

高等学校统编教材

内燃机轴系扭转振动

王 祺 主编

国防工业出版社

135
 (10) E.O. ...
 (11) ...
 (12) W. A. Top ...
 (13) ...
 (14) ...
 (15) ...
 (16) ...
 (17) ...
 (18) ...
 (19) ...

内燃机轴系扭转振动

王 棋 主编

本书是作者多年从事内燃机轴系扭转振动研究的经验总结，也是作者多年从事内燃机轴系扭转振动研究的经验总结。本书共分五章，第一章介绍内燃机轴系扭转振动的基本概念，第二章介绍内燃机轴系扭转振动的计算方法，第三章介绍内燃机轴系扭转振动的实验方法，第四章介绍内燃机轴系扭转振动的减振措施，第五章介绍内燃机轴系扭转振动的工程应用。本书可作为高等院校机械专业及相关专业的教材，也可供从事内燃机轴系扭转振动研究的工程技术人员参考。

江苏工业学院图书馆
藏书章

内燃机轴系扭转振动

王 棋 主编

机械工业出版社

机械工业出版社

北京机械工业出版社

北京机械工业出版社

1587 × 1092 1/32 328千字

机械工业出版社

内燃机轴系扭转振动

本书系根据编者多年来从事内燃机轴系扭转振动的教学实践编著而成。

结合国内目前的发展情况，书中除介绍扭振的基本理论、扭振当量系统转化、自由振动计算、强制振动计算及常规的测试和分析技术方法外，还增加了有关矩阵分析方法以及新的测试和分析技术，同时着重阐述如何解决工程中的实际扭振问题，使读者达到理论与实践相结合的目的。

本书为大专院校内燃机专业或船舶动力装置专业的通用教材，或教学参考书，也可供从事内燃机和船舶动力装置设计、制造与使用的技术人员参考。

内燃机轴系扭转振动

王 祺 主编

责任编辑 方 商

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张11¹/₄ 259千字

1985年11月第一版 1985年11月第一次印刷 印数：0,001—2,700册

统一书号：15034·3009 定价：2.35元

前 言

本书系根据一九八二年七月全国高等院校“船舶动力类专业”教材审编小组会议通过的《内燃机轴系扭转振动》大纲编写的。可作为高等院校内燃机专业或船舶动力装置专业本科通用教材。计划教学时数为40学时。

在编写前，参加会议的各院校代表交流介绍了各校有关“内燃机轴系扭转振动”讲义的内容、教学情况和教学经验，为统编教材做了充分的准备工作。根据已有资料，结合国内目前的发展，并按照教材审编小组会议拟定的教学大纲精神，最后编写了本书。

全书共七章。编写的主导思想是加强学生对“内燃机轴系扭转振动”这门学科基础理论的培训，同时介绍一些工程中碰到的实际问题 and 处理方法，借以达到理论与实践相结合的目的。本书按照少而精的原则，删去了一些内容，例如在其它参考书或手册中易于查到的图表、资料及一般的计算实例等。同时，增加了有关矩阵分析方法在扭转振动中的应用以及新的测试和分析技术等，以更新教学内容。

参加本书编写的单位和同志是：

大连工学院 王祺同志（第一章、第七章）；

刘玉琿同志（第二章）；

华中工学院 应启光同志（第三章、第五章）；

武汉水运工程学院 杨绳祖同志（第四章、第六章）。

大连工学院王祺同志担任主编。上海交通大学朱孟华副教授担任主审。

由于编写时间仓促，书中难免存在缺点和错误。希望读者提出宝贵意见，以便再版时订正。

编 者

目 录

绪言	1
第一章 扭转振动的基本理论	3
§ 1.1 单质量系统的扭转振动——扭摆	3
§ 1.2 双质量及三质量系统的自由扭转振动	17
第二章 扭转振动的计算模型及当量转化	23
§ 2.1 扭转振动的计算模型	23
§ 2.2 弹性参数的当量转化	24
§ 2.3 惯性参数的当量转化	35
§ 2.4 增、减速系统的当量转化	43
第三章 内燃机轴系的自由扭转振动计算	45
§ 3.1 多质量系统的自由扭转振动方程	45
§ 3.2 自由扭转振动的计算方法	50
第四章 内燃机轴系扭转振动的激振及阻尼	66
§ 4.1 内燃机轴系装置激振的来源及其分析	66
§ 4.2 内燃机的激振及其计算	66
§ 4.3 多缸内燃机的激振及相对振幅矢量和	82
§ 4.4 内燃机轴系装置阻尼的分析及计算	89
第五章 内燃机轴系强制扭转振动计算	97
§ 5.1 多质量系统的强制扭转振动方程	97
§ 5.2 强制扭转振动的计算方法	101
§ 5.3 内燃机轴系轴段扭振应力的确定及其许用值	121
第六章 扭转振动的测试和分析	131
§ 6.1 扭转振动测试仪器的基本原理及其类型	131
§ 6.2 扭转振动测试的测点布置	137
§ 6.3 扭转振动测试结果分析	138
第七章 避振与减振	154
§ 7.1 避振与减振方法概述	154
§ 7.2 扭振减振器的种类及其基本作用原理	163
参考文献	174

绪 言

内燃机轴系的扭转振动是影响该动力装置安全运行的重要动力性能之一。因此世界多数国家的船舶检验机构规定：“大于 150 马力的内燃机装置的扭转振动计算和测量资料必须向该组织机构提出审批”。当扭转振动各项数据超出规范限值时，不准出厂使用。我国船舶检验机构也有上述规定。由此可见，内燃机轴系扭转振动这门科学在内燃机研究设计工作中占有重要的地位。它已成为参加这方面工作的技术人员必须掌握的理论知识。

内燃机的扭转振动是机械振动学科的一个分支，是内燃机动力学的一部分。在热动力装置发展初期，由于当时技术水平的限制，在相当长的一段时间内，在轴系的强度设计工作中，是把轴系按绝对刚性体来处理的。当时认为，轴系中应力的变化完全取决于载荷或其受力情况。但在十九世纪末，在工业发达国家对内燃机的广泛应用后，由于在动力、海陆交通运输部门所使用的内燃机装置中，各种断轴事故不断发生，这就促使研究设计人员和工程师们，从实践中认识到，将轴系作为绝对刚性体来处理显然是不合理的。必须作为弹性体系进行研究。正是由于轴系具有弹性，它的存在将产生扭转振动，造成各种断轴事故，从而导致对这项工作深入的理论研究和测量。

从十九世纪末到二十世纪初，各种断轴事故的分析报告及有关文章逐渐出现，对于轴系扭转振动的研究也逐渐深入。一九一六年在德国盖格尔（Geiger）发表了用机械式盖格尔振动仪测量轴系扭转振动的文章后，扭转振动的研究开始了实测和试验阶段。到二十世纪五十年代，扭转振动的研究逐渐成熟，并成为内燃机动力装置的重要研究内容之一。

轴系装置之所以能产生扭转振动，其内因是轴系本身不但具有惯性，而且还具有弹性，由此确定了其固有的自由扭振特性。而外因则是作用在轴系上、周期性变化的激振力矩，该力矩是产生扭振的能量来源。对于内燃机装置来说，激振力矩主要来自：1）气缸内气体压力产生的激振力矩；2）吸收功率部件所吸收的扭矩因不是定值而产生的激振力矩，如泵、螺旋桨等等。轴系按激振的频率进行强制振动，当激振频率与轴系固有频率相同时，就会产生“共振”现象，当扭振应力超过轴系所能承受的应力时，轴系将发生断裂。可见，研究轴系扭转振动，首先要分析轴系装置的扭转振动特性，在什么情况下将会发生危险以及掌握如何避免这种危险的实际措施。

有关轴系扭转振动的理论分析、计算和数值解法等问题的研究，目前已有比较完整的方法。其分析过程首先是将内燃机动力装置轴系转换成扭转振动的计算模型——当量系统。转换的基本处理原则是：

1. 惯量较大且较集中的部件作为非弹性惯量元件。
2. 惯量较小而分散的部件作为无惯量的弹性元件。
3. 阻尼分为：作用在弹性元件上的轴段阻尼和作用在惯性元件上的质量阻尼。
4. 激振力矩只作用在惯性元件上。

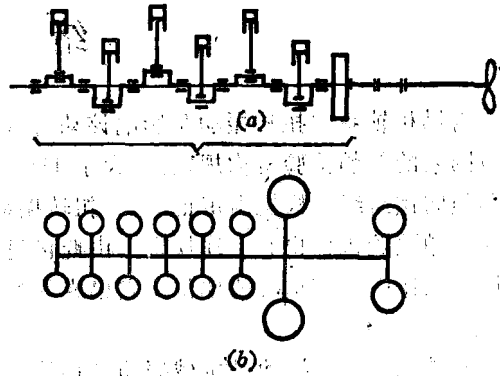
根据上述处理原则将实际轴系转换成集中质量系统——当量系统，如以下附图(a)及(b)所示。这样的计算模型是具有 n 个集中质量的 $2n$ 阶方程组。显然，计算精度将与 n 的增加而更趋精确。但是质量个数 n 分得越多，将会引起繁重的计算工作量。

多质量系统的自由扭转振动计算，目前仍普遍地应用霍尔茨(Holzer)表格法或托列(Tolle)表格法。其次，是系统矩阵法，传递矩阵法等。多质量系统的强制扭转振动计算，目前普遍地采用能量法和放大系数法、系统矩阵法、传递矩阵法等。在电子计算机普及以前，为了避免对 $2n$ 阶方程组直接求解，大多采用共振与非共振分别运算的方法，其中包括能量法与放大系数法两种常用方法。从基本原理上说，这两种方法是完全一致的，都是建立在能量平衡的基础上，同属于共振计算的近似方法。但是分别运算法的重点考虑是共振工况下的扭振现象。对非共振区的振幅、应力等的考虑都极为粗糙。随着内燃机装置功率的不断增大，激振能量大大上升，尤其随着大阻尼减振部件的大量应用，对非共振区工况问题的要求更显突出。这就要求对 $2n$ 阶方程组进行综合求解的运算方法。由于目前电子计算机的普及和应用，系统矩阵法、传递矩阵法等对强制扭转振动方程组进行直接求解已是完全可行的了，其计算结果将是与实际轴系的振动形式相似的立体振型，使上述问题也得到了解决。但是，系统矩阵法只能作线性阻尼的计算，即阻尼力矩($M_c = -c\dot{\phi}$)与速度成正比，而能量法与放大系数法则不受限制。

扭转振动计算结果的精确程度是取决于所采用的方法及与之对应的系统参数的精确性。

目前强制振动计算的精确度不如自由振动计算的，其主要原因是作用于轴系上的激振力矩以及轴系的阻尼参数难以准确的确定，尤其是后者，它涉及的因素广泛，以致于想要用纯数学的方法予以精确估算几乎是不可能的。为此，大多采用从实践得到的经验公式，但各种经验公式都有一定局限性，不能完全正确地适用于各种类型的内燃机及其轴系装置，这将使强制振动计算造成较大误差。为了对内燃机轴系的扭转振动特性作出正确的评价，避免扭转振动破坏事故的发生，不仅在设计阶段应进行详细的扭振计算，制造完工后，应及时进行扭振实测。同时，通过大量的扭振实测，可以积累实验数据，使原有的理论不断发展，进而指导新设计的内燃机及其轴系的扭转振动理论计算。可见，扭转振动这门科学的发展也是建立于理论与实践相辅相成互相促进的基础上的。

电子计算机的广泛应用，精密测量分析技术的不断进步，带来了扭转振动研究的新的生命力。内燃机的日趋强化，轴系联接件的不断更新，扭振研究课题的不断深入，如二次振动、偏振、滚振及部分气缸熄火等扭振特性研究工作的逐步深入，所有这些都表明内燃机轴系扭转振动的研究工作必将进一步得到全面开展，并取得新的成就。



附图 由实际轴系转换成的集中质量系统

第一章 扭转振动的基本理论

§ 1.1 单质量系统的扭转振动——扭摆

所谓扭摆，是由一根轴和一个圆盘所组成的单质量扭振系统，轴的一端固定，其自由端装一圆盘。图 1.1 中所示为扭摆及其示意图。扭摆是扭振系统中最简单的形式，对它的分析，可获得有关扭转振动的一些最基本的概念。

为了数学推导的需要，我们首先要将实际的扭摆予以模型化，因为圆盘的变形和轴的惯性都很小，故假定轴只有弹性没有惯性，圆盘只有惯性没有弹性。经过模型化的系统，称为当量系统，如图 1.1(b) 所示。图中 I 表示圆盘的转动惯量 ($N \cdot m \cdot s^2$ 或 $kg \cdot m^2$)； e 表示轴的弹性参数柔度 ($rad/N \cdot m$)。

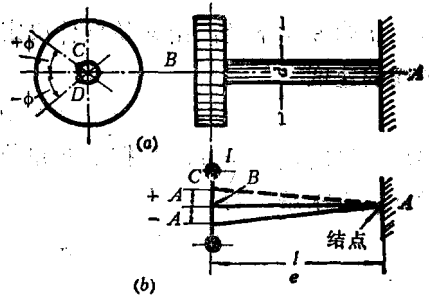


图 1.1

(a) 扭摆；(b) 示意图。

1.1.1 扭摆无阻尼自由振动

1. 运动方程的建立及其解

设在圆盘上加一力偶，使轴扭转一个角度，然后突然撤去这个力偶。由于轴的弹性和圆盘的惯性，这个系统就要产生扭振。因为不考虑阻尼，在 1-1 截面左方的分离体，只作用有圆盘的惯性力矩 S 和轴的弹性力矩 U 。根据虎克定律，可得出轴的扭转角公式

$$\varphi = \frac{Ul}{GJ_p} \quad (\text{rad})$$

式中 l ——轴的长度 (m)；

G ——轴剪弹性模数 (N/m^2)；

J_p ——轴截面极惯性矩 (m^4)。

令 $e = \frac{\varphi}{U}$ ，则得 $e = \frac{l}{GJ_p}$ ，即轴的柔度；

因而有 $U = -\frac{\varphi}{e} \quad (N \cdot m)$

$$S = -I\ddot{\varphi} \quad (N \cdot m)$$

根据达朗贝尔定理

$$S + U = 0$$

即

$$I\ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{Ie} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{令} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{Ie} \quad (1.2)$$

则式 (1.1) 可写成

$$\ddot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = 0 \quad (1.3)$$

这个微分方程的通解为

$$\varphi = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (1.4)$$

由欧拉方程 $e^{i\omega_n t} = \cos \omega_n t + i \sin \omega_n t$ 上式可化为

$$\varphi = a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t \quad (1.5)$$

式中

$$a = C_1 + C_2, \quad b = i(C_1 - C_2)$$

式中 a 和 b 为常数, 由初始条件决定。为了求出常数, 将 (1.5) 式对时间 t 求导可得扭摆的速度

$$\dot{\varphi} = -a\omega_n \sin \omega_n t + b\omega_n \cos \omega_n t$$

设开始计算时刻 $t = 0$, 扭摆的初角位移 $\varphi = \varphi_0$, 初角速度 $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ 。将这些条件代入上式对 a 、 b 求解, 得

$$a = \varphi_0, \quad b = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n};$$

$$\text{令} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{a}{A} = \sin \varepsilon, \quad \frac{b}{A} = \cos \varepsilon$$

所以

$$a = A \sin \varepsilon, \quad b = A \cos \varepsilon$$

将其代入 (1.5) 式, 得

$$\begin{aligned} \varphi &= A [\sin \varepsilon \cdot \cos \omega_n t + \cos \varepsilon \cdot \sin \omega_n t] \\ \varphi &= A \sin(\omega_n t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\text{式中} \quad A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \varepsilon = \text{arctg} \frac{\omega_n \varphi_0}{\dot{\varphi}_0}$$

(1.6) 式是扭摆无阻尼自由振动时, 位移 φ 与时间 t 之间关系的基本公式。

式中 φ ——圆盘角位移 (rad);

A ——圆盘角位移最大值, 即振幅 (rad);

ω_n ——扭摆自然圆频率 (rad/s);

ε ——初相位 (rad)。

2. 扭摆无阻尼自由振动特征

(1) 由式 (1.6) 可见, 扭摆的瞬时角位移 φ 随时间 t 按正弦规律变化。因此, 它属于简谐振动, 可用一参考圆来表示, 如图 1.2 所示。图中 $OB = A$, 以角速度 ω_n 等速回转, 则 OB 在 y 轴上投影就是角位移 $\varphi = A \sin(\omega_n t + \varepsilon)$, OB 回转一周, B 点在 y 轴上的投影 M 在 o 点两侧来回运动一次, 其所需时间, 就是一个周期 τ , 于是

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (\text{s}) \quad (1.7)$$

OB 的角速度就是圆频率 ω_n 。

$$\text{每分钟振动次数} \quad N = \frac{1}{\tau} 60 = \frac{60}{2\pi} \cdot \omega_n \quad (1.8)$$

$$\text{所以} \quad N \approx 9.55 \omega_n \quad (\text{次/分})$$

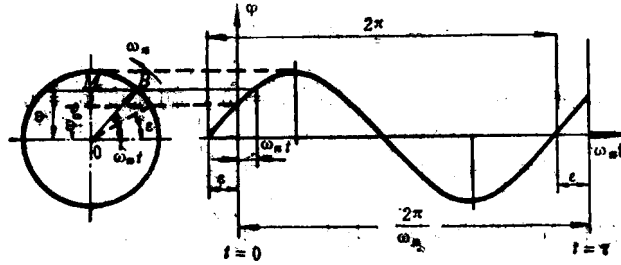


图 1.2

在扭振计算公式中，常用自然圆频率，但在日常分析及讨论中，常用每分钟的振动次数 N ，故式 (1.8) 给出了 N 与 ω_n 的简单换算关系，很有实用价值。因 $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{Je}}$ ，

$e = \frac{l}{GJ_p}$ ，则 $\omega_n = \sqrt{\frac{GJ_p}{Il}}$ ，又因 $J_p \propto D^4$ ，所以， $\omega_n \propto D^2 \sqrt{\frac{G}{Il}}$ ，这就是说，当系统的尺寸和材料确定后，其自振频率 ω_n 就确定了，故自振频率是系统的固有特性； ω_n 与轴的直径 D 的平方成正比。所以，改变轴的直径对系统的自振频率有较大的影响，与轴的剪弹性模数 G 的开方成正比，即当尺寸一样时，钢轴的自振频率比铁轴的自振频率要高； ω_n 还与圆盘的惯性 I 及轴的长度 l 的开方成反比。

(2) 根据 (1.6) 式可得如下关系：

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A \sin(\omega_n t + \varepsilon) \\ \dot{\varphi} &= A \omega_n \sin\left(\omega_n t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{\varphi} &= A \omega_n^2 \sin(\omega_n t + \varepsilon + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

由式 (1.9) 可见，扭摆在某瞬时的角位移 φ ，角速度 $\dot{\varphi}$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}$ 都是简谐运动，因此，都可用参考圆来表示。参考圆回转矢量的模各为 A 、 $\omega_n A$ 及 $\omega_n^2 A$ 。它们之间的相位关系为：速度矢量比位移矢量超前 $\frac{\pi}{2}$ ，加速度矢量比位移矢量超前 π 。因这三个矢量都是以相同的角速度 ω_n 同方向等速回转，故它们之间的相位差是固定不变的，如图 1.3 所示。

(3) 振幅 A 与初相位 ε 的决定因素

当 $t = 0$ 时，(1.6) 式中

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \varepsilon = \arctg \frac{\omega_n \varphi_0}{\dot{\varphi}_0}$$

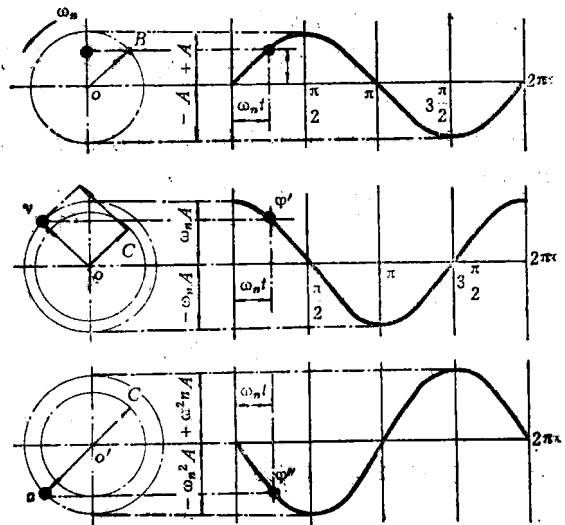


图 1.3

由此可见 A 及 ε 都决定于初始条件 (φ_0 及 $\dot{\varphi}_0$)，这是自由振动的共同特性。

如果我们在扭摆的圆盘上加一个静力偶 M_0 ，则这时圆盘位移为

$$\varphi_0 = \frac{M_0 l}{GJ_p}$$

然后突然取消力偶 M_0 ，并立刻计算时间，这时 $t = 0$ ，初速度 $\dot{\varphi}_0 = 0$

所以

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n}\right)^2} = \varphi_0 = \frac{M_0 l}{GJ_p}$$

由此可见，无阻尼自由振动的振幅 A 大小，取决于初始激振力矩 M_0 ，至于初相位 ε ，完全取决于在什么时候开始计算的时间，故 ε 对振动特性没有影响。

1.1.2 扭摆有限阻尼的自由振动

实际上任何系统经初始激振开始自由振动后，振幅都将逐渐地减小，最终停止下来，它不可能无休止地振动下去。这说明有某些抑制振动的因素存在，它消耗初始激振所给予系统的能量。当能量消耗殆尽时，振动也就停止了。这个对振动起衰减作用的因素统称阻尼，但阻尼的种类不同，对运动的影响也有差异。对扭摆这种情况，阻尼是空气对圆盘运动时的阻力以及轴在扭转变形时材料分子间的摩擦阻力，前者是系统部件与外界介质所产生的摩擦阻力，故叫外阻尼；后者是材料内部分子间的摩擦阻力，故叫内阻尼。扭摆系统主要就是考虑这两种阻尼。它是一种与振动方向相反的抵抗力矩

$$M_c = -C\dot{\varphi} \quad (\text{N}\cdot\text{m}) \quad (1.10)$$

式中 C 为一常数称为阻尼系数，这种阻尼称为线性阻尼。认真的讲，实际系统中的阻尼都不是这样简单，有些只能说是近似线性，有些则完全不是线性，但线性阻尼问题的处理比较方便，而非线性阻尼问题则复杂得多，因而在扭转振动的分析中，除了特殊的情况外，一般都把阻尼力矩假定为与速度成正比，这样可使数学演算大大简化。

当扭摆为有阻尼自由振动时，各力矩的表示则如图 1.4 所示。按达朗贝尔定理

$$S + M_c + U = 0 \quad (1.11)$$

即

$$I\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = 0 \quad (1.12)$$

令 $2n = \frac{C}{I}$ ， $\omega_n = \frac{1}{Ie}$ ，代入上式，得

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega_n^2\varphi = 0 \quad (1.13)$$

这个微分方程式的辅助式为

$$x^2 + 2nx + \omega_n^2 = 0$$

其两个根为 $x_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2}$

故式 (1.13) 的通解为

$$\varphi = C_1 e^{x_1 t} + C_2 e^{x_2 t} = C_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + C_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t}$$

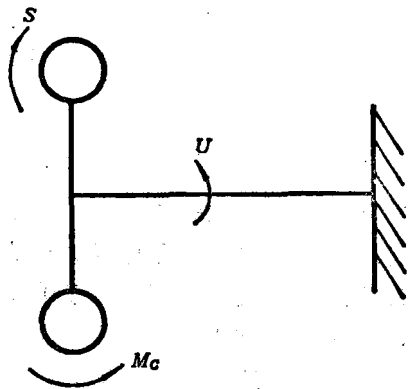


图 1.4

所以
$$\varphi = e^{-nt} [C_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega_n^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega_n^2} t}] \quad (1.14)$$

式中待定常数 C_1 与 C_2 决定于振动的初始条件。式 (1.14) 的性质决定于根式 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是实数、零、还是虚数。当 $n > \omega_n$, 根式 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是实数, 称大阻尼。当 $n < \omega_n$, 根式 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是虚数, 称为小阻尼。两者之间有个过渡状态, $n = \omega_n$, 称为临界阻尼。现分两种情况来讨论:

(1) 当 $n \geq \omega_n$, 这时 x_1 及 x_2 都是负值, 则公式 (1.14) 代表两条衰减指数曲线之和, 它们没有振动的特征, 即这时阻尼很大。当经初始激励后, 扭摆缓慢地回到平衡位置, 而没有产生振动。

(2) 当 $n < \omega_n$, $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 为虚数, 可写为 $i\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$, 则公式 (1.13) 可写成

$$\varphi = e^{-nt} [C_1 e^{(i\sqrt{\omega_n^2 - n^2})t} + C_2 e^{(-i\sqrt{\omega_n^2 - n^2})t}]$$

上式方括号内与公式 (1.4) 的形式完全相同。因此, 经过演化可得与 (1.6) 式完全相似的形态, 即

$$\varphi = e^{-nt} A \sin[\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \varepsilon] \quad (1.15)$$

由 (1.15) 式可知系统振动已不再是等幅的简谐振动, 而是振幅被限制在曲线 $\pm Ae^{-nt}$ 之内, 随时间不断衰减的衰减振动。当 $t \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$, 振动最终将消失。图 1.5 表示这种衰减的正弦波形曲线。初相位 ε 与曲线特性无关。

由公式 (1.15) 及图 1.5 可以看出: 扭摆有阻尼自由振动的频率为

$\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$, 所以, 系统的自振频率不仅与系统的弹性参数 I 和 e 有关, 还受阻尼 n 的影响, 比没有阻尼的固有频率 ω_n 为小。

阻尼对自由振动的影响有两个方面:

(1) 一方面它使系统振动的周期 τ_n 略有增长。

严格地说, 扭摆衰减振动已不是周期运动, 因为扭摆经过一段时间后, 再也不能重复原来的运动。但是衰减振动的周期 τ_n 固定不变, 如下式所示

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} \quad (1.16)$$

由于阻尼的作用, 振动的周期 τ_n 增长了。但因为小阻尼 $n < \omega_n$, 在自然环境中 $\frac{n}{\omega_n} \ll 1$, 所以对周期的影响不大。由 (1.16) 式

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{\omega_n}\right)^2}} = \tau \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{\omega_n}\right)^2}}$$

式中 $\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$ 为无阻尼自由振动的周期。

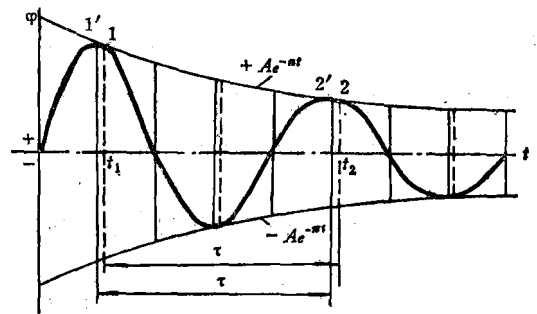


图 1.5

当阻尼比较小时, $\frac{n}{\omega_n} \ll 1$,

$$\tau_n \approx \tau \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (1.17)$$

例如在 $\frac{n}{\omega_n} = 0.05$ 时, $\tau_n = 1.00125 \tau$; 而在 $\frac{n}{\omega_n} = 0.20$ 时, $\tau_n = 1.02 \tau$ 。所以在阻尼较小时, 对周期的影响可以忽略不计。

(2) 另一方面, 振幅按几何级数衰减。

从图 1.5 可见, 横轴上下方的两条对数曲线是衰减正弦曲线的包络线, 曲线与包络线相切的两个相邻点 1 及 2 处的振幅值之比为

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-n t_1}}{Ae^{-n(t_1 + \tau_n)}} = e^{n \tau_n} \quad (1.18)$$

这说明, 振幅按几何级数减小, 因为 $e^{n \tau_n}$ 是个常数。

式中 η 称为减幅系数, n 称为衰减系数。 n 越大表示阻尼越大, 振幅衰减地越快。当 $\frac{n}{\omega_n} = 0.05$ 时, $\eta = 1.37$, $A_2 = \frac{A_1}{1.37} = 0.73 A_1$, 即振动一周后振幅已减少 27%, 可见衰减是显著的。式 (1.18) 两边取对数时, 得 $\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = n \tau_n$ 。

所以

$$n = \frac{1}{\tau_n} \ln \frac{A_1}{A_2} \quad (1.19)$$

公式 (1.19), 对实验工作很有实用价值。因为如果我们用仪器量出 A_1 及 A_2 , 测出 τ_n 就可以求出 n , 也就是求出了阻尼系数

$$C = 2nI$$

公式 (1.18) 对任意两相邻点都是适用的, 因为,

$$\frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdots \frac{A_{k-1}}{A_k} = \frac{e^{-n t_1}}{e^{-n t_2}} \cdot \frac{e^{-n t_2}}{e^{-n t_3}} \cdots \frac{e^{-n t_{k-1}}}{e^{-n t_k}}$$

即

$$\frac{A_1}{A_k} = \frac{e^{-n t_1}}{e^{-n t_k}} = e^{n(t_k - t_1)} = e^{n(k-1)\tau_n}$$

所以

$$n = \frac{1}{(k-1)\tau_n} \ln\left(\frac{A_1}{A_k}\right) \quad (1.20)$$

因此, 可以从两个任意点的 A_1 及 A_k , 测量出两点之间的时间 $t_k - t_1 = (k-1)\tau_n$ 也可以求出阻尼系数。

为使式 (1.19) 便于应用, 现作如下演化:

令

$$\delta = n \tau_n = \frac{2\pi n}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}$$

因为

$$n = \frac{C}{2I}, \quad \omega_n^2 = \frac{1}{Ie}$$

所以

$$\delta = \frac{2n \frac{C}{2I}}{\sqrt{\frac{1}{Ie} - \left(\frac{C}{2I}\right)^2}} = \frac{\pi C}{I \sqrt{\frac{1}{Ie} - \left(\frac{C}{2I}\right)^2}}$$

$$\delta^2 = \frac{\pi^2 C^2}{I - \frac{C^2}{4}}$$

因此得阻尼系数 C

$$C = \sqrt{\frac{1}{e \left[\left(\frac{\pi}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]}} \quad (1.21)$$

由上可见, 从衰减正弦曲线上量得 A_1 及 A_2 后, 求出 $\delta = \ln \frac{A_1}{A_2}$ 值, 代入式 (1.21) 即可求得阻尼系数 C 。式中 I 及 e 为扭摆转动惯量和柔度。在实测中, 可量取波峰值, 即图 1.5 中的 $1', 2', \dots$ 。

1.1.3 扭摆有阻尼强制振动

这是扭摆振动问题中最实际的情况。在系统上作用一持续的激振力矩, 系统被迫按激振力矩频率进行振动, 并存在弱阻尼。阻尼力矩与速度成正比, 力系的组成, 如图 1.6 所示。

按达朗贝尔定理

$$S + M_c + U + T = 0$$

式中 $T = M \sin \omega t$ —— 激振力矩;

M —— 激振力矩的幅值;

ω —— 激振力矩圆频率。

$$\text{所以} \quad I\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = M \sin \omega t \quad (1.22)$$

$$\text{令} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{Ie}, \quad 2n = \frac{C}{I}, \quad h = \frac{M}{I}$$

则式 (1.22) 可写成

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega_n^2\varphi = h \sin \omega t \quad (1.23)$$

这是常系数非齐次二阶线性微分方程式, 它的全解由两部分组成, 其通解为

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega_n^2\varphi = 0$$

即

$$Ae^{-n't} \sin[\sqrt{\omega_n^2 - n'^2}t + \varepsilon]$$

这就是扭摆有阻尼自由振动的解。

它的特解可写成

$$\varphi = A_1 \sin(\omega t - \psi) \quad (1.24)$$

将式 (1.24) 进行一次及二次微分, 代入式 (1.23) 可得

$$-A_1\omega \sin(\omega t - \psi) + 2n\omega A_1 \cos(\omega t - \psi) + A_1\omega_n^2 \sin(\omega t - \psi) = h \sin \omega t$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2)A_1 \sin(\omega t - \psi) + 2n\omega A_1 \cos(\omega t - \psi) = h \sin \omega t$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2)A_1 [\sin \omega t \cdot \cos \psi - \cos \omega t \cdot \sin \psi]$$

$$+ 2n\omega A_1 [\sin \omega t \cdot \sin \psi + \cos \omega t \cdot \cos \psi] = h \sin \omega t$$

所以

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)A_1 \cos \psi + 2n\omega A_1 \sin \psi] \sin \omega t$$

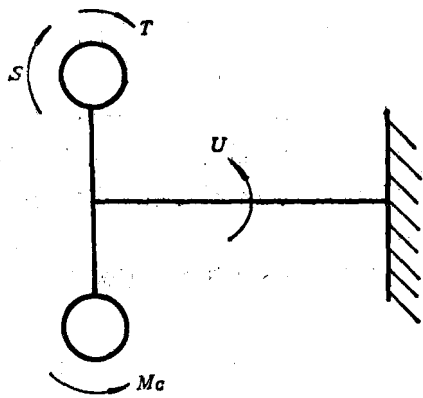


图 1.6

$$+ [2n\omega A_1 \cdot \cos\psi - (\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \sin\psi] \cos\omega t = h \sin\omega t$$

两边对应项相等, 得

$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \cos\psi + 2n\omega A_1 \sin\psi = h & (1) \\ (\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \sin\psi - 2n\omega A_1 \cos\psi = 0 & (2) \end{cases}$$

上两式平方相加, 得

$$(\omega_n^2 - \omega^2) A_1^2 + 4n^2 \omega^2 A_1^2 = h^2$$

所以
$$A_1 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \quad (1.25)$$

从式 (2) 可得
$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (1.26)$$

因此, 扭摆有阻尼强制振动微分方程式 (1.23) 的全解为

$$\varphi = Ae^{-n^2 t} \sin[\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \varepsilon] + A_1 \sin(\omega t - \psi) \quad (1.27)$$

由式 (1.27) 可见, 第一项就是扭摆有阻尼自由振动中所讨论过的衰减正弦波; 第二项是正常的正弦波。所以, 扭摆有阻尼强制振动是由这二项叠加而成。当 $A_1 \gg A$, $\sqrt{\omega_n^2 - n^2} \gg \omega$ 时, 其情形如图 1.7 所示。

可以看出, 有阻尼自由振动只在开始的过渡阶段存在, 以后它就消失了。因此, 只需考虑第二项正常的有阻尼强制振动, 它有个特点, 即振幅并不因阻尼的存在而衰减, 这是因为激励力矩不断对系统做功的结果。对第二项的分析, 可以引出有阻尼强制振动的基本概念。

先来看一下强制振动振幅 A_1

$$A_1 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} = \frac{h}{\omega_n^2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4n^2}{\omega_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (1.28)$$

因为
$$\frac{h}{\omega_n^2} = \frac{M}{I} \cdot Ie = Me = A_0$$

A_0 称静振幅, 这是用 M 作用在扭摆上所产生的静变形。令 $\frac{4n^2}{\omega_n^2} = \delta^2$, 它仍间接代表阻尼, 则式 (1.28) 成为

$$A_1 = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (1.29)$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (1.30)$$

$\frac{A_1}{A_0}$ ——强制振动振幅与静振幅之比, 称放大系数, 用 m 表示。在各种不同阻尼之

下, 放大系数与频率比之间的关系, 即 $m = \frac{A_1}{A_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$, 如图 1.8 所示。

从 $m = \frac{A_1}{A_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ 关系曲线可引出如下重要概念:

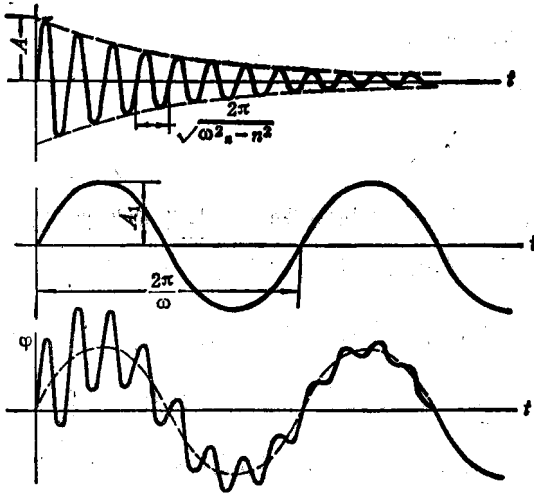


图 1.7

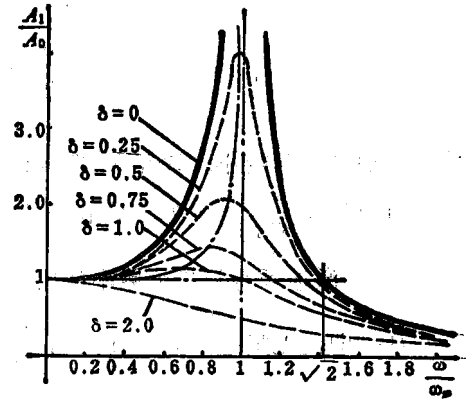


图 1.8

(1) 当 $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, 即激振频率等于自振频率时, 称共振。共振时, 如阻尼为零即 $\delta = 0$, 则共振振幅将达到无穷大, 即使有阻尼存在, 振幅比静振幅仍然要放大几倍至几十倍。这就是为什么在工程上如此重视共振的原因。

(2) 由于阻尼存在, 即 $\delta \neq 0$, 使振动特性发生了一些重要的变化。

如 $\delta \neq 0$, 共振时 $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, 公式 (1.30) 变成 $\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\delta}$, 这就是说, 由于阻尼存在, 共振振幅变为有限值, 且与阻尼成反比。因此, 在系统中增加阻尼可以控制共振振幅, 这为减振提供了一个重要的途径; 又因 $\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\delta}$, 可写成 $A_1 = A_0 \frac{1}{\delta}$, 即放大系数 $m = \frac{1}{\delta}$, 由此可见, 阻尼越大, 放大系数越小; 反之, 放大系数就越大。这就是说, 可用放大系数来表征系统的阻尼, 即 $A_1 = m A_0$ 。利用此式, 可以进行强制振动计算, 这将在后文 5.2.3 节中详加讨论。

又如图中曲线所示, 远离共振点处, 无论阻尼大小, 曲线都互相靠近。由此可见, 阻尼如在共振点附近, 对振幅的影响则十分显著; 而远离共振点时, 其衰减作用将迅速下降。又如, 当阻尼存在时, 曲线的峰值并不出现在 $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ 的共振点处, 而是在此之前。阻尼越大, 出现越早, 这可从对式 (1.30) 求极值的办法中求出峰值所对应的 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 值。式 (1.30) 的极值位置取决于根号内的式子, 为简化起见,

$$\text{令 } y = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2; \quad x = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\text{则 } y = [1 - x^2]^2 + \delta^2 x^2.$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 即 } 4x^2 - 2(2 - \delta^2)x = 0$$

由此可得

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{2}}$$

即当 $\delta \neq 0$ 时, 振值所对应的 $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$, 这时峰值为

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - \frac{\delta^4}{4}}}$$

因为一般轴系 δ 较小, 均在 $\delta < 0.1$ 的范围, 所以在一般扭振分析中, 均近似地将其看成峰值出现在 $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ 处, 峰值为 $\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\delta}$ 。本书在以后讨论中均作这样处理。

(3) 激振频率与自振频率的比值 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 对振动特性有着重要的影响:

如果即使无阻尼, $\delta = 0$, 当 $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ 时, 放大系数 $\frac{A_1}{A_0} = 1$ 。而当 $\delta \neq 0$, $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2 - \delta^2}$ 时, $\frac{A_1}{A_0} = 1$ 。无论阻尼为何值, 只要 $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$, 都能使强制振动振幅小于静振幅, 即 $\frac{A_1}{A_0} < 1$ 。

由此可见, 调整频率比 $\frac{\omega}{\omega_n}$, 以避免强共振是解决扭振问题的另一重要途径。激振频率 ω 是由内燃机转速所决定, 即由内燃机用途所要求, 因此, 调整频率比, 实际上是指调整自振频率, 亦即改变系统的转动惯量 I 及柔度 e 来调频。

最后, 我们来讨论相位角 ψ 。这是激振力矩与位移之间的夹角, 其值可由式(1.26)确定。

$$\text{tg } \psi = \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{\delta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

在无阻尼强制振动中, ψ 只有 0 与 π 两种情况, 因此可以用振幅值正或负来表示。在有阻尼强制振动中, 位移的振幅值永远为正值 (见式 (1.29)), 而它与激振力矩振幅之间的相差则由上式来决定。

ψ 角受阻尼及频率的影响, 其一个重要的性质是不论阻尼值如何, 当共振时, 即

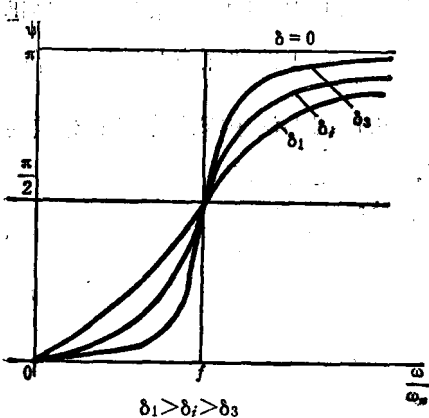


图 1.9

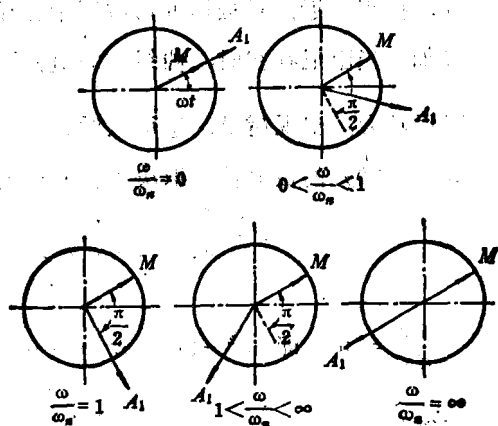


图 1.10