高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　刘贵基　赵　凯

微积分

◎ 主编　赵　凯　黄秋灵

高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编 刘贵基 赵 凯

微 积 分

主编 赵 凯 黄秋灵

高等教育出版社

内容提要

本书是应用型本科院校“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题——“经管类专业应用型人才培养数学基础课程教学内容改革研究”的研究成果之一，是作者依据多年的教学实践经验和对高等学校经济管理类专业培养应用型人才的教学改革的认识，并根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。

本书结构严谨，内容深广度适当，贴近教学实际，便于教与学。本书的主要内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程。书末附有习题参考答案与提示。

本书可作为高等学校经济管理类专业微积分课程的教材，也可供报考经济学和管理学类硕士研究生的读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

微积分/赵凯，黄秋灵主编．—北京：高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027488-2

Ⅰ．微…　Ⅱ．①赵…②黄…　Ⅲ．微积分-高等学校-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第111304号

策划编辑　于丽娜　责任编辑　李华英　封面设计　张申申
责任绘图　吴文信　版式设计　余　杨　责任校对　金　辉
责任印制　陈伟光

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
总　　机　010－58581000

经　　销　蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷　北京市鑫霸印务有限公司

开　　本　787×960　1/16
印　　张　22.25
字　　数　420 000

购书热线　010－58581118
咨询电话　400－810－0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
畅想教育　http://www.widedu.com

版　　次　2009年8月第1版
印　　次　2009年8月第1次印刷
定　　价　26.30元

物料号　27488－00

前　言

本套教材是应用型本科院校“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题——“经管类专业应用型人才培养数学基础课程教学内容改革研究”的研究成果之一，是作者依据多年丰富的教学实践经验和对高等学校经济管理类专业培养应用型人才的教学改革的认识，并根据最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。本套教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，编写过程中特别注重以下几点：

1. 在内容安排上由浅入深，符合认知规律，既考虑了数学的科学性、系统性与逻辑性，又汲取了国内外一些优秀教材的优点，对传统的教学内容和结构作了适当的调整，增加了与经济、管理密切相关的数学理论和方法。

2. 在教学内容上实现了与经济管理类专业课程内容的整体化，能够更好地为后续课程服务，并能满足报考经济学和管理学类硕士研究生和将来从事实际工作的需要。

3. 贯彻问题教学法的基本思想，对重要概念、定理、方法，尽量先从解决经济管理领域中的实际问题入手，再引入数学概念，介绍数学定理、方法，最后解决所提出的问题，使学生能够了解实际背景，提高学习兴趣，同时增强应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

4. 例题和习题的选配层次分明，难易适度，并恰当选用经济管理中的应用案例。教材在每节后面都配置基本题，尽量使读者在做完本节习题后能够较好地理解和掌握本节的基本内容、基本理论和基本方法；在每章后面配置总习题，总习题分为(A)，(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课程的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的读者使用。

5. 行文追求简洁流畅，重点、难点阐述详细，逻辑性强，既富有启发性又通俗易懂。针对经管类专业教学的目标与特点，有些定理仅给出结论而略去了推证过程，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，贴近教学实际，便于教与学。

本书适合作为高等学校经济管理类专业微积分课程的教材，也可供报考经

济学和管理学类硕士研究生的读者参考。讲授全书约需 102 学时(不含习题课)。

本套教材由山东经济学院刘贵基、青岛大学赵凯任总主编,《微积分》由赵凯、黄秋灵执笔编写。在编写过程中,参考和借鉴了国内外有关资料,并得到了许多同行的帮助、指导和高等教育出版社的大力支持,在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平,书中难免有错误和不足之处,殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2009 年 3 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是微积分中最重要的基本概念之一，也是整个微积分学研究的主要对象；极限这一微积分中的重要概念，是研究微积分中其他概念和理论的主要方法基础；连续是函数变化的重要性态之一．因而，本章所介绍的函数、极限和连续是整个微积分学的基础．

第一节　函　　数

1.1　集合

集合是一些确定对象的全体．组成集合的每一个对象称为集合的元素．

集合通常用大写字母 A，B，C 等表示，其中的元素通常用小写字母 a，b，c 等表示．集合一般有两种表示方法．一是列举法，即把集合的元素都一一列举出来，并写在花括号中，如 $A=\{1,2,3,4,5\}$；二是描述法，即指明集合中元素所具有的特征或性质，如 $B=\{x\mid x^2-1=0\}$．集合通常分为有限集和无限集．若集合中含有有限个元素则称为**有限集**，否则称为**无限集**．若 a 是集合 A 中的元素，则称 a **属于** A，记为 $a\in A$；若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a **不属于** A，记为 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$．

不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$．例如，集合 $A=\{x\mid x>0$ 且 $x<0\}$ 是空集．

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或称 A **包含于** B，或 B 包含 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$．若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记为 $A=B$．空集$\varnothing$包含于任何集合 A，即$\varnothing\subset A$．

元素是数的集合称为**数集**．通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，用 $\mathbf{C}$ 表示复数集．本书用到的集合主要是数集．如果没有特别声明，以后提到的数都是实数．

1.2　区间和邻域

区间和邻域是微积分中的基本概念，是一类较特殊的数集．

设 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)；称数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为**闭区间**，记为 $[a,b]$；称数集 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$，$\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 为**半开半闭区间**，分别记为 $(a,b]$，$[a,b)$.

上述区间均为有限区间，此外还有无限区间

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},\ (-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},\ (-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}.$$

以点 a 为中心的开区间称为点 a 的**邻域**，记为 $U(a)$. 设 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$. 集合 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$. 此外，开区间 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 分别称为点 a 的**左**和**右 δ 邻域**.

1.3 函数的概念

人们在现实生活中所遇到的变量中，有的变量依赖于其他一些变量. 例如，某个城市的人口数量随时间而变化，某辆客车上的人数随车站而变化，等等. 那么，这种同一个问题中两个变量之间的一个变量随着另一个变量的变化而变化的关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 x，y 是两个变量，$D\subset\mathbf{R}$，$D\neq\varnothing$. 如果对于每个 $x\in D$，按照某一对应法则 f，都有唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的函数，也称 **y 是 x 的函数**，记为 $y=f(x)$，$x\in D$，其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**，因变量 y 与自变量 x 之间的这种对应关系，通常称为函数关系. 集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

由定义 1.1 知，一个函数由两个因素唯一确定：定义域与对应关系. 函数的常用表示方法有三种：图示法，表格法和公式法. 坐标平面上的点集 $\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图像或图形.

函数的定义域一般按如下两种情况来确定：一是对有实际背景的函数，根据实际背景的意义确定；二是对抽象的用公式表示的函数，通常约定其定义域是使得算式有意义的实数集合，这时通常不必标出定义域 D，这种定义域也称为函数的自然定义域.

例 1 $y=1$，$x\in\mathbf{R}$，图像如图 1－1 所示.

例 2 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$x\neq-1$，图像如图 1－2 所示.

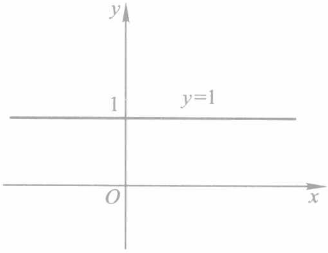

图 1－1

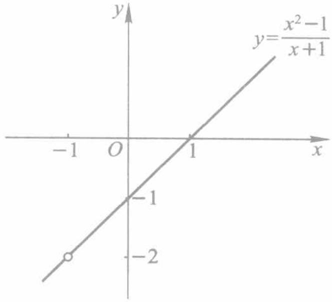

图 1－2

例 3　$y=|x|=\begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ 此函数称为**绝对值函数**，图像如图 1－3 所示.

例 4　$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$ 此函数称为**符号函数**，图像如图 1－4 所示.

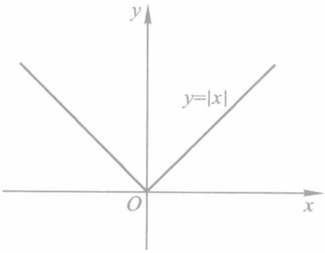

图 1－3

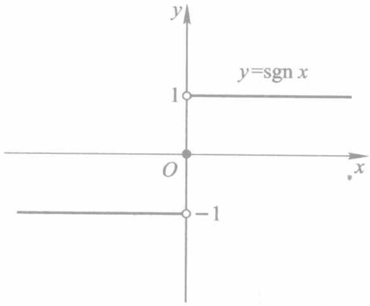

图 1－4

例 5　$y=[x]$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 此函数称为**取整函数**，如 $\left[\frac{5}{3}\right]=1$，$[3]=3$，$[-2.6]=-3$ 等，图像如图 1－5 所示.

例 6　$y=D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$ 此函数称为**狄利克雷(Dirichlet)函数**.

例 3 至例 6 都是分段定义的函数，这种函数在函数定义域的不同部分，因变量与自变量之间的对应关系用不同的式子表

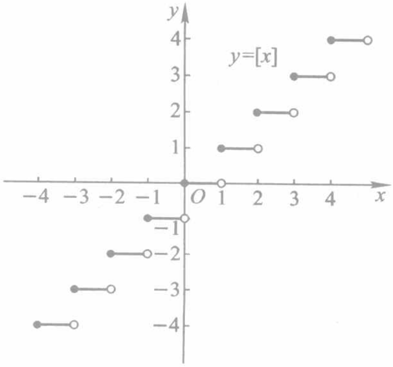

图 1－5

示，一般称为**分段函数**.

例 7 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}+\sqrt{\ln(x-1)}$ 的定义域.

解 函数的定义域应该是 $\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$ 且 $x-1\geqslant 1$，即 $-3\leqslant x-2\leqslant 3$ 且 $x\geqslant 2$，所以 $2\leqslant x\leqslant 5$. 因此函数的定义域 D 是闭区间 $[2,5]$.

1.4 函数的基本特性

1. 单调性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（或**单调减少**）.

显然，例 3 中的函数 $y=|x|$，当 $x>0$ 时单调增加，当 $x<0$ 时单调减少.

2. 有界性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在常数 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**. 否则，称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

显然，例 1、例 4 和例 6 中的函数都有界，例 2、例 3 和例 5 中的函数均无界.

函数有界的等价定义为：设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在常数 m，M，使得对任意 $x\in D$ 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 这里，m，M 分别称为 $f(x)$ 在 D 上的下界和上界.

3. 周期性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在常数 $T>0$，使得对任意 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 通常，如果满足上述条件的 T 存在最小的正数，则称这个最小的正数为此周期函数的**周期**，即周期通常说的是最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数. 前面例 6 中的狄利克雷函数也是周期函数，但它没有最小正周期.

4. 奇偶性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，且对任意 $x\in D$ 有 $-x\in D$. 若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数. 例 3 中的函数是偶函数，例 4 中的函数是奇函数.

例 8 证明函数 $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ 是有界函数.

证 函数的定义域是 $\mathbf{R}$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $1\leqslant\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}<2$，所以 $\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ 是有界函数.

例 9 讨论函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 函数的定义域是 $\mathbf{R}$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

1.5 反函数与复合函数

1. 反函数

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，$Z=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$. 若对 Z 中的任意点 y，在 X 中都有唯一的 x 满足 $y=f(x)$，则得到一个定义在 Z 上的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 在 X 上的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z$.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以函数 $y=f(x)$ 的反函数通常记为 $y=f^{-1}(x)$.

由定义 1.6 易知，函数 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，因而通常称 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称(同一坐标系下). 如 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln x$，见图 1-6.

例 10 求函数 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ 的反函数.

解 函数 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ 的定义域是 $x\neq-2$，解出 x 得 $x=-\dfrac{2y+1}{y-1}$，所以反函数是

$$y=-\frac{2x+1}{x-1},\quad x\neq 1.$$

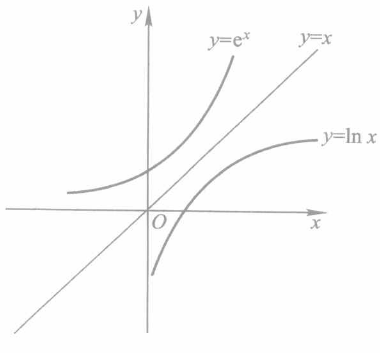

图 1-6

2. 复合函数

定义 1.7 设函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$ 和 $u=g(x)$，$x\in D_g$，$u\in R_g$. 若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则函数 $y=f[g(x)]$，$x\in\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}$ 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为**中间变量**.

例 11 求函数 $y=\sin(u+1)$ 和 $u=\sqrt{x-2}$ 的复合函数.

解 显然 $y=\sin(u+1)$ 的定义域是 $D_f=\mathbf{R}$，$u=\sqrt{x-2}$ 的定义域和值域分别是 $D_g=\{x\mid x\geqslant 2\}$ 和 $R_g=\{u\mid u\geqslant 0\}$，$R_g\cap D_f=R_g$，因此所求复合函数是

$$y=\sin(\sqrt{x-2}+1),\quad x\in\{x\mid x\geqslant 2\}.$$

1.6 初等函数

1. 基本初等函数

通常把下面六类函数称为**基本初等函数**.

(1) 常数函数 $y=C$(C 为常数)

定义域为$(-\infty,+\infty)$，函数为偶函数，图形为平行于 x 轴的直线，如图 1-7.

图 1-7

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$

定义域随 α 的不同会有所变化，但无论 α 为何值，幂函数的定义域都包含$(0,+\infty)$，并且图像都通过$(1,1)$点. 例如，$y=x^2$ 和 $y=x^3$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，$y=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$，$y=\dfrac{1}{x}$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $y=x^3$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$都是奇函数，$y=x^2$ 是偶函数；$y=x^3$ 和 $y=\sqrt{x}$都是单调增函数；$y=x^2$ 的单调减区间是$(-\infty,0)$，单调增区间是$(0,+\infty)$；$y=\dfrac{1}{x}$的单调减区间是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 这几个幂函数都是很重要的函数，如图 1-8.

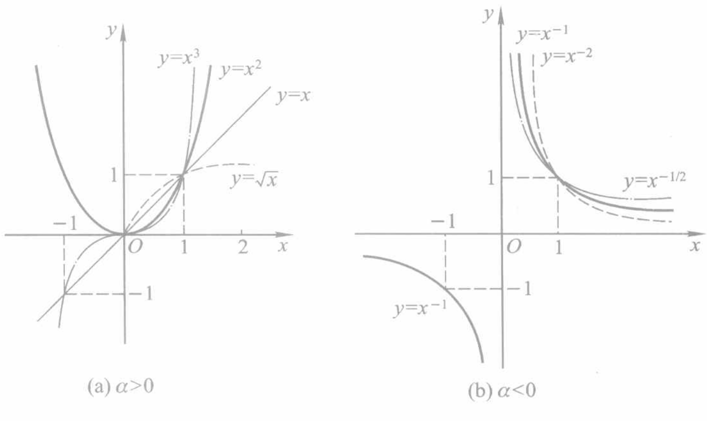

图 1-8

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，函数曲线都通过$(0,1)$点；当$a>1$时函数单调增加，当$0<a<1$时函数单调减少，如图1-9.

（4）对数函数$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

对数函数$y=\log_a x$和指数函数$y=a^x$互为反函数. 对数函数的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，函数曲线都通过$(1,0)$点；当$a>1$时函数单调增加，当$0<a<1$时函数单调减少，如图1-10.

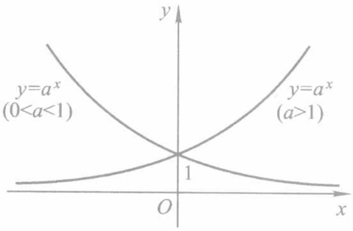

图1-9

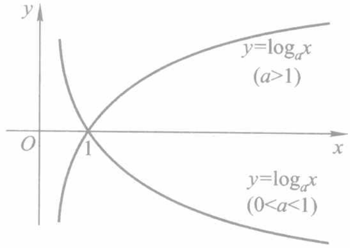

图1-10

（5）三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$

$y=\sin x$和$y=\cos x$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，值域都是$[-1,1]$，都是以2π为周期的周期函数，也都是有界函数. $y=\sin x$是奇函数，$y=\cos x$是偶函数. $y=\tan x$的定义域是$D=\left\{x\middle|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域是$(-\infty,+\infty)$，是以$\pi$为周期的周期函数，是奇函数；$y=\cot x$的定义域是$D=\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域、周期、奇偶性都与$y=\tan x$相同. $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$的图像如图1-11.

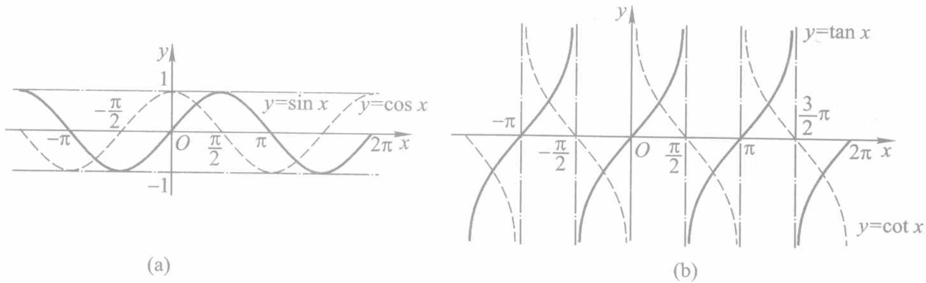

图1-11

（6）反三角函数$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

$y=\arcsin x$是$y=\sin x$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$的反函数，定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调增函数；$y=\arccos x$是$y=\cos x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$的反函数，定