的變換
приложения криволинейного второго типа 第二型曲線積分的應用
— многократного 多重積分的應用
— поверхностного 曲面積分的應用
— тройного 三重積分的應用
притяжения материальной точки поверхностью 質點受曲面的引力
——— сферическим слоем 質點受球殼的引力
——— сферной 質點受球面的引力
——— телом 質點受立體的引力
— тела телом 立體受立體的引力
произведение инерции 慣性積
производная по направлению 方向導數
—— области 區域導數
простой слой 單層
Пуассон 普安松

P

работа силового поля 力場的功
расходимость 發散量
ротор 旋轉量

C

силовое поле 力場
скаляр 純量
скалярное поле 純量場
— произведение 數量積
соленоидальное поле 筒形場
Сонин 沙寧
среднее значение, теорема 中值定理
статические моменты кривой поверхности 曲面的靜矩
—— тела 立體的靜矩
Стокса формула 斯托克斯公式
сторона поверхности 曲面的側
сфера, притяжение и потенциал 球的吸引力及位勢
сферические координаты 球面坐標
—— обобщёные 廣義球面坐標
——, элемент площади кривой поверхности 球面坐標下曲面的面積元素
сферический слой притяжений и потенциал 球層的引力與位勢

T

телесный угол 立體角
тепла распространение в теле 立體中熱量的分佈
теплопроводности уравнение 熱傳導方程
Томсон 托姆遜
тройной интеграл 三重積分
—— как аддитивная функция области 三重積分作爲區域的可加函數
——, классы интегралируемых функций 三重積分的可積分函數類
—— несобственный 廣義三重積分
——, приведение к повторому 三重積分化爲逐次積分
——, свойства 三重積分的性質

——, условие существования 三重積分的存在條件

У

угол видимости поверхности 曲面的可見角

Ц

центр тяжести кривой поверхности 曲面的重心

——тела 立體的重心

центробежная сила 離心力

центробежный момент 離心矩

цилиндрические координаты 圓柱坐標

циркуляция вектора 向量的循環量

Ш

Шварц 許瓦爾茲

Э

элемент площади в криволинейных координатах 曲線坐標下的面積元素

——в сферических координатах 球面坐標下的面積元素

— объёма в криволинейных координатах 曲線坐標下的體積元素

——в сферических координатах 球面坐標下的體積元素

——в цилиндрических координатах 圓柱坐標下的體積元素

эллипсоид 橢球體

— инерции 慣性橢球體

эллиптические интегралы 橢圓積分

— координаты 橢圓坐標

Я

Якоби 雅可比

Якобиан как коэффициент растяжения 雅可比式當作延伸係數

第二分册目录

第十七章 曲面面积·曲面积分

§ 1 双側曲面

§ 2. 曲面面积

§ 3. 第一型的曲面积分

§ 4. 第二型的曲面积分

第十八章 三重积分及多重积分

§ 1. 三重积分及其計算

§ 2. 高斯—奥斯特洛格拉斯基公式

§ 3. 三重积分中的变数更換

第十七章　曲面面積·曲面積分

§.1　雙側曲面

593. 曲面的側　讓我們首先來建立在以後敍述上佔重要地位的曲面的側這一概念。

在許多情形中，這個概念是通過直覺就可以瞭解的。如果曲面是由形如 $z=f(x, y)$ 的顯方程給出，那就可以說到這曲面的上側或下側。* 如果曲面範圍着一個立體，那也容易想像到它的兩側——朝向於立體的內側，與朝向於立體的周圍空間的外側。

從這直覺的概念出發，我們現在要對曲面的側這個概念給以確切的定義。

考慮一個光滑的曲面(S)，它是封閉的或者是由一段一段光滑的邊緣所圍成的，並且它上面沒有奇異點；因此，在這曲面的各點處都有一確定的切面，它的位置隨着切點位置的改變連續地改變。

在曲面上取一定點 M_0，並在這點處引一法線，這法線有兩個可能的方向（它們可用方向餘弦的符號來區別），我們認定其中一方向。沿曲面畫一個起自 M_0 而又回到 M_0 的閉路，並假定它不越過曲面的邊緣。令點M繞着這閉路環行，並在其各個接續的位置上給與法線一個方向；這些方向就是由我們在起點 M_0 處所選定的那個法線方向連續地轉變來的。這時下面兩種情形必有一種發生：令點M環行一周再回到 M_0 時，法線的方向或與出發時所定者相同，或與出發時所定者相反。

如果對於任一點 M_0 及任一通過 M_0 的閉路 M_0AM_0，後一種情形發生，則對於其它任一點 M_1 也容易作出一個起自 M_1 而又回到 M_1 的

* 我們常採用這類說法，這時是指 z 軸本身是垂直向上的。

閉路，使回到 M_1 時法線的方向與起初所定者相反。例如，假若我們理解 M_1M_0 爲曲面上連接 M_1 與 M_0 兩點但不越過曲面的邊緣的任一曲線，而 M_0M_1 爲與其方向相反的同一曲線，則 $M_1M_0AM_0M_1$ 就是這樣的一個閉路。

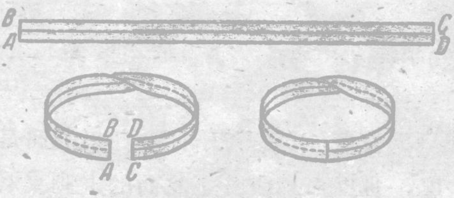

圖 82

在這情况下曲面叫做是**單側的**。所謂的莫彼阿斯條(圖82)就是這類曲面的一個典型的例子。如果我們把一長方形紙條 $ABCD$ 先扭一次，再黏起來，使 A 點與 C 點相合，B 點與 D 點相合，我們就可得到它的一個模型。假若用一種顏色來塗這個扭成的環帶，那就可以不越過它的邊緣而用這種顏色塗遍環帶的全部。像這一類的曲面不在我們今後討論之列。

現在我們假定不論 M_0 是怎樣的點，不論通過 M_0 而不越過曲面邊緣的線是怎樣的閉路，沿此線進行一周再回到起點 M_0 時，法線的方向與起初所定者相同。在這些件條下曲面叫做是**雙側的**。

設 S 是一個雙側曲面。在 S 上取任一點 M_0 並給在這點處的法線一個確定的方向。取這曲面的其它任一點 M_1，我們用任一個在曲面上但不越過曲面的邊緣的道路 (K) 來連接 M_0 與 M_1，並令點 M 沿這道路從 M_0 進行到 M_1. 如果這時法線的方向連續地改變，則點 M 到達 M_1 的位置時就帶着一個完全確定的法線方向，不倚賴於道路 (K) 的選擇。實際上，假若說 M 沿着兩個不同的道路 (K_1) 與 (K_2) 從 M_0 進行到 M_1 時我們會在 M_1 處得到兩個不同的法線方向，則閉路 $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$ 就會使得回到 M_0 時帶着的法線方向不同於起初的法線方向。這和雙側曲面的定義相矛盾。

由此可見，在雙側曲面上，一個點上的法線方向的選擇唯一地決定全部點上的法線方向的選擇。**曲面上全部點的集合連同那按指定的**

規則對這全部點上的法線所給與的方向，叫做曲面的一個定側。

594. 例　1° 最簡單而又最重要的雙側曲面的例子是用顯方程 $z=f(x, y)$ 表達的曲面，這裏的函數 z 是假定在某一平面區域 (D) 內連續的，並且在這區域內有連續的偏導数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad 與 \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在這種情況下曲面的法線方向餘弦具有表達式:

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

在根式前選取一確定的符號後，我們這樣就在曲面的全部點上都建立了確定的法線方向。因為根據假設，方向餘弦是點的坐標的連續函數，故所建立的法線方向也連續地依賴於點的位置。由此顯然可見，在 $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ 的公式中根式前符號的選擇，正是在以前所說的曲面的側這個概念的意義之下，確定了曲面的一側。

如果我們在根式前選取正號，則在曲面的全部點上

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的，就是說與選定的一側對應的法線和 z 軸作成的角是銳角。因此，由這選定的符號所確定的曲面的一側是上側。反之，在法線方向餘弦的表達式中負號的選取就顯示出曲面的下側(全部法線都和 z 軸作成鈍角)。

2° 我們現在考慮，更一般地，任意一個由參數方程

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v) \tag{1}$$

給出的非封閉的光滑曲面 (S)，並且參數 u, v 在 uv 平面上某一有界區域(Δ)內變化。光滑性的要求就是說 (1)中各函數及其偏導數都在(Δ)內是連續的，並且在曲面上沒有奇異點。此外(特別着重地指出)，我們假定重點不出現，是要使曲面的每一點只能從參數 u, v 的一對值得到。

如果像尋常一樣用 $A, B, C,$ 表示矩陣

$$\left\|\begin{matrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix}\right\|$$

中三個行列式，則由假設恆有 $A^2+B^2+C^2>0$，而曲面的法線方向餘弦可用熟知的公式來表達:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\lambda=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \qquad\qquad \cos\nu=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{array}\right\}\qquad(2)$$

並且在這情況下根式前符號的選擇顯示出曲面一側，所以曲面是雙側的。實際上，如果符號已選定，則對於曲面的每一點（因為只有 u, v 的一對值對應於它！）公式（2）和一個確定的法線方向相對應。當點移動時，法線方向連續地改變。

違背了無重點的假定時，那就不能無條件地肯定說這曲面是雙側的。因為和曲面的重點 M_0 至少對應有參數的兩對不同的值 u_0, v_0 與 u_1, v_1，而對於這兩對值即使把根式前的符號取得一樣，公式（2）仍可能對 M_0 處的法線定出兩相反的方向。如果真是這樣，則這曲面一定是單側的。實際上，我們連接點 $m_0(u_0, v_0)$ 與點 $m_1(u_1, v_1)$ 成為 uv 平面上一個曲線 m_0m_1；於是沿這曲線我們得到曲面（S）上一個起自 M_0 而再回到 M_0 的閉曲線：若一個點帶着一個法線方向從 M_0 出發，則沿這曲線環行一周而回到 M_0 時，它所帶的法線方向已與出發時所定者相反！

3° 若一光滑的曲面（S）是閉的而且範圍着某一個立體，則它具有兩側——內側與外側——是很明顯的。設這曲面是由（1）中各參數方程表達。這時，雖然關於曲面上的點與區域（Δ）上的點成一一對應的假設不完全能實現，但是公式（2）中符號的選擇卻全然確定曲面的一側。事實上像剛才上面說過的那種情形在這裏是根本不可能的。

595. 曲面和空間的定向　設（S）是由簡單閉路（L）所範圍的一個非封閉的光滑雙側曲面；選取這曲面的一個定側。我們現在按下面的規則對閉路（L）記上一確定的環行方向作為正向：這一個方向由觀察者看來必須是依反時針方向進行的；這時假想觀察者依這方向沿着這界線進行，且與選定的一側對應的曲面的法線同向地站着。"反時針方向"的含義，確切地說，就是觀察者必須在他左邊看見與他緊接的曲面的部分。對於曲面上每一個範圍着曲面一部分的簡單閉曲線來說，它的正向由這同一個規則同時建立起來。* 與正向相反的環行方向叫做負向，總起來，這就是曲面的定向概念的內容。

如果從曲面的另一側出發，則法線要改其方向為相反的方向，觀

* 在這曲線的正向確定時才應算作這個部分。

察者的位置也要變更；因此按照我們的規則必須重新佈置閉路(L)的正負向以及曲面上其它各閉路的正負向：曲面改變其定向。由此可見，如果始終保持這個確立了的規則，則選定了曲面的一側就確定了曲面的定向；反之，選定了曲面邊界的正向，就唯一地確定了曲面的一側。

在閉的光滑的曲面(S)範圍着某一個立體的情況下，這裏所能談到的是對於這個立體來說曲面的外側或內側。要對於任一個簡單的閉曲線用上述的規則來確立它的正向，這時不能做到，其原因是雙重的。首先是這種曲線(例如在環面上的任一經線或緯線)簡直可以"不分割"曲面，那時曲面從雙方緊接着曲線：我們的規則不能給出什麽。然而即使閉路"分割"曲面成兩區域，它也同樣地"範圍着"這兩區域，並且我們的規則要看選取的是那一個區域來定這閉路的兩方向中那一個作爲正向。以"分割"曲面的那種閉路爲限，我們開頭把一個區域和邊界一同指出，然後正向就完全而唯一地建立起來。* **於是曲面的兩定向之一就全靠所選取的一側決定。**

如果對於每一個這樣的曲面規定把那個和曲面的外側對應的定向當作正的定向，而把和它相反的當作負的定向，則空間本身的定向某種定義就由此產生。與這完全類似，對於平面上任一個簡單的閉曲線來說，它的正向(可以說是正的定向)的選取顯示出了平面的定向[523]。

現在已定義了的那個空間定向，歸根到底是以反時針方向的旋轉作爲它的基礎的，叫做右手定向。若所持的出發點是順時針方向的旋轉，則得到空間的左手定向。爲了避免混亂起見，我們今後在空間定向起作用的那些問題上總是預定右手的空間定向。

必須指出，空間坐標軸的安排要由所規定的空間定向去決定。在

* 如果考慮平面上由同樣的方向所確定的開的或閉的曲線，則在第一種情形下可以說出曲線上的任意兩點那個在前與那個在後，而在第二種情形下只有指出了那兩個點及由它們所限制的弧線以後，才能夠那樣地說。可以看出這裏所說的與課文中所說的相類似之處。

右手定向下，坐标軸要安排得这样，当我們从正的 z 軸望它們时，由正的 x 軸到正的 y 軸的旋轉是按反时針方向进行的（当字母 xyz 循环輪換时这也保持有效）（圖 83, a）；在左手定向下，所說的旋轉就順时針方向进行(圖83, $б$)。在第一种情形下坐标系 $Oxyz$ 叫做右手的，而在第二种情形下叫做左手的。遵照上面所定的条件，我們今后在所指的各情况下采用右手坐标系。

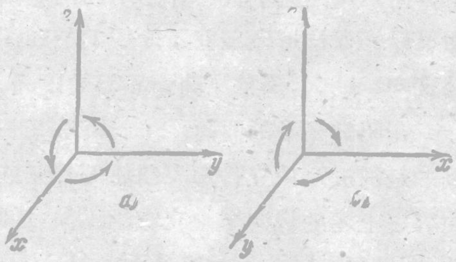

圖 83

596. **法綫方向余弦公式中符号的选擇** 我們現在要对前面說过的概念，即曲面的一个側的选擇和其一个定向的建立兩者之間的关系，給出一个在以后極重要的应用。

我們再考虑在 594, 2° 中所說的非閉的光滑曲面（S），并选取它的一个定側(跟着也选好了定向)。設(Λ)是 uv 平面上的区域（Δ）的边界，而(L)是我們的曲面上和它对应的边界。我們假定（这总容易实現），边界(L)的正向对应于边界(Λ)的正向。于是对于兩个彼此对应的在区域（Δ）內的閉路（λ）和在曲面(S)上的閉路(l)，也有同样的情形：(λ)的正向引出(l)的正向。*

在这些条件下为了显示所选的曲面一側，必須选取法綫方向余弦公式（2）中根式前的正号。

要証明这个断語只要查明，至少在一点处由这些帶正号的公式所确定的方向和所要求的法綫方向相一致。取曲面上任意一个內点 M_0；在区域(Δ)內有和它对应的点 $m_0(u_0, v_0)$.

* 因为一閉路的方向可以由它的任一部分的方向来判断，所以对于和（Λ）有一公共部分的閉路(λ)来說，所下的断言是显明的，然后容易变到一般場合。

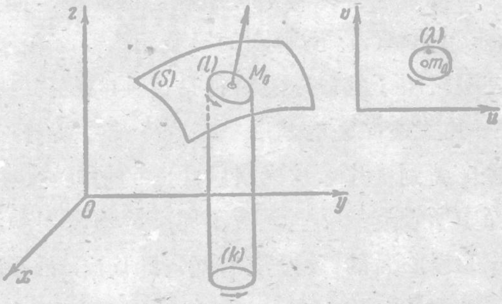

圖 84

設在這點處，譬如說，行列式

$$C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

不爲零。於是在 uv 平面上找得到點 m_0 的一個這樣小的鄰域（其邊界爲 (λ)），使得在曲面 (S) 上和它對應的點 M_0 的鄰域（其邊界爲 (l)）是一一對應地射影到 xy 平面上。用 (k) 表這射影在 xy 平面上的閉路（圖84）。

如果在所考慮的點處以及在它的鄰域內 $C>0$，則對應於閉路 (λ) 的正向有閉路 (k) 的正向（即在所選擇的坐標軸的排列下其方向是反時針方向）[參看 581, 1)]。從圖形中顯然可見，要曲面上和 (k) 對應的閉路 (l) 的方向也是反時針方向，就必須從上面朝它看，因此在這情況下點 M_0 處的法線應該是向上的，即應該與 z 軸作成銳角。如果在公式 (2)中取正號，則由公式 (2)就正有這情形，因爲當 $C>0$ 時 $\cos\nu>0$. 反之，$C<0$ 時法線應該與 z 軸作成鈍角，這在上述選取的符號下一樣地成立，因爲 $C<0$ 時 $\cos\nu<0$.

若光滑的曲面 (S) 是閉的而且範圍着某一個立體 [參看 594, 3°]，則對於它來說就有類似的情形發生。假設我們已認定了曲面的一個定側，並且假設對應於區域 (Δ) 內任一閉路 (λ_0) 的正向有曲面 (S) 上由