高等学校教学用书

# 高等数学教程

第二卷　第一分册

陈蓋民著

机械工业出版社

高等学校教学用書

# 高 等 数 学 教 程

## 第二卷 第一分册

陈 藎 民 著

机 械 工 业 出 版 社

本書是为工学院編写的教科書，内容分为四卷：解析几何、数学分析初步、数学分析的进一步發展、补充教材。前三卷是根据高教部数学大綱的要求而編写的，曾在北京工業学院試教过，約需200学时講完。最后一卷是为了某些專業的需要而編写的，内容包括：复变函数、拉氏变换、矢量分析、概率与誤差等，約需60学时講完。

書中特别注意难点的处理与基本概念的闡述。对于难点的处理，除用深入分析的方法外，也用分散难点的方法来減輕困难的程度。对于基本概念是按历史的發展或具体的分析与綜合来叙述的。并且通过概念的闡述来进行政治思想的教育。

No. 2115

1957年11月第一版　1959年11月第一版第五次印刷

850×1168 1/32　字数180千字　印張6 7/8　26,011—34,110册

机械工業出版社（北京阜成門外百万庄）出版

机械工业出版社印刷厂印刷　新华書店發行

北京市書刊出版業营業許可証出字第008号

定价（10）1.10元

# 第 二 卷

# 数 学 分 析 初 步

## 第一分册 目 次

## 第 一 編 基础知識

### 第 十 章 函 数



### 第十一章 極 限

# 第二編　一元函数微分学

## 第十二章　导数及其应用

## 第十三章 微分及其应用

## 第十四章 中值定理及其应用

# 第二卷　数学分析初步

数学分析所研究的主要对象为函数，而所用的基本方法为极限法。极限与函数虽在中学已經講过一些，但是，沒有用极限方法来研究函数。現在要学习数学分析，这好象学了代数与几何，还要学习解析几何一样。一种科学，因为改变了研究的方法，就得到很大的进步与发展，这不仅在数学中是如此，就在其他科学中也是如此，这是值得我們注意的。

本書第二卷，分为四編：（一）数学分析的基础知識；（二）一元函数微分学；（三）一元函数积分学；（四）微分方程。

# 第一編　基础知識

## 第十章　函　数

函数是数学分析的研究对象，現在要学习数学分析，就非有足够的函数知識不可，只靠中学那些知識是不能滿足現在要求的，因此，我們要把它再詳細地、深入地講一講。本章分为两节：（一）函数概念及其表示法；（二）基本初等函数。

## 第一节　函数概念及其表示法

### §10·1　函数的定义

函数是反映客观世界中，量与量之間的变化关系。我們祖先对这种变化关系的認識是很早的。远在公元前300年左右，我国

哲学家庄周在他所著的庄子❶中就說："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"用現代数学的語言来解釋，就是：如果一尺长的杖被截取后所余的量为 $y$，那么，$y$ 的值在第一天是 $\frac{1}{2}$，第二天是 $\frac{1}{2^2}$，第三天是 $\frac{1}{2^3}$ 第 $n$ 天是 $\frac{1}{2^n}$；于是 $y$ 是 $n$ 的函数。

到了公元600年，我国数学家刘徽因为要求出开皇二十年(公元600年)的皇极历❷，曾提出求两个已知函数值的中間值的方法。他虽然沒有提出函数这个名詞，但他对于函数概念已經有了深入的認識。函数这个名詞是1694年由德国数学家萊伯尼支提出的，但是他并沒有給这个名詞下过定义，因为，他对于函数的概念还不是十分明确的。瑞士数学家班奴里于1698年7月5日写信給萊氏，首先提出函数概念的定义："一个解析式子的值，如果随所含字母的值而变，这个解析式子，就叫做这个字母的函数"。

例如，对 $\frac{1}{2}gt^2+v_0t$，这个式子来說，当 $t$ 每取一值时，它就有一值与 $t$ 所取的值对应，所以它是 $t$ 的函数。后来，俄国彼得堡科学院院士欧拉又提出第二个定义：在 $xy$ 平面上任意画一曲綫，这个曲綫上一点的坐标 $x$，$y$ 的关系，就是函数。这个定义要比班奴里的定义来得广泛，因为它不仅允許用解析式子表示函数，也允許用图形表示函数。

在19世紀以前，数学、物理、或理論力学上所用的函数定义，都是上面所說的两个定义。但是，19世紀以后，由于自然科学与技术科学不断的发展，数学家就逐漸覺得原来的函数定义太

❶ 庄周約为公元前300年前后的人，著書52篇，名叫庄子。現存33篇，其中的天下篇載有惠施的話；"一尺之棰，……"但惠施并无其人(見范文瀾著中国通史簡編，修訂本，203頁，人民出版社，1953年)。因此，所謂惠施的話应該是庄子的話。

❷ 見李儼著中国古代数学史料，77～79頁，中国科学图書仪器公司，1954年。

狭隘而不能和科技的发展相适应，因此俄国数学家罗巴切夫斯基首先把函数概念加以大大地扩充。現在的函数概念虽然还在不断的发展中，但是下面的定义，仍旧是最基本的定义。

**函数的定义**❶ 如果有变量❷ $x, y$，当 $x$ 每取一值时，$y$ 就依一定的規律也有一值或多值与 $x$ 的每一值对应，我們就說 $y$ 是 $x$ 的函数。

函数 $y$ 也叫做因变量，$x$ 叫做自变量。这种規律，叫做对应律。

**单值函数与多值函数** 如果函数 $y$ 只有一值与 $x$ 的每一值对应，我們就說 $y$ 是单值函数；如果有两个，或两个以上的值与 $x$ 的每一值对应，我們就說 $y$ 是多值函数。

例如，$y=ax^2+bx+c$是单值函数；$y^2=2px$是多值函数，$y=arc\ sin\ x$ 也是多值函数。

**一元函数与多元函数** 上面的函数定义，仅指一个自变量而論，但是在自然界中，常有两个以上的自变量的函数。例如矩形的面积 $z=xy$ 就是两个自变量$x$，$y$ 的函数；又如长方体的体积 $u=xyz$ 就是三个自变量的函数；又如牛頓的万有引力定律 $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$，其中 $F$ 就是 $m_1$、$m_2$ 及 $r$ 的函数。

只有一个自变量的函数，叫做一元函数；有两个自变量的函数，叫做二元函数；依此类推，可以有 $n$ 元函数。二元，三元，以及 $n$ 元的函数，叫做多元函数。

---

❶ 这样的函数定义也叫做 Dirichlet 的函数定义，Dirichlet (1805～1859) 是德国数学家，他提出函数的定义要比罗巴切夫斯基稍晚几年。罗巴切夫斯基在1834年就給出了函数的一般概念(参考Н.И.罗巴切夫斯基全集，卷五，43頁，苏联国家技术图書出版社；或 В.Л.岡恰罗夫著，何旭初，唐述釗譯苏俄教育科学院初等数学全書，函数和极限，第一册，2頁，商务印書舘，1955年)

❷ 变量概念已在高中代数中講过，它的定义可參看本書卷一緒論。

我們把常量看做函数，这也是符合函数定义的。因为任意一个常量$k$，或$y=k$，当$x$每取一值时，$y$恒以$k$为对应值，所以$y=k$是$x$的函数。

## §10·2　函数的記号

在自然界中，量与量的函数关系，有些是簡单的，也有些是复杂的。例如物体在眞空中落下的公式写不到半行就可以写完，而月球运动的公式写了六七十頁还写不完。欧拉为了避免复杂的書写而便于作抽象的理論研究起見，首先用記号：$f(x)$代表$x$的函数。$f(x)$，可讀为“$f$含$x$”。

法国数学家拉格郎日于1797年出版解析函数論时，除用欧拉的記号外，又用$F(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$，等代表$x$的函数。現在，也用$y(x)$，$z(x)$代表$x$的函数。括弧內的$x$是自变量，括弧外的字母$f$，$F$，……等等只代表函数的对应律，而不代表变量。如果两个函数的对应律不相同，那末括弧外的字母也不相同。例如：研究圓的性質时，我們知道圓的面积与圓周都是半徑$x$的函数，但是对应律不相同，因此就要用两个不同的字母写为：

$$f(x)=\pi x^2$$

$$\varphi(x)=2\pi x$$

如果对应律相同而自变量不相同，那么，括弧外的字母不变更而括弧內的字母要变更，例如：

$$\text{若}\quad f(x)=x^3-5x+3$$

$$\text{則}\quad f(t)=t^3-5t+3$$

由这个例子，可知函数的对应律如果确定，这个函数也确定，而对应律与代表自变量的字母无关。我們只須根据对应律，就可以由自变量所取的值計算出函数的对应值。例如：以$x=2$与$t=2$

代入上面两个等式，所得的函数值都是：

$$f(2)=2^3-5\times2+3=1$$

但$f(2)$不是2的函数，而是自变量等于2时，函数$f(x)$或$f(t)$的对应值，或函数值。$f(x)$也常用一个字母来代表它，写为：

$$y=f(x)$$

依此类推，多元函数的記号为：

$$f(x, y), F(x, y, z), \varphi(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$$

或$z=f(x, y)$，$u=F(x, y, z)$，$u=\varphi(x_1\cdots\cdots x_n)$。

欧拉用$f(x)$代表函数时，原来只代表一个解析式子，但是，自从函数的概念扩充以后，它的代表性也跟着扩充，它不仅代表一个解析式子，同时也代表函数定义所講的函数概念。

## §10.3 函数表示法．函数的图形

表达函数概念的方法很多，最常用的有三种：解析法，图示法，列表法。

（一）解析法 就是用解析式子表达函数对应律的方法，也就是班奴里所定义的函数。上面所举的物体落下的路程是时間的函数，以及万有引力的定律都是这种表示法的例子。用解析法表示函数最适宜于理論的研究，所以，它是函数表示法中最重要的方法。

（二）图示法 就是用图形表示函数对应律的方法，也就是欧拉所定义的函数。用图形表示函数，这在科学上是常用的，例如用“自記温度計”画出图形来表示温度与时間的函数关系；又如用“自記气压計”画出图形来表示大气压力与时間的函数关系；以及統計学的統計图等，都是用图形表示函数的方法。信重与邮資的函数关系，可用图10·3来表示。当信重20克时，函数的

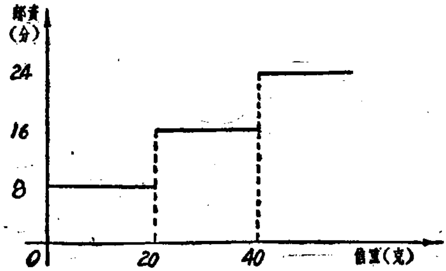


图 10·3

值不能确定，即邮資可以是8分，也可以是16分。凡函数，其值不定时，可以根据具体情况，或某种原则来决定。譬如信重20克时，就根据邮政章程，它的邮資应該是8分。讀者对于这一点应当加以注意，因为以后研究函数的値时，还会遇到函数值不定的情形。

（三）列表法 就是用表格表示函数对应律的方法，也就是把自变量所取的值与函数的对应值列成一表，来表示函数的一种方法。例如三角函数表，对数表，立方表，平方表等都是用表格表示函数的方法。这种表格叫做函数表。函数的列表法，在自然科学与技术科学上特别用的多。因为由实験或观察所得的函数值，在研究的初級阶段，每每不能用解析式子来表示，而只能用表格来表示。

例如研究水的体积与温度的函数关系时，就用表格表示如下：

| 温度(百度表) | 0° | 2° | 4° | 6° | 8° | 10° | 12° | 14° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 体积(公分³) | 100 | 99.990 | 99.987 | 99.990 | 99.998 | 100.012 | 100.032 | 100.057 |

以上三种表示法都各有优点与缺点。譬如解析法，它所表示的形式，比較簡単而全面，研究起来也比較方便；但是，它不能把量与量之間的变化过程很显明地表示出来，使人一目了然；并且每一函数值都要临时計算，不能立刻得到結果。至于图示法虽然能把量与量之間的变化过程很显明地表示出来，但是，由于画图的技巧关系，每每缺乏精确性。列表法虽然可以从表上很快地查出函数的値，但不能查出函数的任意値。所以每一表示法，都

各有优缺点。因此，在数学分析教程中，研究函数$f(x)$的变化过程时，为了使它明显起見，总把它的图形画出来。所謂函数$f(x)$的图形，就是在直角坐标系中的点$(x, y)$满足这个方程

$$y=f(x)$$

的軌迹。

函数的图形的概念，把函数与几何图形統一起来，这不仅使研究函数的人，对于函数的变化状态可以从图形上一目了然，也使研究几何的人，可用数学分析的方法来研究几何图形。这比过去用代数方法研究图形（解析几何）又大大地提高了一步（只要学到微分学与积分学，就知道这种提高在实用上有很大的价值）。

## §10·4　函数的定义域　数列

当自变量$x$在数軸上取一点$a$时，函数$y$如果有一值或多值与$a$对应，我們就說函数$y$在$a$点有定义。使函数有定义的一切点的全体，叫做**函数的定义域**。

对应律与定义域是函数概念的两个要素。在函数定义中虽然沒有限定自变量在数軸上要取那些值，但是，論到每一个具体的函数时，就需要指出函数的定义域。譬如这两个函数：

$$V=\frac{k}{P},\quad y=\frac{k}{x}$$

在形式上是一样的，但在实質上，前一函数是反映气体体积$V$与压强$P$的依从变化关系，因此，函数$V$的定义域是$P>0$，即开区間❶$(0,\infty)$。而后一函数，并沒有具体的物理意义，它只是一个解析式子，因此，就它的表达式而論，它的定义域是两个开区間$(-\infty,0)$及$(0,\infty)$。又如：

**例 1**　由下面方程所确定的函数，它的圖形是橢圓。如果把$y$看作是$x$的函数，它的定义域是$[-a, a]$，即在橢圓的長軸

---

❶　区間的定义見第一章。

上；如果把 $x$ 看作是 $y$ 的函数，那末，它的定义域在椭圓的短軸上〔$-b$，$b$〕：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

**例 2** 函数 $y=\sqrt{(x-2)(x-3)(x-4)}$ 的定义域，从下表知道它是〔2，3〕及〔4，∞）。

| $x$ | $-\infty\cdots\cdots2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots4\cdots\cdots\infty$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a=x-2$ | $-$ 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $b=x-3$ | $-$ | $-$ 0 | $+$ | $+$ |
| $c=x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ 0 | $+$ |
| $abc$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

**例 3** 設有一函数 $f(x)$，

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

当 $x<-1$ 时，$f(x)=-(x+1)$

当 $x>1$ 时，$f(x)=x-1$

这个函数的定义域是全数軸，即$(-\infty，\infty)$。它的图形如图10·4-1。

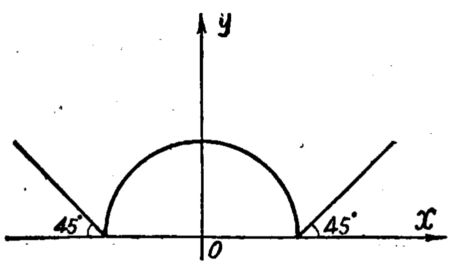


图 10·4-1

**例 4** 函数 $y=|x|$ 的定义域也是全数軸。它的图形如图10·4-2。

在数学分析中，通常所研究的函数，它的定义域总是下列两种类型之一：

（一）以全数軸，或数軸上的一个或几个区間为定义域 例如上面所举出的函数就是屬于这种类型。

（二）以数軸上的正整数点为定义域，即以自然数列：1，2，

3………等为定义域。譬如：

例 5　庄子所說"一尺之捶，日取其半，万世不竭。"的話，1）如果令日数为 $n$，杖的剩余部分为 $f(n)$，即得

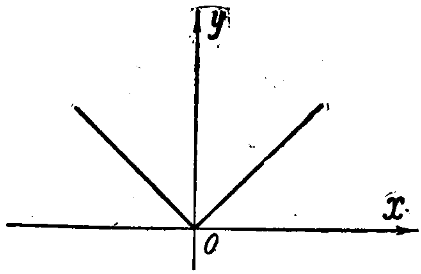

图　10·4-2

$$f(n)=\frac{1}{2^n};\qquad(1)$$

2）如果令所取得的杖长为 $\varphi(n)$，即得

$$\varphi(n)=1-\frac{1}{2^n}\qquad(2)$$

（1），（2）两函数的定义域都是自然数1，2，3，……。

这种函数有一个特性：不仅它的定义域能写成一个数列，并且函数值也能写成一个数列。譬如（1）式的函数值就是这个数列❶：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots;$$

而（2）式的函数值是这个数列：

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \cdots\cdots 1-\frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots。$$

但是，第一类型的函数就沒有这种特性。我們为了表达这种函数的特性起見就作出以下的規定：

以自然数列为定义域的函数，**叫做数列**。記为：

$$u_1,\ u_2,\ u_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots u_n,\ \cdots\cdots\cdots\cdots。$$

其中　$u_n$ 叫做**数列的公項**，公項就是以自然数列为定义域的函数。即 $u_n=f(n)$，因此，以自然数列为定义域的函数記号，也写

❶（1）式是这个数列的公項。

为：$u_n$。

例 6　圓的內接(或外切)正多边形的面积是多边形的边数的函数，这种函数就是数列。

例 7　等差級数的和：

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2};$$

与等比級数的和：

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q};$$

都是項数 $n$ 的函数，这种函数也是数列。

在日常生活中所遇到的数列是很多的，例如木樁入地的深度是捶击次数的函数，某省或某国人口是年或月的函数都是数列。

## §10·5　函数的增量与增減性

我們研究任何变量时，首先要观察它由一值变到另一值所增加的量是多少，这种所增加的量，叫做变量的增量。增量是数学分析中一个重要概念，我們研究函数时，常常要用到它，它的定义如下：

**定义**　当自变量 $x$ 由一值 $x_1$ 变为另一值 $x_2$ 时，我們把 $x_1$ 叫做 $x$ 的旧值；$x_2$ 叫做 $x$ 的新值；新旧值的差 $x_2-x_1$，叫做 $x$ 的增量。函数 $y=f(x)$ 与 $x$ 对应的新旧值的差

$$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1),$$

叫做函数 $y$ 的增量。

在高等数学中，变量的增量常記为

$$\triangle x = x_2 - x_1, \qquad \triangle y = y_2 - y_1。$$

这就是　$x_2 = x_1 + \triangle x, \qquad y_2 = y_1 + \triangle y$

增量的記号 $\triangle x$，并不是$\triangle$与 $x$ 相乘，而是代表增量的整个