高等继续教育精品教材

线性代数

张家琦　主编
张家琦　陈洪育　万重英　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等继续教育精品教材

线性代数

张家琦　主　编

张家琦　陈洪育　万重英　编　著

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书共分为五章，内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、特征值与特征向量.

本书适合作为高等继续教育经济类与管理类专业的教材，也可作为高等院校网络教育教材或自学参考书. 对于参加全国高等教育自学考试经济类与管理类专业的读者，也不失为一本有指导价值的读物.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／张家琦主编. —北京：中国铁道出版社，2009.7

高等继续教育精品教材

ISBN 978-7-113-10113-8

Ⅰ. 线… Ⅱ. 张… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材

Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 131761 号

书　　名：线性代数

作　　者：张家琦　主编

策划编辑：李小军

责任编辑：徐盼欣　姚文娟　　**编辑部电话：**(010)63583215

封面设计：付　巍　　**封面制作：**李　路

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码:100054)

印　　刷：北京市彩桥印刷有限责任公司

开　　本：787mm×960mm　1/16　　**印张：**18.5　　**字数：**417 千

版　　次：2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：8 000 册

书　　号：ISBN 978-7-113-10113-8/O·193

定　　价：28.00 元

前　言

本书是中国人民大学继续教育学院的系列教材之一,是专为学习线性代数而编写的,也可作为高等院校网络教育线性代数课程的教材或自学参考书,尤其适合参加全国高等教育自学考试经济类与管理类专业的读者使用.

本书共分五章.第一章行列式,第二章矩阵,第三章 n 维向量,第四章线性方程组,第五章特征值与特征向量.

本书编写的基本指导思想是要便于学员自学.因此,在编写中力求讲解条理清楚,重点突出,概念明确,通俗易懂;对于读者在自学中可能发生困难的地方,都作了比较详细的分析和推导.每一章后面的例题也选得比较多,同时将解题过程尽量写得易于理解.每一章后面均附有学习的基本要求和内容提要,便于读者掌握重点和复习.针对学员的特点与需求,在本书中,对全部的习题(A)(单项选择题、填空题)给出了答案;对于习题(B)(解答题),选择其中一部分具有代表性的题目作了详细的解答.

书中有些内容加了"※"号,选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲.

本书的编写,融入了诸多专家、教授,包括长期在中国人民大学继续教育学院授课的一线教师的心血,凝结着"从以知识立意向以能力立意转化"的现代教育思想的精华.

本书由张家琦任主编,由张家琦、陈洪育、万重英编著,参加编写工作的还有李刚、张炎、兰敏、黄振耀、郑余梅、兰保伶.

由于时间仓促,书中难免存在疏漏与不足,欢迎广大读者、专家和同行批评指正.

作者

2009 年 7 月于北京

目　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个重要概念.本章从二、三元方程组的解的公式出发，引出二阶、三阶行列式的概念，然后推广到 n 阶行列式，并导出行列式的一些基本性质及行列式按行(列)展开的定理，最后讲用行列式解 n 元方程组的克莱姆法则和齐次方程组有无非零解的判别定理.

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

我们从二元方程组的解的公式，引出二阶行列式的概念.

在线性代数中，将含两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是二元方程组的解的公式.但这个公式不好记，为了便于记这个公式，于是引进二阶行列式的概念.

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，它表示两项的代数和：$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

二阶行列式所表示的两项的代数和，可用下面的对角线法则来记忆：从左上角到右下角两个元素用实线相连，称为主对角线，这两个元素相乘取正号，从右上角到左下角两个元素用虚线相连，称为次对角线，这两个元素相乘取负号，如图 1-1 所示.

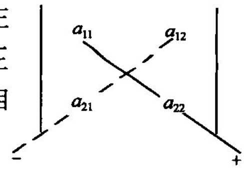

图 1-1

由于公式(1.3)的行列式中的元素就是二元方程组中未知量的系数，所以又称它为二元方程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

如果将 D 中第 1 列的元素 a_{11}, a_{21} 换成常数项 b_1, b_2，则可得到另一个行列式，用字母 D_1 表示，于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$b_1a_{22}-a_{12}b_2$，这就是公式(1.2)中 x_1 的表达式的分子. 同理将 D 中第 2 列的元素 a_{12}, a_{22} 换成常数项 b_1, b_2，可得到另一个行列式，用字母 D_2 表示，于是有

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$a_{11}b_2-b_1a_{21}$，这就是公式(1.2)中 x_2 的表达式的分子.

于是二元方程组的解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.2'}$$

其中 $D\neq 0$.

有了二阶行列式的定义和公式(1.2′)之后，可以很方便地用二阶行列式来解二元方程组.

例 1 用二阶行列式解二元方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}$$

解

因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3$$

所以 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}$$

不难检验这个结果是正确的.

1.1.2 三阶行列式

含三个未知量三个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

还是用加减消元法,即可求得方程组(1.4)的解的公式,当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\end{cases}\tag{1.5}$$

这就是三元方程组的解的公式.这个公式更不好记,为了便于记它,于是引进三阶行列式的概念.

我们称记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

为三阶行列式,它表示 6 项的代数和:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

即定义

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+\\a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-\\a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\tag{1.6}$$

三阶行列式所表示的6项的代数和,它们是:从左上角到右下角三个元素相乘取正号,从右上角到左下角三个元素相乘取负号,这种展开法称为行列式的实虚线法则,如图1-2所示.

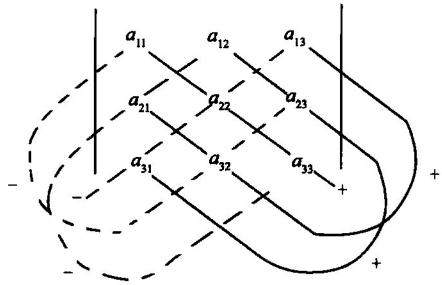

图 1-2

由于公式(1.6)的行列式中的元素就是三元方程组中未知量的系数,所以称它为三元方程组的系数行列式,也用字母 D 来表示,即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中第1列、第2列、第3列的元素分别换成常数项 b_1,b_2,b_3,就可以得到另外三个三阶行列式,分别记为 D_1,D_2 和 D_3,于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

按照三阶行列式的定义,它们都表示6项的代数和;并且分别是公式(1.5)中 x_1,x_2 和 x_3 的表达式的分子,而系数行列式 D 是它们的分母.

于是三元方程组的解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5'}$$

其中 $D\neq0,D_1,D_2,D_3$ 都是三阶行列式.

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1- \\ &\quad 3\times2\times3-2\times2\times2-1\times1\times1 \\ &= 4+6+6-18-8-1=-11 \end{aligned}$$

例 3 用三阶行列式解三元方程组

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=-4\\6x_1-2x_2+3x_3=-1\\5x_1-3x_2+2x_3=-3\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}4&-3&2\\6&-2&3\\5&-3&2\end{vmatrix}$$

$$=4\times(-2)\times2+(-3)\times3\times5+2\times6\times(-3)-$$
$$2\times(-2)\times5-(-3)\times6\times2-4\times3\times(-3)$$
$$=-16-45-36+20+36+36=-5\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-4&-3&2\\-1&-2&3\\-3&-3&2\end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4&-4&2\\6&-1&3\\5&-3&2\end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}4&-3&-4\\6&-2&-1\\5&-3&-3\end{vmatrix}=5$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{5}{-5}=-1$$

为方程组的解(代入方程组检验,确为方程组的解).

1.2 n 阶行列式

前一节中讲了二阶、三阶行列式的定义,在这一节中我们要将它推广到 n 阶.例如四阶行列式的记号为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

我们如何定义它呢？根据实虚线法则，恐怕很快会想到将四阶行列式定义为8项的代数和，其中$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$，$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$取正号，其余4项取负号.这个定义很简单，计算起来也方便，但可惜没什么用处，因此数学家不是这么定义的，而是将它定义为24项的代数和，其中12项正的，12项负的.

为了讲清楚一般的n阶行列式的定义，我们先介绍一个预备知识：排列的逆序数的概念.

1.2.1 排列的逆序数

这里一共要讲7个名词.

排列：由n个不同的元素$1,2,3,\cdots,n$排成的任一有序数组，称为一个n级全排列，简称n级排列.

例如 1 2 3 4 是一个4级排列，

4 3 2 1 也是一个4级排列，

5 2 3 4 1 是一个5级排列.

排列总数：n级排列的总的个数称为n级排列的总数，用符号P_n表示.我们自然会提出这样的问题：n级排列的总数共有多少个？例如4级排列的总数有多少个？

一般地有以下结论：

n级排列的总数P_n为$n!$个.

这是很容易理解的，因为从n个不同的元素$1,2,\cdots,n$中任取一个作为n级排列的第一个元素，共有n个取法；然后从余下的$n-1$个元素中任取一个作为n级排列的第二个元素，共有$n-1$个取法；…；最后余下一个元素取作n级排列的最后一个元素，所以总共有$n(n-1)\cdots 1=n!$个取法.

例如由1,2,3这三个数码可以排出$3!=6$个3级排列，它们是：1 2 3，1 3 2，2 1 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1.

一般地，我们将一个n级排列记为$i_1i_2\cdots i_n$，其中i_1是$1,2,\cdots,n$中的某一个数，i_2是余下的$n-1$个数中的某一个数，….例如当排列为3 2 4 1时，表示i_1为3，i_2为2，i_3为4，i_4为1；当排列为5 1 4 2 3时，表示i_1为5，i_2为1，i_3为4，i_4为2，i_5为3.

排列的逆序：在一个n级排列$i_1i_2\cdots i_n$中，如果有某个较大的数i_t排在较小的数i_s的前面，就称i_t与i_s构成了一个逆序.

例如在5级排列1 2 3 5 4中，较大的数5排在较小的数4之前，就称5与4为一个逆序.

又如在3级排列3 1 2中，较大的数3排在较小的数1之前为一个逆序，3在2之前也是一个逆序.即3级排列3 1 2中有两个逆序.

排列的逆序数:一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数,称为此排列的逆序数,记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

由于 5 级排列 1 2 3 5 4 中,只有一个逆序,所以

$$N(1\ 2\ 3\ 5\ 4)=1$$

又由于 3 级排列 3 1 2 中,共有两个逆序,所以

$$N(3\ 1\ 2)=2$$

求一个排列的逆序数的方法是:先求第一个元素 i_1 的逆序数 N_1,再求第二个元素 i_2 的逆序数 N_2,…,最后求第 $n-1$ 个元素 i_{n-1} 的逆序数 N_{n-1},将它们加起来即可. 即有

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=N_1+N_2+\cdots+N_{n-1}$$

奇排列、偶排列:如果 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数,则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列;如果 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数,则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列.

例如 n 级排列 1 2…n 为偶排列,3 级排列 3 1 2 为偶排列,5 级排列 1 2 3 5 4 为奇排列.

例 1 计算 $N(3\ 2\ 1\ 4\ 5)$ 和 $N(3\ 4\ 1\ 2\ 5)$.

解

$$N(3\ 2\ 1\ 4\ 5)=2+1+0+0=3$$
$$N(3\ 4\ 1\ 2\ 5)=2+2+0+0=4$$

例 2 计算 $N[n(n-1)\cdots 2\ 1]$,并确定 n 级排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的奇偶性.

解

$$\begin{aligned}&N[n(n-1)\cdots 2\ 1]\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)\\&=\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

此排列的奇偶性因 n 的不同而不同.

当 n 为 4 的整数倍时,即 $n=4k,k=1,2,\cdots$ 时,则 $N=\frac{1}{2}\times 4k(4k-1)=2k(4k-1)$,不论 k 取何值,N 均为偶数.

当 $n=4k+1,k=0,1,\cdots$ 时,则 $N=2k(4k+1)$,不论 k 取何值,N 均为偶数.

当 $n=4k+2,k=0,1,\cdots$ 时,则 $N=(2k+1)(4k+1)$,不论 k 取何值,N 均为奇数.

当 $n=4k+3,k=0,1,\cdots$ 时,则 $N=(4k+3)(2k+1)$,不论 k 取何值,N 均为奇数.

所以当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列. 具体地说,当 n 为 2,3,… 时,N 的值如下表:

n	2	3	4	5	6	7	…
N	1	3	6	10	15	21	…

即当 n 为 2,3 时,为奇排列;n 为 4,5 时,为偶排列;n 为 6,7 时,又为奇排列;…

对换:在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果只将 i_s 与 i_t 的位置互换(其余均不动),得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换称为一次对换.

例如在排列 3 2 1 4 5 中,将 2 与 4 对换,得到新的排列为 3 4 1 2 5.

在上面的例 1 中我们看到了:奇排列 3 2 1 4 5 经对换 2 与 4 之后,变成了偶排列 3 4 1 2 5. 反之,也可以说偶排列 3 4 1 2 5 经对换 4 与 2 之后,变成了奇排列 3 2 1 4 5.

一般地,有以下定理.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后,其奇偶性发生变化.

就是说,奇排列经过一次对换后变成偶排列,偶排列经过一次对换后变成奇排列.

证 首先讨论对换相邻两个元素的情况. 设排列为

$$a_1a_2\cdots a_tijb_1b_2\cdots b_m$$

将相邻两元素 i 与 j 作一次对换,则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_tjib_1b_2\cdots b_m$$

显然对元素 $a_1,a_2,\cdots,a_t,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 来说,并不改变它们的逆序数. 但当 $i<j$ 时,经过 i 与 j 对换后,排列的逆序数增加 1 个;当 $i>j$ 时,经过 i 与 j 对换后,排列的逆序数减少 1 个. 所以对换相邻两元素后,排列改变了奇偶性.

再讨论一般情况,设排列为

$$a_1\cdots a_tib_1\cdots b_mjc_1\cdots c_n$$

将 i 与 j 作一次对换,则排列变为

$$a_1\cdots a_tjb_1\cdots b_mic_1\cdots c_n$$

这是对换不相邻的两元素的情况. 但它可以看成是先将 i 与 b_1 对换,再与 b_2 对换,……,最后与 b_m 对换,即 i 与它后面的元素作 m 次相邻元素的对换变成排列

$$a_1\cdots a_tb_1\cdots b_mijc_1\cdots c_n$$

然后将元素 j 与它前面的元素 $i,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻元素的对换而成. 即对换不相邻的元素 i 与 j(中间有 m 个元素),相当于作了 $m+(m+1)=2m+1$ 次相邻两元素的对换. 由前面证明的可知,排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次. 不论 m 为何数,$2m+1$ 必为奇数,说明排列改变了奇偶性.

于是证明了任一排列经过一次对换后,其奇偶性发生变化.

1.2.2 n 阶行列式的定义

由前一节讲的二阶、三阶行列式的定义,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们可以从中找出以下的规律性:

(1)二阶行列式是两项的代数和,三阶行列式是6项的代数和;

(2)二阶行列式中每一项是两个元素的乘积,它们分别取自不同的行和不同的列,三阶行列式中每一项是三个元素的乘积,它们也是分别取自不同的行和不同的列;

(3)每一项的符号是:当这一项中元素的行指标按自然数顺序排列后,如果元素的列指标排列为偶排列,则取正号;为奇排列,则取负号.

于是我们可以根据这个规律给出 n 阶行列式的定义.

定义:由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它是 $n!$ 项的代数和;每一项是取自不同行和列的 n 个元素的乘积;各项的符号是:当这一项中各元素的行指标按自然数顺序排列后,如果列指标排列为偶排列,则取正号;为奇排列,则取负号.

于是得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中记号 Σ 为连加号(求和号). 这里表示 $n!$ 项的代数和,而 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

n 阶行列式有时简记为记号 $|a_{ij}|$.

当 $n=2$ 和 $n=3$ 时,这样定义的二阶、三阶行列式与前一节用实虚线法则定义的是一致的.

当 $n=1$ 时,一阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$,例如 $|5|=5$,$|-2|=-2$. 此时记号与绝对值的记号容易混淆,要根据它在不同的场合来区别.

当 $n=4$ 时,四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

是 $4! = 24$ 项的代数和.

根据 n 阶行列式的定义,四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(1\ 2\ 3\ 4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{N(1\ 2\ 4\ 3)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + \cdots + (-1)^{N(4\ 3\ 2\ 1)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

关于 n 阶行列式的定义,读者必须弄清它的三个要点:

(1)是 $n!$ 项的代数和;

(2)每一项是取自不同行和列的 n 个元素的乘积(这样的项恰为 $n!$ 项);

(3)每一项的符号是:当其元素的行指标按自然数顺序排列后,如果列指标排列为偶排列,则取正号;如果为奇排列,则取负号.

为了熟悉这个定义,让我们看看下面的几个例题.

例 3 在四阶行列式中,$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$这一项应取什么符号?

解 这一项各元素的行指标是按自然数顺序排列的,而列指标排列为 4 3 2 1.

因为 $$N(4\ 3\ 2\ 1) = 3+2+1 = 6$$

所以 $$(-1)^{N(4\ 3\ 2\ 1)} = (-1)^6 = +1$$

即排列 4 3 2 1 为偶排列,所以这一项应取正号.

请注意:这一项的元素是从右上角到左下角顺序取的,如按实虚线法则应取负号. 这就矛盾了! 那么到底应取什么符号? 答案是应取正号,即应按 n 阶行列式的定义来确定. 这一点是最容易弄错的. 从前面例 2 的表中我们可以看到:当 n 为 2,3 时,N 为奇数;当 n 为 4,5 时,N 为偶数;当 n 为 6,7 时,N 为奇数;…. 也就是说,在 n 阶行列式中,次对角线上各元素乘积所成的一项,其正负号是随 n 的值而变的.

例 4 在五阶行列式中,$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$这一项应取什么符号?

解 这一项各元素的行指标是按自然数顺序排列的,而列指标的排列为 2 3 5 1 4.

因为 $$N(2\ 3\ 5\ 1\ 4) = 1+1+2 = 4$$

所以 $$(-1)^{N(2\ 3\ 5\ 1\ 4)} = (-1)^4 = +1$$

故由定义,这一项应取正号.

例5 写出四阶行列式中,带负号并包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项的一般形式为

$$(-1)^{N(1\,3j_3j_4)}a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

按定义,j_3 可取2或4,j_4 可取4或2,因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 或 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 但因 $N(1\ 3\ 2\ 4)=1$ 为奇数,$N(1\ 3\ 4\ 2)=2$ 为偶数,所以此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

例6 计算 n 阶对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值(其中 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$).

解 按定义,n 阶行列式的值应当是 $n!$ 项的代数和.但由于该行列式中的元素,除了主对角线上的元素不为零之外,其余的元素均为零,也就是说元素

a_{1j_1} 仅当 $j_1=1$ 时不为0,
a_{2j_2} 仅当 $j_2=2$ 时不为0,
……
a_{nj_n} 仅当 $j_n=n$ 时不为0.

因此,在全部 $n!$ 项中,只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零,其余的 $(n!-1)$ 项中至少有1个元素为零,所以其值等于零.

又因为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这项的行指标是按自然数顺序排列的,而它的列指标排列也为 $1\ 2\cdots n$,所以这一项应取正号.

综合以上的讨论可知

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

结论:对角形行列式的值,等于主对角线上各元素的乘积.

例7 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值(其中 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$).

解 由定义,它的值也应是 $n!$ 项的代数和.但在这些项中,也只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不等