

高等学校教学用书

船舶结构力学(二)

板与圆筒形壳的 弯曲及稳定性

Я. И. 考罗特金

A. З. 劳克辛 著

Н. Л. 西维尔斯



北京科学教育编辑室

高等学



板与圆筒形壳的 弯曲及稳定性

(船舶结构力学)

Я. И. 考罗特金

A. B. 劳克辛著

И. Л. 西维尔斯

陈铁云 张孝鏞 李学道译

北京科学教育編輯室

本書系根据苏联国立造船工業出版社 (Государственное союзное издательство судостроительной промышленности) 1950 年出版的考罗特金 (Я. И. Короткин) 劳克辛 (А. З. Локшин) 和西維尔斯 (Н. Л. Сиверс) 合著“板与圓筒形壳的弯曲及稳定性 (船舶結構力学)” [Изгиб и устойчивость пластин и круговых цилиндрических оболочек (строительная механика корабля)] 譯出。原書經苏联高等教育部多科性工学院与机器制造高等学校主管司审定为造船学院与造船系的教学参考書。

本書內容为矩形板和圓筒形壳的弯曲及稳定性的計算理論, 可供造船学院船舶制造系学生學習“船舶結構力学”課程的第二部分时作为教学参考書, 也可供造船工程师进行船舶結構的強度計算时利用。

本書系由陈鉄云、張孝鏞及李学道三人合譯, 并經互校, 最后由陈鉄云总校, 其分工如下: 序、第一章、第五章——李学道譯, 張孝鏞校; 第二章——陈鉄云譯, 李学道校; 第三章、第四章——張孝鏞譯, 陈鉄云校。

船舶結構力学(二)

板与圓筒形壳的弯曲及稳定性

Я. И. 考罗特金, А. З. 劳克辛, Н. Л. 西維尔斯著

陈鉄云 張孝鏞 李学道譯

北京科学教育編輯室出版

中华书局上海厂印刷

新华书店上海发行所发行

开本: 787×1092 1/32 印張: 10 14/16 字数: 261,000

印数: 5,201—6,000

1958年2月第1版 1964年8月上海第6次印刷

定价: 1.32 元

序

本書是完全按照苏联高等教育部批准的“船舶結構力学”課程教学大綱編撰的,書中包括該課程的第二部分,即“板与圓筒形壳的弯曲及穩定性”。

本課程总的內容在 1953 年出版的“杆件与杆系的弯曲及穩定性”一書的緒論中已經叙述过。

在編写本書时著者們曾大量地利用 И. Ф. 伯潑考維奇教授的名著“船舶結構力学”第二部分,以及近年来苏联学者們所得的一些新的解法。

这些在以前出版的教学用書中所沒有反映过的新解法包括:船底板架当作正交各向异性板的近似計算,提出关于防撓材的扭轉剛性对于板的穩定性的影响問題,等等。

第一章和第三章系 И. И. 考罗特金所写,第二章系 А. З. 劳克辛所写,第四章和第五章系 Н. Л. 西維尔斯所写。

著者們將以感謝的心情来接受关于本書的一切批評。

目 录

序

第一章 按筒形面挠曲的板的复杂弯曲	1
§1. 概述。研究板的弯曲对于船舶结构力学的意义	1
§2. 按筒形面挠曲的板的弯曲, 以及梁的弯曲理论对它的推广	3
§3. 纵向力对于板断面中总应力的影响	10
§4. 具有初挠度的板的复杂弯曲	13
§5. 用布勃诺夫-迦辽金法求板条梁的弹性线	17
§6. 静不定纵向力的决定。H. Г. 布勃诺夫方程式	20
§7. 方程式(65)和(69)对于连续板的解	24
§8. 参与船舶总弯曲的板的减缩系数	28
§9. 初挠度和横荷重对于板的减缩系数值的影响	31
§10. 对于不参与船舶总弯曲的板的静不定纵向力的决定。计算表格	44
第二章 板的弯曲	52
§1. 要述	52
§2. 直线假设。卡门理论的基本前提	55
§3. 板的中面内的点的变形分量与位移分量间的关系。变形与应力沿着板厚的变化规律	56
§4. 作用在板截面内属于单位宽度截面上的力与力矩	64
§5. 由板中分割出来的单元体的平衡条件。卡门方程式组	68
§6. 板的分类	72
§7. 边界条件	75
§8. 板的变形位能	81
§9. 绝对刚性板的弯曲。应用双三角级数研究自由支持板的弯曲	86
§10. 应用单三角级数研究两个相对的边缘为自由支持时的板的弯曲	93
§11. 在均布荷重作用下四边刚性固定的板的弯曲	115
§12. 板的弯曲要素的数字决定的例题	120
§13. 应用初参数法研究板的弯曲	126

§ 14. 在参数 $\frac{m\pi y}{a}$ 为大值时微分方程式 (210) 的一般积分	132
§ 15. 板的弯曲微分方程式的近似积分	134
§ 16. 应用李兹法研究绝对刚性板的弯曲	148
§ 17. 组合板的弯曲。基本符号及假设	153
§ 18. 组合板的弯曲微分方程式的推导	156
§ 19. 组合板计算的近似法	162
§ 20. 变刚性的组合板的计算	172
§ 21. 有关板的复杂弯曲的一些解。在横荷重及中面内的给定力同时作用时板的弯曲	174
§ 22. 大挠度矩形板的弯曲	186
第三章 矩形板的稳定性	192
§ 1. И. Г. 布勃诺夫关于在两个方向上受压的自由支持板的稳定性的解	192
§ 2. 在一个方向上受压的自由支持板的稳定性	197
§ 3. 两边自由支持的板的稳定性。单三角级数形式的解	201
§ 4. 应用能量法研究板的稳定性	208
§ 5. 用防挠材扶强的受压板的稳定性	212
§ 6. 压应力按直线规律分布的板的稳定性	222
§ 7. 在切应力作用下的板的稳定性	226
§ 8. 用防挠材扶强的板在剪切时的稳定性	230
§ 9. 防挠材的扭转刚度对板稳定性的影响	237
§ 10. 不符合虎克定律的情形对板稳定性的影响	244
§ 11. И. Ф. 伯兹考维奇关于在若干荷重(每一荷重都可能导致稳定性的丧失)作用下的弹性体系之稳定性的定理	247
§ 12. 丧失稳定性的板的减缩系数	251
§ 13. 板在丧失稳定性以后的工作情况	252
§ 14. И. Ф. 伯兹考维奇对 И. А. 索柯洛夫解的加工。确定减缩系数的实用方法	262
第四章 圆筒形壳的弯曲	266
§ 1. 基本概念和假设	266
§ 2. 处在均匀压力作用下的封闭圆筒形壳的弯曲微分方程式及其积分	269
§ 3. 以等间距的同一防挠材扶强之受均匀载荷圆筒形壳的弯曲问题的解	275
§ 4. § 3 中所讨论的问题的近似解	286
§ 5. 以防挠材扶强的圆筒形壳弯曲的实际计算	288

第五章 环、圆筒形壳和曲板的稳定性	293
§1. 圆筒形壳的变形位能。圆筒形壳的位移和变形间的关系	293
§2. 在均匀压力作用下的等断面圆环的稳定性	302
§3. 在均匀压力作用下用圆形肋材加强的封闭圆筒形壳的稳定性。李兹法的应用	307
§4. 各向同性的筒形壳的稳定性	323
§5. 在各向同性筒形壳稳定性理论公式中修正系数的引用。筒形壳稳定性的实际计算	328
§6. 沿着母线受压的筒形面板的稳定性	332
参考书目	339
索引	340

第一章 按筒形面撓曲的 板的复杂弯曲

§1. 概述。研究板的弯曲对于船舶結構力学的意义

底面之間的距离較底面尺寸为小的棱柱形彈性体,称为板。

与两个底面等距的点的軌迹,構成板的中面。对中面所树立的垂綫在底面之間的綫段長度,称为板的厚度。

船体重量的很大部分是由外壳板、甲板鋪板、平台和艙壁板所組成的。

从船舶結構力学的观点来看,这些鋼板就是支持在骨架梁上的板。骨架梁構成了板的支持周界。骨架梁在弯曲时的剛性通常远大于板的剛性,所以在研究板的弯曲时就可以当它是支持在剛性的周界上。

在某些情况中可能需要考虑到骨架梁的有限剛性,这就导致研究支持在彈性周界上的板的弯曲。

船舶的板可能承受到兩类荷重:垂直于板面作用而引起板弯曲的荷重和作用在板面內的荷重。

对于船体而言,板的弯曲主要是由于分布在它面上的橫荷重的作用所引起的。在大多数情况中,荷重分布的特性或是接近于均布的(船底板),或是接近于綫性的(船舷板、艙壁)。在个别的情况中,亦可能需要計算受集中荷重或受分布在部分表面上的荷重的板的弯曲。

根据上述可以作出結論:研討板的弯曲对于船体强度的研究

來說是具有重大意義的。同時，無論是在橫荷重作用下板的彎曲，或是在橫荷重和板面內的力共同作用下板的彎曲（複雜彎曲），都有研究的必要。

作用在板面內的力引起沿板厚度均勻分布的應力，這通常稱為懸鏈應力。橫荷重引起彎曲應力的出現，這種應力是沿着板的厚度按綫性規律分布的。

絕大部分的船體板具有矩形的支持周界形狀。如果此支持周界的一邊遠大於另一邊，則板將按筒形面彎曲。

事實上，如果板的支持周界的邊長比超過了 2.5—3 而且它承受均勻的橫荷重，那末除掉與短邊毗鄰的很小一段以外，在板長度的很大一部分上曲率將只在一個方向內。如同下面將指出的，梁的彎曲理論可以直接用來研究這種板的彎曲。

如果板的支持周界的邊長比與一相差很少，那末在它彎曲時曲率在兩個方向中都出現，結果，彈性面的形狀就非常複雜；所有的計算也都相應地複雜化了。

在橫荷重作用下彎曲時，與板架的骨架梁剛性連接的船體板的支持邊緣將要趨近。骨架梁則阻礙這種接近；因此，在板中除了彎曲應力以外，還產生沿着它厚度均勻分布的應力。懸鏈應力也稱為支撐應力，而阻礙板的支持邊緣趨近的構件本身就稱為支撐。要知道，在船體板中的懸鏈應力不僅能由於支撐的存在而產生，而且能由於板參與船舶的總彎曲而產生。

懸鏈應力對於板的彎曲特性的影響，對於各種不同的板可能是十分不同的。這取決於板的平面尺度之間以及與板的厚度之間的比值，亦取決於橫荷重的值以及一系列別的因素。

依據工作特性可將船體板分成下列幾類。

1. 彎曲時懸鏈應力對於彎曲要素的影響可以忽略的板。這種板以後將稱為絕對剛性板。

2. 弯曲时悬鏈应力对于弯曲要素的影响不可忽略的板。这种板將称为有限刚性板。

应当指出, 只有根据計算才能將板归入到这类或是那类中去。因此, 同一塊板, 根据作用在它上面的縱荷重的大小, 可能弯曲如绝对刚性板, 亦可能弯曲如有限刚性板。

研究在两个方向中具有曲率的板弯曲的一般情形, 牽涉到很大的数学上的困难。解决按筒形面撓曲的板的弯曲問題就簡單得多了。考虑到这一点, 我們將从这题目开始来研究板的弯曲問題。

§ 2. 按筒形面撓曲的板的弯曲, 以及梁的弯曲理論对它的推广

我們来討論支持在刚性矩形周界上的等厚度 h 的板, 此周界在平面中的一个尺寸远較另一个为大 (圖 1)。

設此板承受均布的荷重, 在單位面积上的荷重值为 $p^{\text{①}}$ 。显然, 这种板在它自己的中央部分, 即在

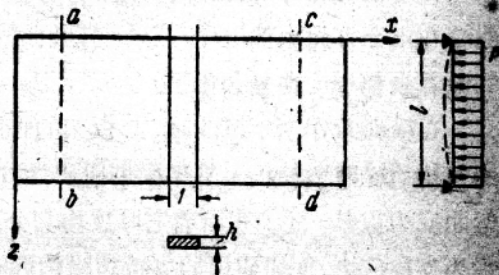


圖 1.

断面 ab 和 cd 之間, 將按筒形面弯曲。換句話說, 板在中央的一部分內在 xy 面中不会有曲率。

由于这个緣故, 該板的弯曲特性可由自板中假想地切出任意一板条梁的弯曲來說明, 如圖 1 中所示。

从板中切出的板条梁的弯曲条件, 与独立地弯曲的板条梁唯

① 我們只限于討論 $p = \text{常数}$ 的情况, 虽然下述的理論在 $p = p(x)$ 时也仍然是正确的。

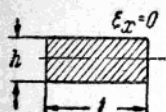


圖 2.

一不同之处就是：前者由于相鄰板条梁的影响，弯曲后的横断面形状并没有歪扭（圖 2）。

在板中弯曲的板条梁的横断面不歪扭的条件，在于它的纖維在 ox 軸方向中的綫变形等于零，即

$$\varepsilon_x = 0. \quad (1)$$

利用平面应力状态的虎克定律，它可写如[見公式(124)]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 σ_z —在垂直于 oz 軸的断面内的正应力；

σ_x —在垂直于 ox 軸的断面内的正应力；

μ —泊松系数。

那么，設 $\varepsilon_x = 0$ ，就得到

$$\sigma_x = \mu\sigma_z. \quad (3)$$

將公式(3)代入(2)式中，就得

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu^2\sigma_z) = \frac{\sigma_z}{E}(1 - \mu^2). \quad (4)$$

設

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad (5)$$

可看出，在組成板的板条梁弯曲时，弯曲应力与它纖維的綫变形間存在着和梁一样的关系，只不过公式(5)所决定的相当彈性模数 E_1 代替了彈性模数 E 的地位。

以后我們將討論寬度等于一的板条梁。这样，在按筒形面弯曲的板的断面中，所有的內力將被認為是屬於單位寬度的。所以，板条梁彈性綫的基本微分方程式將为

$$E_1 \frac{1 \cdot h^3}{12} v'' = M, \quad (6)$$

式中 $\frac{1 \cdot h^3}{12}$ — 單位寬度的板条梁的断面慣性矩。

設

$$D = E_1 \frac{h^3}{12} = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (7)$$

就得到

$$D v'' = M \quad (8)$$

来代替(6)式。

数值 D 称为板的筒形刚度, 它代表在板中弯曲的單位寬度板条梁的刚度。考虑到弯矩 M 是属于板的單位寬度的, 并且將(8)式微分兩次, 就得

$$D v^{IV} = p. \quad (9)$$

方程式(9)就是承受均布荷重的單位寬度板条梁的彈性綫微分方程式。

如果按筒形面撓曲的板承受复杂弯曲, 則在單位寬度的板条梁断面內縱向力的数值將为

$$T = h p_{\text{нх}}, \quad (10)$$

式中 $p_{\text{нх}}$ — 作用在板中面內的应力, 拉伸时作为正。

按筒形面撓曲承受均布荷重的板的复杂弯曲微分方程式为

$$D v^{IV} - T v'' = p. \quad (11)$$

現在写出均載板条梁的弯曲要素的主要計算式如下(坐标原点取在跨度的中点) [4] ① ②。

1. 板条梁的兩端自由支持在剛性支座上。

跨度中点的撓度

$$v_{x=0} = \frac{5}{384} \cdot \frac{p l^4}{D} f_0(u). \quad (12)$$

① 我們以 D 代替刚度 EI 并且以 p 代替荷重强度 q 。

② 凡帶有方括号的数字系表示書末所列参考書目的序号——譯者注。

支座断面的轉角

$$v'_{z=\pm 0.5l} = \pm \frac{pl^3}{24D} \psi_0(u)。 \quad (13)$$

跨度中点的弯矩

$$M_{z=0} = -\frac{pl^2}{8} \varphi_0(u)。 \quad (14)$$

2. 板条梁的兩端剛性固定。

跨度中点的撓度

$$v_{z=0} = \frac{1}{384} \frac{pl^4}{D} f_1(u)。 \quad (15)$$

支座断面中的弯矩

$$M_{z=\pm 0.5l} = \frac{pl^2}{12} \chi(u)。 \quad (16)$$

跨度中点的弯矩

$$M_{z=0} = -\frac{pl^2}{24} \varphi_1(u)。 \quad (17)$$

公式 (12)—(17) 中的 И. Г. 布勃諾夫輔助函数是用来考虑縱向拉伸力对于弯曲要素的影响。

参数 u 由下式决定 ([4], 第 359 頁)

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{T}{D}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{hp_{\text{нп}}}{Eh^3} 12(1-\mu^2)} , \quad (18)$$

或者, 取 $\mu=0.3$, 得

$$u = 1.65 \frac{l}{100h} \sqrt{\frac{p_{\text{нп}} \cdot 10^4}{E}}。 \quad (18')$$

如果縱向力 T 为压缩力, 則参数 u 变为虚数。

在教程 [4] 的第七章內曾指出, 在这种情况下对于縱向拉伸力所用的 И. Г. 布勃諾夫函数应相应地换以函数 $f_0^*(u^*)$, $\psi_0^*(u^*)$, $\varphi_0^*(u^*)$, $f_1^*(u^*)$, $\chi^*(u^*)$ 和 $\varphi_1^*(u^*)$, 式中

$$u^* = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{T^*}{D}} , \quad (19)$$

T^* —縱向压缩力的绝对值。

如所周知,参数 u 的数值表征着在复杂弯曲条件下的杆件对于縱軸向力影响的敏感性。自公式 (18) 中可看到,对于板条梁来说, $\frac{l}{h}$ 比值愈大,亦即板的跨度与其厚度之比愈大,则这种对于縱向力的敏感性也就愈大。

下面列有 И. Г. 布勃諾夫輔助函数的表格(表 1—3)。

根据这些表格,当 $\frac{l}{h}=100$ 和 $p_{\text{max}}=1000$ 公斤/公分² 时可得

$$u=1.65\sqrt{\frac{10}{2}}=3.7。$$

表 1.

u	$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi(u)$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.5	0.908	0.976	0.905	0.972	0.984
1.0	0.711	0.909	0.704	0.894	0.939
1.5	0.532	0.817	0.511	0.788	0.876
2.0	0.380	0.715	0.367	0.673	0.806
2.5	0.281	0.617	0.268	0.563	0.736
3.0	0.213	0.529	0.200	0.467	0.672
3.5	0.166	0.453	0.153	0.386	0.614
4.0	0.132	0.388	0.120	0.320	0.563
4.5	0.107	0.335	0.097	0.267	0.519
5.0	0.088	0.291	0.079	0.224	0.480
5.5	0.074	0.254	0.066	0.189	0.446
6.0	0.063	0.223	0.055	0.162	0.417
6.5	0.054	0.197	0.047	0.139	0.391
7.0	0.047	0.175	0.041	0.121	0.367
7.5	0.041	0.156	0.036	0.106	0.347
8.0	0.036	0.141	0.031	0.093	0.328
8.5	0.032	0.127	0.028	0.083	0.311
9.0	0.029	0.115	0.025	0.074	0.296
9.5	0.026	0.105	0.022	0.066	0.283
10.0	0.024	0.096	0.020	0.060	0.270
10.5	0.021	0.088	0.018	0.054	0.259
11.0	0.020	0.081	0.017	0.050	0.248
11.5	0.018	0.075	0.015	0.045	0.236
12.0	0.016	0.069	0.014	0.042	0.229

附注 函数 $\psi_0(u)$, $\psi_1(u)$ 和 $\psi_2(u)$ 未組成表格, 因为 $\psi_0(u)=f_1(2u)$; $\psi_1(u)=\chi(2u)$; $\psi_2(u)=\varphi_1(2u)$ 。

表 2.

u^*	$\varphi_1^*(u^*)$	$\chi^*(u^*)$	$f_1^*(u^*)$	u^*	$\varphi_1^*(u^*)$	$\chi^*(u^*)$	$f_1^*(u^*)$
0.00	1.000	1.000	1.000	2.40	2.6595	1.8854	2.3822
0.50	1.0300	1.0171	1.0256	2.45	2.8404	1.9786	2.5307
1.00	1.1304	1.0737	1.1113	2.50	2.0502	2.0864	2.7027
1.10	1.1617	1.0912	1.1379	2.55	3.2964	2.2124	2.9043
1.20	1.1979	1.1114	1.1636	2.60	3.5890	2.3617	3.1435
1.30	1.2396	1.1345	1.2039	2.65	3.9422	2.5415	3.4320
1.40	1.2878	1.1610	1.2445	2.70	4.3766	2.7619	3.7863
1.50	1.3434	1.1915	1.2914	2.75	4.9233	3.0386	4.2317
1.60	1.4078	1.2268	1.3455	2.80	5.6315	3.3964	4.8082
1.70	1.4820	1.2673	1.4085	2.85	6.5865	3.8774	5.5852
1.80	1.5710	1.3147	1.4821	2.90	7.9343	4.5550	6.6798
1.90	1.6750	1.3704	1.5689	2.95	9.9915	5.5875	8.3503
2.00	1.7993	1.4365	1.6722	3.00	13.506	7.3686	11.201
2.10	1.9494	1.5157	1.7967	3.05	20.863	11.031	17.168
2.20	2.1336	1.6124	1.9492	3.10	45.923	23.566	37.484
2.30	2.3641	1.7325	1.1392	π	∞	∞	∞

附注 函数 $\psi_0^*(u^*)$, $\psi_1^*(u^*)$ 和 $\psi_2^*(u^*)$ 未組成表格, 因为 $\psi_0^*(u^*) = f_1^*(2u^*)$; $\psi_1^*(u^*) = \chi^*(2u^*)$; $\psi_2^*(u^*) = \varphi_1^*(2u^*)$ 。

表 3.

u^*	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
$\varphi_0^*(u^*)$	1.000	1.004	1.016	1.038	1.073	1.117	1.176	1.255	1.361
$f_0^*(u^*)$	1.000	1.004	1.016	1.037	1.040	1.114	1.173	1.250	1.354
u^*	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.45	1.50	$\pi/2$
$\varphi_0^*(u^*)$	1.504	1.704	1.989	2.441	3.240	4.938	6.940	11.760	∞
$f_0^*(u^*)$	1.494	1.690	1.962	2.400	3.181	4.822	6.790	11.490	∞

对于端点刚性固定的板条梁, 辅助函数的值将为

$$f_1(u) = 0.4; \quad \varphi_1(u) = 0.35; \quad \chi(u) = 0.59,$$

而对于端点自由支持的板条梁则将为

$$f_0(u) = 0.145; \quad \psi_0(u) = 0.160; \quad \varphi_0(u) = 0.145。$$

因此, 处于复杂弯曲条件下承受均布荷重的板的所有弯曲要素, 将较無縱向力时的弯曲要素减小很多。对于縱向力的作用自

由支持的板要比剛性固定的板更显得敏感些。

在給定的 $p_{\text{нл}}$ 下繼續增加比值 $\frac{l}{h}$, 將导致弯曲要素更激烈的减小。

如果板的 $\frac{l}{h}$ 比值相当小, 則参数 u 的数值亦將很小, 并且所有的 И. Г. 布勃諾夫輔助函数將差不多等于一。这就是說, 当 $\frac{l}{h}=40$ 和 $p_{\text{нл}}=1000$ 公斤/公分² 时剛性固定板的

$$u=1.5; f_1(u)=0.817; \varphi_1(u)=0.788; \chi(u)=0.876。$$

对于同它一样的板在自由支持的情形时, 輔助函数將距离一还很远。

如果在上述例題中悬鏈应力是压縮应力, 且等于 $p_{\text{нл}}=-1000$ 公斤/公分², 則当 $\frac{l}{h}=100$ 时这两种板都已失去稳定性。当 $\frac{l}{h}=40$ 时剛性固定的板的 $\varphi_1^*(u^*)=1.3434\ominus$, 而自由支持的板的 $\varphi_0^*(u^*)=11.76$ 。根据表 2 和 3, 一般可作出結論如下: 压縮力总是使板的弯曲要素增加。

誠然, 在絕對剛性板和对縱向力的作用敏感的板(称为有限剛性板)之間, 很难規定一个明确的界限。实用上認為, 复杂弯曲的輔助函数距一不大于 10—15% 的板, 可归屬於絕對剛性板。

在板(或板条梁)橫断面中的总应力, 將由沿厚度均布的悬鏈应力 $p_{\text{нл}}$ 和按下式^①

$$p_{\text{нлг}} = -\frac{My}{I}$$

成綫性規律地沿厚度分布的弯曲应力 $p_{\text{нлг}}$ 相加而成。

因此, 总应力(圖 3)

① 原書此数值誤为 1.288, 現已改正——譯者注。

① 此处 $I = \frac{h^3}{12}$; 板的弯曲应力的符号与本書第二章中所用的不同。



圖 3.

$$\sigma = p_{\text{пл}} + p_{\text{изг}} = p_{\text{пл}} - \frac{My}{I}. \quad (20)$$

在 $y = \pm \frac{h}{2}$ 处的边缘纖維中,得

$$p_{\text{изг}} = \mp \frac{6M}{h^2},$$

式中 $\frac{h^2}{6}$ —單位寬度的板条梁的断面模数;

$$\sigma = p_{\text{пл}} \mp \frac{6M}{h^2}. \quad (21)$$

計算剛性板的 M 值时应不考虑复杂弯曲的影响。

§ 3. 縱向力对于板断面中总应力的影响

由于最大弯曲应力在板断面的边缘纖維中具有不同的符号,所以不管悬鏈应力 $p_{\text{пл}}$ 的符号如何,在其中一个边缘纖維中將产生应力 $p_{\text{пл}}$ 与 $p_{\text{изг}}$ 的算术和。

如果縱向力是压縮的,則在它增加时总应力总是增加,因为随着 $p_{\text{пл}}$ 的增加在板断面中的弯矩亦增加,因而应力 $p_{\text{изг}}$ 也就增加。反之,在縱向拉伸力增加时应力 $p_{\text{изг}}$ 將(在給定的橫荷重值下)减少。

所以可以發現,尽管 $p_{\text{пл}}$ 增加,板中的总应力將在 $p_{\text{пл}}$ 增加的某个范围內反而减少。为了說明这个,我們現在来研究縱向拉伸力的变化对于板断面中总应力值的影响。

現在討論周界自由支持的均匀荷载的板。

根据公式(18)悬鏈应力 $p_{\text{пл}}$ 的值为

$$p_{\text{пл}} = \frac{Ek^2}{3(1-\mu^2)l^2} u^2. \quad (22)$$

此时的最大总应力等于

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{Ek^2}{3(1-\mu^2)l^2} u^2 + \frac{6pl^2}{8h^2} \varphi_0(u). \quad (23)$$