JING JI YING YONG SHU XUE

21世纪高职高专系列教材

经济应用数学（一）

李润英 薛贞 主编

山东人民出版社

经济应用数学

（一）

主　编　李润英　薛　贞
副主编　丁　琳　杨世华　颜秉霞　孔　萍
参　编　王兴禄　韦良福　白淑芳

山东人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/李润英 刘继杰 薛贞 赵红革主编. —济南:山东人民出版社,2009.8
ISBN 978-7-209-04876-7

Ⅰ.经… Ⅱ.①李…②刘…③薛…④赵… Ⅲ.经济数学—高等学校;技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 141703 号

责任编辑:周云龙 袁丽娟
封面设计:祝玉华

经济应用数学
李润英 刘继杰 薛贞 赵红革 主编

山东出版集团
山东人民出版社出版发行
社 址:济南市经九路胜利大街 39 号 邮 编:250001
网 址:http://www.sd-book.com.cn
发行部:(0531)82098027 82098028
新华书店经销
山东新华印刷厂临沂厂印装

规 格 16 开(184mm×260mm)
印 张 23.5
字 数 460 千字
版 次 2009 年 8 月第 1 版
印 次 2009 年 8 月第 1 次
ISBN 978-7-209-04876-7
定 价 39.00 元(共两册)

如有质量问题,请与印刷厂调换。电话:(0539)2925659

前言

课程是教育活动的核心环节，高职教育内涵建设的关键是课程建设，而教材是课程实施的具体体现.经济应用数学是高职教育课程体系中一门重要的基础理论课，该课程不仅为学生后继课程的学习提供必备的数学工具，而且是培养经济管理类大学生数学素养和理性思维能力的最重要途径.在高职教育快速发展进程中，教材建设的改革和教学理念的提升严重滞后于高等职业教育的发展实践.为实现高职教育的培养目标，本教材是在充分研究当前我国高职教育现状，认真总结了高职院校经济管理类专业经济应用数学教学改革经验的基础上，以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》和教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导而编写的.坚持"以应用为目的，必须够用为度，学有所需，学有所用"的定位原则，以培养造就高职院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力，全面提升学生素质，使学生在学习中享受到成功的教育为最终目标，重组教材结构，精选教学内容.

本教材有以下特点：

一、教材结构设计科学合理，适合高职高专人才培养目标和经济管理类专业学生的实际水平及专业需求.教材内容以学科体系序化，打破以往学科本位强调学科体系的完整性系统性的思想，理论上适度够用，去除繁冗，理论推导和证明以解释清楚有关结论为度，知识点表达设计精确，课程内容设计理念新颖，深度适宜，便于教师教学和学生学习.

二、强化应用意识和能力的培养，注重了数学思想和数学方法在实际生活中的应用，每章后面都设有数学应用实例，教师可以在课堂上讲授，也可做为学生的课后读物，可以弹性处理，为学生贴进社会拓宽知识面、激发学习兴趣提供了生动的实例.

三、注重培养学生用计算机和数学软件求解数学模型的实际应用能力，教材的附录中有与前面每一章的部分数学习题配套的数学实验，让学生充分认知现代工具的快捷性和实用性.

四、精选例题习题，题型多样化，融入专业知识，每节配有思考题、习题，每章配有应用实例、数学实验、综合练习题.

本书分《经济应用数学》(一)、《经济应用数学》(二)两册，《经济应用数学》(一)包括函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分、附录(数学实验一至六)，大约需要 60 学时左右.《经济应用数学》(二)包括行列式、矩阵、线性方程组、线性规划、随

机事件与概率、随机变量的概率分布及其数字特征、数理统计初步、附录(数学实验七至十三),需要76学时左右.

本教材可作为高职高专经济管理类各专业高等数学教材.

《经济应用数学》(一)由李润英、薛贞任主编,丁琳、杨世华、颜秉霞、孔萍任副主编.《经济应用数学》(二)由刘继杰、赵红革任主编,刘春光、张新华、薛贞任副主编.具体编写任务:第1章杨世华;第2、3、4章丁琳;第5、6章张新华;第7、8章刘继杰;第9、10章李润英;第11、12、13章刘春光;数学实验薛贞、颜秉霞;应用实例赵红革、李海霞、孙传光、孔萍、韦良福编写.全书由李润英教授总撰.

在本书的编写过程中,烟台职业学院、滨州职业学院、山东水利职业学院的领导和老师们也都给予了大力的支持与帮助,在此一并表示衷心的感谢.

由于我们水平所限,书中不当之处敬请读者和同仁给予批评指正.

编者

2009年夏

目录

前　言 ······ 1
第1章　函　数 ······ 1
1.1　函数的概念 ······ 2
思考题1.1 ······ 5
习题1.1 ······ 6
1.2　初等函数 ······ 6
思考题1.2 ······ 8
习题1.2 ······ 9
1.3　经济工作中常见的函数 ······ 9
思考题1.3 ······ 13
习题1.3 ······ 13
应用实例 ······ 13
综合练习一 ······ 14
第2章　极限与连续 ······ 17
2.1　极限的概念 ······ 18
思考题2.1 ······ 22
习题2.1 ······ 23
2.2　极限的四则运算及性质 ······ 23
习题2.2 ······ 26
2.3　无穷小量与无穷大量 ······ 27
思考题2.3 ······ 30
习题2.3 ······ 31
2.4　两个重要极限 ······ 31
思考题2.4 ······ 35
习题2.4 ······ 35
2.5　函数的连续性 ······ 35
思考题2.5 ······ 41
习题2.5 ······ 41
应用实例 ······ 42
综合练习二 ······ 43
第3章　导数与微分 ······ 45
3.1　导数的概念 ······ 46
思考题3.1 ······ 53
习题3.1 ······ 53
3.2　函数的求导法则与方法 ······ 54
习题3.2 ······ 60
3.3　微　分 ······ 61
思考题3.3 ······ 66
习题3.3 ······ 66
应用实例 ······ 67
综合练习三 ······ 67
第4章　导数的应用 ······ 71
4.1　拉格朗日(Lagrange)中值定理和函数的单调性 ······ 72
思考题4.1 ······ 75
习题4.1 ······ 75
4.2　罗必达法则 ······ 75
思考题4.2 ······ 78
习题4.2 ······ 78
4.3　函数的极值与最值 ······ 79
思考题4.3 ······ 83
习题4.3 ······ 83
4.4　函数图象的描绘 ······ 83
思考题4.4 ······ 88
习题4.4 ······ 88
4.5　导数在经济工作中的应用 ······ 88
思考题4.5 ······ 92
习题4.5 ······ 92
应用实例 ······ 92

综合练习四 …… 93

第5章　不定积分 …… 95

5.1　不定积分的概念与性质 …… 96

思考题5.1 …… 100

习题5.1 …… 100

5.2　不定积分的积分方法 …… 101

思考题5.2 …… 108

习题5.2 …… 109

综合练习五 …… 109

第6章　定积分 …… 113

6.1　定积分概念与性质 …… 114

思考题6.1 …… 119

习题6.1 …… 119

6.2　微积分基本定理 …… 120

习题6.2 …… 123

6.3　定积分的换元积分法与分部积分法 …… 123

思考题6.3 …… 127

习题6.3 …… 127

6.4　定积分的应用 …… 128

思考题6.4 …… 133

习题6.4 …… 133

应用实例 …… 133

综合练习六 …… 134

附录　数学实验 …… 137

参考答案 …… 147

第1章 函数

函数是高等数学中最基本的概念之一，也是微积分研究的主要对象. 在经济工作中涉及的大量数量关系，都可用函数关系来表达. 本章将在初等数学已有函数知识的基础上，进一步研究函数的概念与性质，并介绍几种经济工作中常见的函数，为学习微积分知识打下必要的基础.

1.1 函数的概念

1.1.1 函数的概念

大家知道，函数描述的是变量间的对应关系.关于函数的定义，在 17 世纪之前，一直与公式紧密联系.到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805～1859)抽象出了直至今天为人们易于接受，并且较为合理的函数定义.

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在某一实数范围 D 内任意取定一个数值时，按照一定的对应关系 f，变量 y 有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，自变量的取值范围 D 叫做函数的定义域.

对于确定的 $x_0\in D$，函数 $y=f(x)$所对应的 y 的值，叫做当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$.

全体函数值构成的集合叫做函数的值域，记作 M.

2. 函数的两要素

由函数的定义可知，定义域和对应关系称为函数的两个要素.两函数相同的充分必要条件是其定义域与对应关系分别相同.例如，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数.函数 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，它们的定义域相同，都是实数集 $\mathbf{R}$，但

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

显然，只有当 $x\geqslant 0$ 时，它们的对应关系才相同，所以这是两个不同的函数.再如，函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$和 $s=t$，它们的定义域和对应关系分别相同，所以它们表示的是同一个函数.

求函数的定义域时，应当注意两个原则：一是在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定函数的定义域.二是对于用数学式子表示的函数，它的定义域应由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$；　　(2) $y=\ln(2-\ln x)$.

解：(1) 在 $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$中，因为要求分母 $x^2+2x-3\neq 0$，

即 $x\neq-3$ 且 $x\neq1$，

所以函数 $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ 的定义域是 $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 在 $y=\ln(2-\ln x)$ 中，作为对数 $\ln(2-\ln x)$ 的真数，必须 $2-\ln x>0$；同时，作为对数 $\ln x$ 的真数 $x>0$，解不等式组 $\begin{cases}2-\ln x>0,\\x>0.\end{cases}$

得 $0<x<e^2$.

所以函数 $y=\ln(2-\ln x)$ 的定义域是 $(0,e^2)$.

3. 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有表格法、图象法和公式法三种.

例 2 2008 年 12 月 23 日执行的人民币整存整取定期储蓄的存期与年利率如表 1-1 所示.

表 1-1

存 期	年利率(%)
三个月	1.71
半年	1.98
一年	2.25
二年	2.79
三年	3.33
五年	3.60

这张表格给出了年利率与存期的对应关系，确定了年利率是存期的函数. 像这样，用表格形式表示函数的方法称为表格法.

例 3 某出租汽车公司规定收费标准如下：3 公里以内的车费为 7 元，超过 3 公里的部分每公里加收 1.5 元. 车费与里程的函数关系如图 1-1 所示. 像这样，用图形表示函数的方法称为图象法.

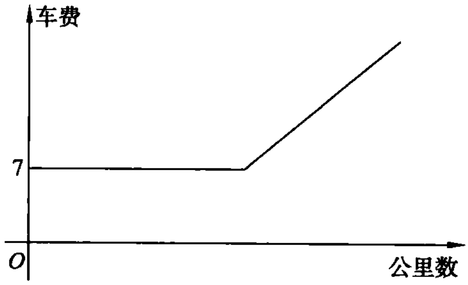

图 1-1

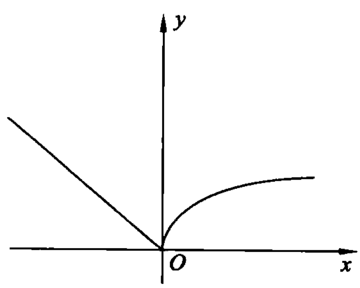

图 1-2

例 4 我国规定个人所得税根据个人收入来源分别按照超额累进税率计算征收. 个人所得税工资薪金所得费用减除标准自 2008 年 3 月 1 日起由每月 1600 元提高到2000 元. 已知某人应纳税 T(元)与个人收入应纳税所得额 x(元)(x=月薪－2000)之间的函数关系如下：

$$T=\begin{cases}5\%x, x\in(0,500],\\10\%x-25, x\in(500,2000],\\15\%x-125, x\in(2000,5000],\\20\%x-375, x\in(5000,20000],\\25\%x-1375, x\in(20000,40000],\\30\%x-3375, x\in(40000,60000],\\35\%x-6375, x\in(60000,80000],\\40\%x-10375, x\in(80000,100000],\\45\%x-15375, x\in(100000,+\infty).\end{cases}$$

像这样,用数学式子表示函数的方法称为公式法,也叫做解析法.

由例3、例4容易看出,函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,但它们在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的,这样的函数称为分段函数.分段函数是定义域上的一个函数,不是多个函数.

例5 作下列分段函数的图象:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geqslant 0,\\-x, x<0.\end{cases}$$

解:该分段函数的图象如图1-2所示.

在用公式法表示函数的时候,函数 y 可以用含自变量 x 的关系式 $y=f(x)$ 来表示,如 $y=3x^3+2x-5$,$y=e^x+1$,$y=\sin\omega x$ 等,这种形式的函数叫做显函数,以前我们所遇到的函数大都是显函数.但是有时还会遇到另一种表达形式的函数,函数 y 与自变量 x 的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的,这样的函数称为隐函数.例如,$x-y+3=0$,$x^2+y^2=1$ 等.有些隐函数很容易化为显函数,而有些则很困难,甚至不可能.例如方程 $xy=e^{x+y}$ 就无法把 y 表示成 x 的显函数.

1.1.2 函数的几种特性

1. 奇偶性

定义2 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;如果 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例如,函数 $y=x^2$,$y=\cos x$ 是偶函数,其图象关于 y 轴对称;函数 $y=x^3$,$y=\sin x$ 是奇函数,其图象关于坐标原点对称.

2. 单调性

定义3 若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加,I 称为单调增区间;若当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少,I 称为单调减区间;单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

单调区间可以是函数的整个定义域,也可以是定义域的一部分.例如,函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的单调区间是它的定义域 $(-\infty,+\infty)$.而对于函数 $y=x^2+1$,在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的,在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的,所以它的单调区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$,而在整个定义域内是不单调的.

3. 周期性

定义4 对于函数 $f(x)$，如果存在不为零的正数 T，使得对于定义域内的每一个 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数；函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 是以 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数.

4. 有界性

定义5 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $(-1,1)$ 内是有界的；而函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内是无界的，但函数 $y=x^3$ 在区间 $(1,2)$ 内则是有界的，函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内仍是无界的.

1.1.3 反函数

定义6 设变量 y 和 x 之间存在单调函数关系 $y=f(x)$，对于 y 的每一个值 $(y\in M)$，x 都有唯一确定的值 $(x\in D)$ 与之对应，那么可以说 x 也是 y 的函数 $x=\varphi(y)$，函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，在上述关系中，把 $y=\varphi(x)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

例6 求函数 $y=\frac{x+2}{x-2}$ 的反函数.

解： 由 $y=\frac{x+2}{x-2}$，得 $x=\frac{2y+2}{y-1}$，因此，函数 $y=\frac{x+2}{x-2}$ 的反函数为 $y=\frac{2x+2}{x-1}$，$x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

思考题 1.1

1. 如何判断两个函数是否为同一函数？
2. 若实数 $\delta>0$，则称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域，记为 $N(x_0,\delta)$. 试分别写出 $N(0,1)$，$N(-1,0.1)$，$N(1,0.02)$ 所表示的区间.
3. 若实数 $\delta>0$，则称区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为以 x_0 为中心、δ 为半径的空心邻域，记为 $\hat{N}(x_0,\delta)$，试写出以 1 为中心、δ 为半径的空心邻域 $\hat{N}(1,\delta)$ 所表示的区间.

习题 1.1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$;

(2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$;

(3) $y=2-x$ 和 $y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$;

(4) $y=2x^2-1$ 和 $u=2v^2-1$;

(5) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}1-x, x<1,\\0, \quad x=1,\\x-1, x>1.\end{cases}$

2. $[f(x)]^2$ 与 $f(x^2)$ 是否表示同一函数?举例说明.

3. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}0, 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, x=1,\\ 1, 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

求 $f(0), f(1), f\left(\dfrac{5}{4}\right)$ 并作出其图象.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$;

(2) $y=\dfrac{1}{x}e^{-x}$;

(3) $y=\ln\sin x$;

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, 0<x<2,\\x^2, \quad 2<x\leqslant 5.\end{cases}$

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^4+2x^2+3$;

(2) $f(x)=x\cos x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

(4) $f(x)=\sin x+\cos x$.

6. 有一边长为 a 的正方形铁片,从它的四个角截去相等的小方块,然后折起各边做成一个无盖的小盒子,求它的容积与截去小方块边长之间的函数关系,并指明定义域.

1.2 初等函数

通常,我们所接触的函数大多是初等函数,而初等函数是由基本初等函数通过一定的运算关系构成的.本节主要介绍基本初等函数、复合函数与初等函数等概念,特别要注

意复合函数的概念和复合函数的结构.

1.2.1 基本初等函数

定义 1 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

关于基本初等函数的定义、图象、性质等，大家在中学都已经学过，下面重点复习反三角函数的概念、性质和图象.

正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在定义域内为单调递增的有界奇函数(图 1-3).

余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，在定义域内为单调递减的有界函数(图 1-4).

正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在定义域内为单调递增的有界的奇函数(图 1-5).

余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，在定义域内为单调递减的有界函数(图 1-6).

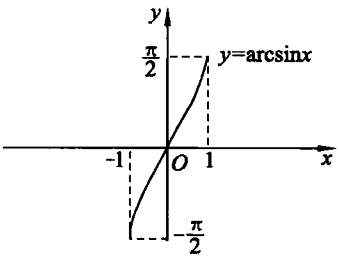

图 1-3

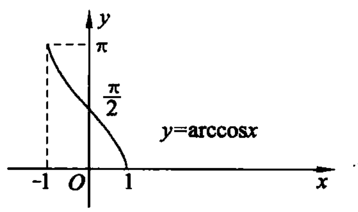

图 1-4

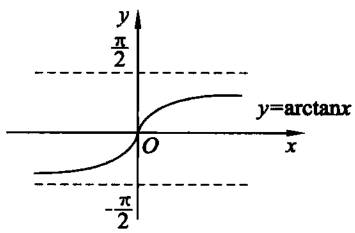

图 1-5

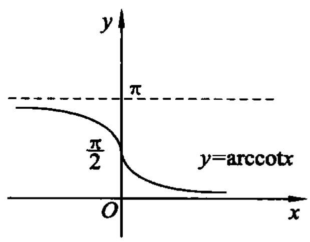

图 1-6

1.2.2 复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另一个变量而联系起来. 如出租车的车费 R 是里程 s 的函数，而里程 s 又是时间 t 的函数，因此出租车的车费 R 通过里程 s 也是时间 t 的函数，我们将其称为复合函数.

定义 2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M，M 与 D 的交集非空，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量，x 为自变量.

例如，函数 $y=\sqrt{u}$，$u=(x-1)(x-2)$ 可构成一个复合函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由更多个函数复合构成. 例如，$y=\cos^2 3x$ 可以看成是由三个函数 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x$ 复合而成；$y=a^{\sin^3\frac{1}{x}}$ 则是由 $y=a^u$，$u=v^3$，$v=\sin w$，$w=\dfrac{1}{x}$ 四个函数复合而成.

利用复合函数的概念可以将一个复杂的函数分解成几个简单函数，这样对复杂函数的研究可以变成对简单函数的研究，使问题得到简化.

例 1 指出下列函数是由那些简单函数复合而成：

(1) $y=\ln(2+\cos x)$；　　(2) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$；

(3) $y=\ln\tan^2(1+x^2)$；　　(4) $y=e^{\cos\sqrt{2x-1}}$.

解：(1) $y=\ln(2+\cos x)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=2+\cos x$ 复合而成.

(2) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

(3) $y=\ln\tan^2(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\tan w$，$w=1+x^2$ 复合而成.

(4) $y=e^{\cos\sqrt{2x-1}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{w}$，$w=2x-1$ 复合而成.

例 1 中 $u=2+\cos x$，$w=1+x^2$，$w=2x-1$ 虽不是基本初等函数，但其结构已十分简单. 像这种由基本初等函数经过四则运算所得到的函数，通常称为简单函数.

1.2.3 初等函数

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

初等函数是函数中的一类重要函数. 一方面，初等函数本身就有很多应用；另一方面，对其他函数的研究也常常要直接或间接借助于初等函数. 今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

思考题 1.2

1. 两个函数能够复合成一个复合函数的条件是什么？试举例说明.
2. 两个初等函数相加所得的关系式一定是初等函数吗？试举例说明.

习题 1.2

1. 把下列复合函数分解为简单函数：

   (1) $y=2^{\sin x}$；　　(2) $y=\lg\sqrt{x^2+1}$；

   (3) $y=\sqrt[3]{\arctan 2x}$；　　(4) $y=\sin^3\ln(x+1)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.
3. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=3^x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.
4. 设函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，求函数 $f(\ln x)$的定义域.

1.3 经济工作中常见的函数

经济分析中，常常要用数学方法来分析经济变量间的关系，即先建立变量间的函数关系，然后利用微积分等知识分析这些经济函数的特性. 本节介绍几种常见的经济函数.

1.3.1 需求函数与价格函数

1. 需求函数

消费者愿意购买而且有支付能力购买的商品数量称为需求(或需求量). 消费者对某种商品的需求量，与消费者的人数、收入、习惯、嗜好、季节以及该商品的价格等诸多因素有关. 为简化问题的分析，现在我们假定其他因素暂时保持某种状态不变，只考虑商品的价格对需求量的影响. 为此，我们可建立商品的需求量 Q 与该商品价格 p 的函数关系，称其为需求函数，记为 $Q=Q(p)$. 这里价格 p 是自变量，$p\geqslant 0$.

一般地，需求量随价格上涨而减少，因此，通常需求函数是价格的单调递减函数. 在企业管理和经济学中常见的需求函数有：

线性需求函数：$Q=a-bp$，其中 $b\geqslant 0$，$a\geqslant 0$ 均为常数；

二次曲线需求函数：$Q=a-bp-cp^2$，其中 $b\geqslant 0$，$a\geqslant 0$，$c\geqslant 0$ 均为常数；

指数需求函数：$Q=Ae^{-bp}$，其中 $A\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 均为常数.

2. 价格函数

需求函数 $Q=Q(p)$的反函数就是价格函数，记作 $p=p(Q)$.

价格函数也反映商品的需求与价格的关系，所以它也称为需求函数.

1.3.2 供给函数

在市场经济规律作用下，市场上某种商品的供应量(称为商品供给量)的大小依赖于

该商品的价格高低.影响商品供给量的因素很多,通常情况下最重要的因素是商品价格,记商品供给量为 S,p 为商品的价格,则商品供给量 S 是价格 p 的函数,称其为供给函数,记作 $S=S(p)$.

一般地,商品供给量随商品价格的上涨而增加.因此,商品供给函数 S 是商品价格 p 的单调递增函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等.

需求函数与供给函数可以帮助我们分析市场规律,二者密切相关.若把需求曲线和供给曲线(供给函数的图象)画在同一坐标系中(如图 1-7),则由于需求函数 Q 是单调递减函数,供给函数 S 是单调递增函数,所以它们将相交于一点(p_0,Q_0).这里的 p_0 就是使供、需平衡的价格,叫做均衡价格,Q_0 就是均衡商品量.

在市场经济中,当某种商品的价格小于均衡价格时,反映在市场上就会出现 $Q>Q_0$,即出现“供不应求”的局面,这时将会导致该商品的价格上涨.当商品的价格大于均衡价格时,反映在市场上就会出现 $Q<Q_0$,即出现“供过于求”的局面,这时将会导致该商品的价格下跌.在纯粹的市场经济中,商品价格 p 的变动取决于市场的供需关系,它总是围绕着均衡价格 p_0 左右摆动,这就是所谓的供求律.

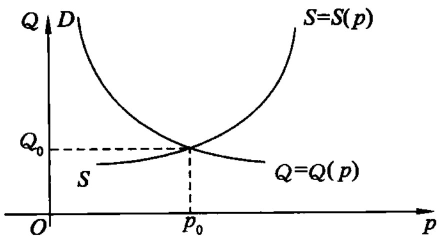

图 1-7

例 1 设需求函数 $Q=53-2p^2$,供给函数 $S=p-2$,求均衡价格和均衡商品量.

解:根据供需均衡的条件,则

$$p-2=53-2p^2,$$

解得 $p_1=-5.5$,$p_2=5$.

由于价格不取负值,故得均衡价格 $p=5$,均衡商品量 $Q=5-2=3$.

1.3.3 总成本函数

从事产品的生产需要有场地(厂房)、机器设备、劳动力、能源、原材料等投入,我们称之为生产成本.成本的投入大体可分为两大部分,其一是在短时间内不发生变化或变化很小或不明显地随产品数量增加而变化的,如厂房、设备等,称为固定成本,常用 C_1 表示;其二是随产品产量的变化而直接变化的部分,如原材料、能源等,称为可变成本,常用 C_2 表示,它是产品产量 q 的函数,即 $C_2=C_2(q)$.

生产 q 个单位某种产品时的可变成本 C_2 与固定成本 C_1 之和,称之为总成本函数,记作 C,即

$$C=C(q)=C_1+C_2(q).$$

一般情况下,总成本函数是一个单调递增函数.

只给出总成本不能说明企业生产的好坏,经济分析中,常用到平均成本这个概念,即