工科数学

JOURNAL OF MATHEMATICS FOR TECHNOLOGY

（供大学生参考）

第9卷

JMT

1993

专辑

（下）

前言

编写一套适应培养跨世纪工程技术人员需要的参考书是一项有意义的工作，为适应这种需要，我刊在广泛调查研究的基础，从1992年起增出以大学生为主要时象的大学生专辑，分上下两册，上册出版后，深受广大师生的欢迎，公认为是一本立意新颖，内容坚实、知识量大，富有启迪，确有指导意义的一本不可多得的好参考书.

这本专辑根据教学体系，分成若干知识块，与教学同步，每一知识块，以主要问题进行深入剖析，向纵深方面拓宽，力求达到既帮助读者正确掌握基本理论，又开拓读者的视野；每一知识块配以若干篇小品，这些小品或帮助读者释疑解难，开拓视野，或激励读者的兴趣，或介绍有关史话，力求融知识性，趣味性及历史性与一体；每一知识块都配有范例集锦，为适应不同水平读者的需要，分为基本题例，专门题例，对范例不是例题加解答，而是分析思路，总结规律，力求从数学方法论的角度提高读者解题和数学思维能力；为便于读者自我检测，各知识块均附有练习题和自我检测题，自我检测题分A、B、C三组，A组适合大专水平及课时少的专业读者；B组适合于普通高校本科生，C组适合数学基础好，有志报考研究生或参加数学竞赛的读者，为使读者了解国内外有关考试规律，特选登研究生入学试题及国外试题. 此外，结合有关内容、配插数学家肖像及名言，激励读者为振兴中华，刻苦学习的精神，寓教书育人与学习过程中.

本专辑下册，分多元微分学，多元积分学，概率论基础，复变函数论基础四块.

本专辑既可配合各类高校的低年学生同步学习参考，也可供报考研究生的高年级学生及青年教师提高时参考.

由于本刊人能力有限，特请蔡高厅、盛立刚、陈家鑫、韦金生、李海根、吴昌悫、富国栋同志为分栏主编，盛立刚同志为全书主编，负责改稿，统稿、定稿工作，卢树铭同志主审，参加本专辑编写的还有陈荣胜、陈锐深、方乃芸、李振宇、潘杰、王文初、范锦芳、周先启、杜家安等等同志，对他们的无私奉献精神，是值得敬佩的，对他们所作的无偿辛勤的劳动，我们表示衷心的感谢.

编写一套既保持期刊特点，又赋以参考书作用的刊物，是一种新的尝试，由于经验缺乏，水平有限，缺点和错误在所难免，敬请批评指正.

《工科数学》编辑部

1993. 4

目　录

多元函数微分学的几个基本问题

从一元函数到多元函数是一个从特殊到一般的过程．一元函数的许多概念和方法可以很自然地推广到多元函数，这种推广有着极大的理论意义和实际意义．但是特殊毕竟不能代替一般．我们既要注意到一元函数和多元函数的共性，又要注意到它们的差别，确切地说，一元函数的许多性质是多元函数所不具备的．

研究多元函数尤以二元函数最为简便、最为典型，从一元函数转到二元函数是要出现许多在原则上是新东西，这是必须牢固掌握的，但是从二元函数到三元以上的函数，是没有新的原则可谈，只不过多了些技术性的困难罢了．

此外，研究多元函数常常要考虑两种变化过程，一种是当诸自变量同时变化时函数的变化规律，另一种是分别考虑诸自变量单独变化而其他自变量保持相对不变时函数的变化规律，并且研究这两种变化之间的关系，显然后一种情况与一元函数是无差异的．

以上三点在学习多元函数时必须充分注意到，本文仅就多元函数微分学中的几个重要问题进行深入剖析、拓宽，但愿你开卷有益．

1　多元函数的概念

诸多高等数学教科书都是用与一元函数类似的方式定义多元函数，只是把定义域换成平面点集罢了．如果换一种方式，用现代数学的常用概念映射、集合来定义多元函数，则会更为简捷、直观、意义更广泛而现代化，其实集合、映射的概念，大家在中学都已经学过了．现在我们就依此定义多元函数．

设 D 为 n 维欧氏空间 R^n 中的点（矢量）集，V 为实数集 R 的子集，称从 D 到 V 的一个映射为 n 元函数，或称为数－矢函数，记作 $f:D\rightarrow V$. $D\subset R^n$，$V\subset R$，或 $Y=f(X)$，$X\in D\subset R^n$，$Y\in V\subset R$，这就是一般高等数学教材中所讲的多元函数，其中点 $X=(x_1\cdots,x_n)$ 称为自变量，Y 称为因变量．

若 V 为 m 维欧氏空间 R^m 中的点（矢量）集，则称从 D 到 V 的映射为矢－矢函数，或称为函数组，记作 $f:D\rightarrow V$，$D\subset R^n$，$V\subset R^m$，或 $Y=f(X)$，$X\in D\subset R^n$，$Y\in V\subset R^m$，其中 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，亦或记作 $y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n)$，$\cdots$，$y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n)$．

若 $D\subset R$，即 D 为数集，$V\subset R$，V 也为数集，则 $Y=f(X)$ 就是我们所熟悉的一元函数．

若 $D\subset R$，$V\subset R^m$，则从 D 到 Y 的映射称为矢－数函数．

可见，用集合、映射的概念完整、准确、简捷地定义了多元函数、多元函数组．这样的定义方式使各种函数概念达到了统一．

关于多元函数的定义域，可以说是多样而又复杂的，仅以二元函数为例，它的定义域可以是一个区域，可以是离散的点集，切不可误认为二元函数的定义域一定就是区域．不过，我们这里所讨论的二元函数其定义域大半是区域．

我们还要提及的是多元函数对称性的概念，先说说二元函数 $f(x,y)$，若它的定义域关于 y

轴是对称的，且有 $f(x,y)=f(-x,y)$，则称其为变量 x 的偶函数，如有 $f(x,y)=-f(-x,y)$，则称其为变量 x 为奇函数. 若 $f(x,y)$ 的定义域关于坐标原点是对称的，且有 $f(x,y)=f(-x,-y)$，则称其关于 x,y 为偶函数，如有 $f(x,y)=-f(-x,-y)$，则称其关于 x、y 为奇函数.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 关于直线 $L: ax+by+c=0$ 是对称的，且在对称点 (x,y)、$(\bar{x},\bar{y})$ 上有 $f(x,y)=f(\bar{x},\bar{y})$. 则称 $f(x,y)$ 关于直线 L 是偶函数，如 $f(x,y)=-f(\bar{x},\bar{y})$，则称 $f(x,y)$ 关于直线 L 是奇函数.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 关于点 (x_0,y_0) 是中心对称的，且在对称点 (x,y)、$\bar{x},\bar{y})$ 上有 $f(x,y)=f(\bar{x},\bar{y})$，则称 $f(x,y)$ 关于点 (x_0,y_0) 是偶函数，如 $f(x,y)=-f(\bar{x},\bar{y})$，则称 $f(x,y)$ 关于点 (x_0,y_0) 是奇函数.

以上这两种情况又常称为函数的广义对称性.

对于三元函数也有类似的对称性的概念，此外，还有关于任意两个变量的对称性，比如当函数 $f(x,y,z)$ 的定义域 D 关于 z 轴对称，且有 $f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$ 时，则称 $f(x,y,z)$ 关于变量 x、y 为偶函数，若 $f(x,y,z)=-f(-x,-y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 关于变量 x、y 为奇函数.

对称性是多元函数的特性，我们之所以在这里费些笔墨，是因为在多元函数的研究和计算中它常可使问题简化，具有对称性的函数，只要研究它的半边便知其整体，这是大家易于理解的，也是应该时刻注意的.

至于单调性和周期性，就多元函数来说常常是对某一变量（其他变量固定不变）而言，其实质还是一元函数的单调性和周期性.

多元函数的有界性与一元函数类似，也有整体有界和局部有界之说. 就二元函数 $f(x,y)$ 而言，若 D_0 为其定义域的非空子集，当存在常数 M，使得 $|f(x,y)|\leqslant M(x,y)\in D_0$ 成立，才称 $f(x,y)$ 在 D_0 上整体有界. 若在点 (x_0,y_0) 附近（不管多么近）函数 $f(x,y)$ 的定义域中，存在常数 M，使得 $|f(x,y)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点上局部有界. 值得注意的是函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点上可以有定义，也可以没有定义，但在 (x_0,y_0) 附近总有使 $f(x,y)$ 有定义的点.

有时也要论到多元函数对某个变量有界，意即在其他变量相对固定的情况下，作为该变量的一元函数有界. 如二元函数 $f(x,y)$ 对变量 x 有界（无论局部或整体），系指存在着与 x 无关的常数 $M(y)$，使 $|f(x,y)|\leqslant M(y)$，这时 x 在变，y 相对固定，对于不同的 y，界是不同的，所以我们要记成 $M(y)$，这是必须注意的. 假如在 y 的某个允许取值范围内，有一个共同的 M，换言之它不因 y 不同而异，亦或说对该范围内的 y 值，有一个最大的 M（严格地讲 $M(y)$ 有上确界）使 $|f(x,y)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x,y)$ 作为 x 的函数，对该范围内的 y，一致有界. 显然，有界未必一致有界.

例 1 设 $f(x,y)=x/y(0\leqslant x\leqslant 1,0<y\leqslant 1)$ 作为 x 的一元函数，它是有界的，总有 $|x/y|\leqslant 1/y$，$M(y)=\dfrac{1}{y}$. 但是对于 $y\in(0,1]$，$M(y)=1/y$ 却无最大值，所以该函数对 x 是有界的，但就 $y\in(0,1]$，又是非一致有界的. 然而对于 $y\in[\delta,1]$，该函数又是 x 的一致有界函数，只要取 $M=1/\delta$ 即可.

显然，如果一个多元函数是有界的，那末对于每个变量而言，它都是有界的，而且一致有界，反之，若一个多元函数，对于每个变量都有界，它末必有界.

例 2 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^4+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

这个函数在 (0, 0) 点附近，只要 $0<|x|<1, 0<|y|<1$,就有 $\left|\frac{xy}{x^4+y^2}\right| \leqslant \frac{|y|}{y^2}=\frac{1}{|y|}$, $\left|\frac{xy}{x^4+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{|x|^3}$,可见对 x,y 都是有界函数, $M_1(y)=\frac{1}{|y|}, M_2(x)=\frac{1}{|x|^3}$. 但是该二元函数在 (0,0) 点却是无界的，为证明这一点，只要在(0,0) 附近找到一个点列，使相应的函数值的绝对值无限增加即可. 比如取 $y=x^3$(抛物线) 上的点，则 $|f(x,x^2)|=\left|\frac{x^3}{x^4+x^4}\right|=\frac{1}{|x|}$,对于任意的 $M>0$,只要 $0<|x|<2\frac{1}{M}$,即有 $|f(x,x^2)|>M$.

2 多元函数的极限

多元函数的极限过程复杂，大体有两种类型. 一种是当所有变量同时趋于各自的确定值时函数的极限，这种极限称为全面极限，或重极限，有时就称为极限. 另一种是诸变量依一定次序相继趋于各自确定值时函数的极限，这种极限称为累次极限，如果是 n 元函数，又称为 n 次极限. 这是两种完全不同的极限概念.

为了建立多元函数极限的概念，必须引进 n 维欧氏空间 R^n 中点的邻域和点集的聚点的概念. 点的邻域有两种形式，一是球形邻域，对于点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 而言，所有满足不等式 $\sqrt{(x_1'-x_1)^2+\cdots+(x_n'-x_n)^2} \leqslant \delta(>0)$ 的点 $(x_1',\cdots,x_n')$,称为点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的 δ 有心邻域，所有满足不等式 $0<\sqrt{(x_1'-x_1)^2+\cdots+(x_n'-x_n)^2}<\delta(>0)$ 的点 $(x_1',\cdots,x_n')$,称为点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的 δ 去心邻域. 对于平面而言，就是圆形邻域，对于数轴而言，就是对称区间. 另一种是长方形领域，即满足不等式 $|x_i'-x_i|<\delta_i(i=1,2,\cdots,n,\delta_i>0)$ 的所有点 $(x_1',\cdots,x_n')$,称为点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的有心长方形领域，而满足不等式 $|x_i'-x_i|<\delta_i(i=1,\cdots,n,\delta_i>0)$ 且 $(x'_1,\cdots,x'_n)\neq(x_1,\cdots x_n)$ 的所有点 $(x_1',\cdots,x_n')$,称为点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的去心长方形领域. 不言而喻，当 $n=1$ 时，就是数轴上点的邻域(对称区间)，显然在球形邻域内总有长方形邻域，在长方形邻域内总有球形邻域，以 $n=2$ 为例(平面点集)，对球形邻域 $\sqrt{(x'-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$,取 $\delta_1=\delta_2\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\delta$,则长方形邻域 $|x-x_0|<\delta_1, |y-y_0|<\delta_2$ 位于其中，取 $\delta\leqslant\min(\delta_1,\delta_2)$ 则球形邻域 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 位于其中. 两种邻域的这种关系，十分重要，它表明在描述多元函数的极限过程时，用哪一种邻域都无妨. 就是说利用两种邻域来建立极限概念是等价的.

所谓点集的聚点，指的是在该点的任何一个邻域内都有异于该点的点集中的点，聚点可属于点集也可不属于点集.

多元函数的极限过程是仅就其定义域的聚点而言的. 非此谈不上极限.

与一元函数极限的定义方式类似，设 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$, $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 为其定义域的一个聚点，另有常数 A,若对 $\forall\varepsilon>0$,总 $\exists\delta(\varepsilon)>0$,使得对 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义且满足不等式 $0<\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta$ 的点 $(x_1,\cdots,x_n)$,不等式 $|f(x_1,\cdots,x_n)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 当点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 趋于点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 时以 A 为极限. 这就是 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的 n 重极限. 记为 $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ \cdots\cdots \\ x_n\to x_n^0}} f(x_1,\cdots,x_n)=A$ 或 $\lim\limits_{\rho\to 0} f(x_1,\cdots,x_n)=A$, 式中 $\rho=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}$

这里我们要特别强调的是 $(x_1,\cdots,x_n)$ 趋于 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 是以任何方式进行的. 形象地说，只要容许，它可以按所有可能途径趋于 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，可能是蹦蹦跳跳地也可能是连续地趋于 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，可见这一极限过程比一元函数极限仅限于在直线上变化的方式要复杂得多、此外，记法 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x_1,\cdots,x_n)=A$ 只不过是一元函数极限记号的一般化，但应注意到，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 并不是基本变量 ρ 的函数，这是因为，对于每个确定的 ρ，常有无穷多个点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与之对应，而一般说来，函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在这些点上会取到各不相同的值. 但无论如何，重极限描述了函数在一点附近函数的局部变化趋势，这种意义与一元函数极限是相同的.

由重极限的定义可知，判断其不存在，自然是取两种不同的自变量的变化方式，如有不同的极限，即说明其极限不存在，或者依某种确定方式变化时其极限不存在亦可.

例3 设 $f(x,y)=\dfrac{x-y+xy}{x+y}(x+y\neq 0)$，$(0,0)$ 为其定义域的一个聚点，考虑 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$，若取 $y=kx(k\neq -1)$，则 $f(x,kx)=\dfrac{x(1-k+kx)}{x(1+k)}$. 显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,kx)=\dfrac{1-k}{1+k}$，$k$ 值不同. 该极限各异，可见 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

对多元函数极限概念还应注意的是 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在定义域内趋于 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 而又达不到 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，这只要某个 $x_i\to x_i^0$ 而又 $x_i\neq x_i^0$ 即可，而并不要求对所有 i，都有 $x_i\neq x_i^0$.

类似于一元函数的极限，我们同样可以建立多元函数重极限存在的柯西准则.

设函数为 $f(x_1,\cdots,x_n)$，$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 为其定义域的一个聚点，则 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x_1,\cdots,x_n)$ 存在 $(\rho=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2})$ 的充要条件是，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，使得当 $0<\sqrt{(x_1'-x_1^0)^2+\cdots+(x_n'-x_n^0)^2}<\delta$，$0<\sqrt{(x_1''-x_1^0)^2+\cdots+(x_n''-x_n^0)^2}<\delta$ 时，恒有 $|f(x_1'',\cdots,x_n'')-f(x_1',\cdots,x_n')|<\varepsilon$.

最后，我们再次指出，重极限定义中的不等式 $0<\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta$，表示点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的一个去心 δ 邻域，它和不等式 $0<|x_i-x_i^0|<\delta(i=1,\cdots,n)$ 表示的点集不同，姑且不谈后者多余的点，仅就短缺的点，不仅是"心"，而且还去掉了超平面 $x_i=x_i^0(i=1,\cdots,n)$，上所有的点. 若用长方形邻域定义重极限，只能是 $|x_i-x_i^0|<\delta$，$(i=1,\cdots,n)$ 且 $(x_1,\cdots,x_n)\neq(x_1^0,\cdots,x_n^0)$).

类似于一元函数左右极限的概念，对于多元函数，我们也可以考虑沿某方向上的极限. 如对二元函数 $f(x,y)$，它在 (x_0,y_0) 点的某邻域内有意义，若一元函数的极限 $\lim\limits_{\rho\to +0}f(x_0+\rho\cos\theta,y_0+\rho\sin\theta)$ 存在，则称之为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 上沿方向 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的极限. 对三元函数也可同样定义其方向极限，那么方向极限与重极限关系如何？不难看出，若函数的重极限存在，则沿各方向的方向极限必然存在且相等，又都等于重极限. 但反之不然，即沿任何方向的方向极限存在且相等，而重极限并不一定存在，例如 $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}(x^2+y^2\neq 0$，在 $(0,0)$ 点沿方向 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的极限为

$$\lim_{\rho\to +0}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\lim_{\rho\to +0}\frac{\rho^4\sin^3\theta\cos\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^6\sin^6\theta}=0,$$

但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 却不存在，若取 $y=\sqrt[3]{x}$，则有

$\lim\limits_{x\to 0}f(x\sqrt[3]{x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$，显然它与沿各方向上的极限不等，故重极限在 $(0,0)$ 点不存

在.

进一步我们可以建立多元函数沿连续曲线趋于 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 时的极限,设 n 维欧氏空间的连续曲线 L 的参数方程为 $x_i=\varphi_i(t),(i=1,\cdots,n)$,且 $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi_i(t)=x_i^0(i=1,\cdots,n)$,若一元函数极限 $\lim\limits_{t\to t_0}f(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 存在,则称之为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处沿曲线 L 的极限. 不言而喻,从前面的道理可知,若重极限存在则沿任何连续曲线的极限皆存在且相等,并等于重极限.

多元函数另一种极限过程即累次极限. 以二元函数为例,设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\mid x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1),y\in(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)\}$ 上有意义,若对于任何异于 y_0 的 $y\in(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)$,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 都存在,该极限值自然是 y 的函数,记为 $\varphi(y)$,又若极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$ 也存在,显然可记,$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$,这种形式的极限称之为累次极限或者二次极限,同样地,若对于任何异于 x_0 的 $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$,极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 都存在,该极限为 x 的函数,记为 $\psi(x)$,又若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=B$ 存在,自然也称其为累次极限或二次极限. 一般而言,对于 n 元函数,可能有 $n!$ 个累次极限或 n 次极限存在.

我们所感兴趣的问题是,(1) 若一个累次极限存在,其他累次极限是否必存在?如真的累次极限都存在,它们是否相等呢?(2) 累次极限与重极限有何关系?

对于第一个问题,从累次极限的定义看来是未必的,例如函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$,累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 存在(其值为零),但累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 并不存在,因为 $\lim\limits_{y\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}(x\neq 0)$ 不存在. 又如函数 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$,两个累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}=1$,$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}=-1$ 都存在,但不相等. 可见诸累次极限没有都存在且相等的必然关系.

作为第二个问题,首先应注意到累次极限绝非是多元函数以特殊方式取的极限,因此重极限存在累次极限未必存在. 如上面的函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$,显然二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}$ 存在且为零,但我们已知累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}$ 并不存在. 我们再看函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,显然累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$,即二者存在且相等,但二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 却不存在,事实上,当取 $y=kx$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x,kx)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,可见此值因 k 而异,故二重极限不存在.

下面的定理则是建立了二重极限和二次极限的关系的核心定理

定理 若 (1) 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 存在或为无穷,(2) 对于任意异于 y_0 的 $y\in(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)$,单极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在,则二次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 必存在,且等于二重极限 A.

这个定理不难证明,现仅就 A,x_0,y_0 为有限时证之. 由假设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$,即对 $\forall\ \varepsilon>0$,必存在 $\delta'(\varepsilon)>0$,当 $|x-x_0|<\delta'$,$|y-y_0|<\delta'$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时,有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$,现

取 $\delta=\min(\delta_2,\delta')$，对任何异于 y_0 的 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$，当 $x\to x_0$ 时，对 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 式取极限，得 $|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$，即 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$. 证毕

在此定理的基础上，若再假设对于任意异于 x_0 的 $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$，单极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$ 存在，则两个二次极限都存在，且等于二重极限 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$.

这个定理回答了二次极限换序，即两个二次极限相等的问题，应注意的是二重极限存在既不是两个二次极限相等的充分条件，也不是必要条件，如前面的例子 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$，在点 $(0,0)$ 处就是这样，二重极限存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 却不存在，更谈不上两个二次极限相等.

累次极限交换顺序是多元函数微积分中的一个非常重要的问题，是值得认真思考和研究的精彩内容. 这样的问题我们在级数部分实际上已经遇到过，在考虑级数可否逐项求极限时，就要研究 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_i(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to x_0}f_i(x)$ 式何时成立？这正是二次极限交换顺序的问题. 以后 我们讨论多元函数微积分的许多问题，本质上都是这么个问题. 应该注意，只有附加一定条件，这种交换才有可能，不顾条件随意交换是不容许的，要强化这样的意识，你将受益匪线.

3 多元函数连续、可导和可微性的关系

从上面的讨论，我们知道，处理多元函数的极限问题必须谨慎. 多元函数连续性、可导性和可微性，都是某种极限过程，都刻划了多元函数在一点上的局部性质。

假设 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 以及它附近有定义，并记 $\rho=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}$，若 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，则称此 n 元函数在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 上连续. 如用无穷小表示，即 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1^0,\cdots,x_n^0)+o(\rho)\,(\rho\to 0)$. 这表明在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 附近，函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可用常数 $f(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 来近似. 就二元函数而言. 即在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 附近，可用平面 $z=f(x_0,y_0)$ 近似曲面 $z=f(x,y)$.

应注意，这里是用重极限定义连续性. 多元函数在一点连续，则它作为任一变元的一元函数，在该点必然连续. 进一步可知，n 元函数在一点连续，则它作为其任意 $k(\leqslant n+1)$ 个变元的 k 元函数，在该点也必连续. 但反之不然，比如说，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点，若一元函数 $f(x,y_0)$，$f(x_0,y)$ 分别在 x_0,y_0 处连续，但 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点并不一定连续.

例 4 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}0=0$，$\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}0=0$，可见在 $(0,0)$ 点，$f(x,y)$ 对两个变元都连续，但是极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$ 却不存在，事实上，当取 $y=kx$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,kx)=\dfrac{k}{1+k^2}$，该值因 k 而异，故二重极限不存在，岂能连续.

多元函数偏导数存在，称之为可导，这实质上是它作为诸变量的一元函数皆可导. 函数

$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n^0)$ 点上对 x_i^0 的偏导数，就是一元函数 $f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$ 关于 x_i 的导数，多元函数可导，显然狭义得多. 对一个变量偏导数存在，对另一个变量偏导数可能不存在，但可导的概念则是对每个变量的偏导数都应存在而言的.

多元函数可导概念如此之狭义，以致于可导未必连续，如例 4，该函数在 (0，0) 点不连续但却可导，事实上，$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}[f(\Delta x,0)-f(0,0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$，同样，$f_y'(0,0)=0$，故可导.

多元函数可导未必连续，这是多元函数与一元函数的根本差别之一.

反之，多元函数连续亦未必可导，这样的例子易举，如 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，在 $(0,1)$ 点显然是连续的，但却不存在对 x 的偏导数，由此说明. 多元函数可导既不是它连续的充分条件也不是必要条件.

再论可微性，既然偏导数是多元函数对某变量的导数，本质上是一元函数的导数，那么，我们就可以由此得到多元函数对该变量的微分，设 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 对变量 x_i 的偏导数存在，则对 x_i 必可微，$d_{x_i}f=f'_{x_i}(x_1^0,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n^0)dx_i$ 称为这个函数在 $(x_1^0,\cdots,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 点上对 x_i 的偏微分，这并不是什么新概念.

与一元函数类似，所谓函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 上可微，是存在只与函数及该点有关的 n 个常数 $A_1,\cdots,A_n$，当诸自变量皆有增量 $\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n$ 时，有 $\Delta f=f(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\cdots+A_n\Delta x_n+o(\rho)$，式中 $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\cdots+\Delta x_n^2}(\rho\to 0)$. $df=A_1\Delta x_1+\cdots+A_n\Delta x_n$ 为函数在该点的微分，又称全微分.

在可微的情况下，特别当 $\Delta x_1=\cdots=\Delta x_{i-1}=\Delta x_{i+1}=\cdots=\Delta x_n=0$，而 $\Delta x_i\neq 0$ 时，$\rho=|\Delta x_i|$，并有.

$$\lim_{\Delta_{x_i}\to 0}\frac{\Delta_{x_i}f}{\Delta x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_i}=A_i+\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{o(\Delta x_i)}{\Delta x_i}=A_i.$$

即 $f'x_i(x_1^0,\cdots,x_n^0)=A_i$，这表明可微必可导，且

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}f'_{xi}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\Delta x_i+o(\rho)(\rho\to 0)$$

或 $f(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)=f(x_1^0,\cdots,x_n^0)+\sum\limits_{i=1}^{n}d_{x_i}f+o(\rho)$，

$(\rho\to 0)$，而全微分为 $df=\sum\limits_{i=1}^{n}f'_{x_i}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}d_{x_i}f$.

由此可见，可微才有全微分，且全微分为诸偏微分之和.

可导时在形式上有 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_{x_i}f$，但未必有 $\Delta f=\sum\limits_{i=1}^{n}d_{x_i}f+o(\rho)$，$(\rho\to 0)$，如例 5 中的函数，在点 $(0,0)$ 处可导，$d_xf+d_yf=odx+ody=0$，但在该点函数不可微，事实上，$\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，当 $\rho\to 0$ 时，$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$，若取 $\Delta y=k\Delta x$，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\dfrac{k}{1+k^2}$，$k$ 不同极限不同，$\Delta f\neq d_xf+d_yf+o(\rho)=0+o(\rho)$，足见可导并不可微，更谈不上什么全微分.

魏尔斯特拉斯德（1815-1897）

魏尔斯特拉斯是将分析学置于严密的逻辑基础之上的一位大师，被后人誉为“现代分析之父”

由可微的定义可以看出，这时有 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f = 0$，即可微必连续.

可微又称函数存在主要线性部分，即有 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_{x_i} f$，且 $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} d_x f + o(\rho)(\rho\to\infty)$. 这表示函数 $y = f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0, f(x_1^0,\cdots,x_n^0))$ 点处的"超曲面"可用"超平面" $f(x_1^0,\cdots,x_n^0) + \sum\limits_{i=1}^{n} d_{x_i} f$ 近似，全微分就是这个主要线性部分 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_{x_i} f$.

学习多元函数微分的概念，常常只注意到 $df = \sum\limits_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0,\cdots,x_n^0)dx_i$，而忽视了它的前提条件，即 $\Delta f = df + o(\rho)$，该式才是微分概念的根本.

综上，对多元函数来说，与一元函数相同之处是可微必连续，不同之处是可微与可导的根本差别，可微必可导，然而可导未必可微，可导未必连续.

在可微的情况下，全微分等于诸偏微分之和.

下面的问题是，在可导的条件下尚须些什么附加条件，多元函数才可微呢？许多高等数学教材都讲到，只要偏导数连续，函数必可微，这确实是一个具有广泛意义的条件，我们要指出，它只是充分而非必要的条件. 其实，这是易于理解的，我们知道，一元函数可以看成是一个特殊的多元函数，它对其余任意多个变量是常数. 显然对其而言，可导必可微，无须附加偏导数连续的条件，这表明偏导数连续比可微要强！偏导数连续要求函数在所考虑的点附近都应该可导，可见我们研究函数在一点可微性涉及了在该点附近的可导性，而且只可导还不足以可微，进一步强化到导函数为多元连续函数. 可否减弱些？我们以二元函数为例讨论这个问题.

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域内有定义，考虑增量 $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ $= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

若在该邻域内两个偏导数都存在，则应用拉格所日中值定理，得

$$\Delta f = f'_x(\xi, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0,\eta)\Delta y$$

式中 ξ 与 Δy 有关，它介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间，η 介于 y_0 与 $y_0+\Delta y$ 之间，换言之，ξ 依于 $\Delta x,\Delta y$；η 只依于 Δy.

若 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，$f'_y(x_0,y)$ 为 y 的连续函数（一元连续），则有

$$\begin{aligned}\Delta f &= [f'_x(x_0,y_0)+\alpha_1]\Delta x + [f'_y(x_0,y_0)+\alpha_2]\Delta y,\\ &= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y.\end{aligned}$$

式中 α_1、α_2 满足关系式 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1 = 0$，$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\alpha_2 = 0$.

显然这时有

$$0 \leqslant \left|\frac{\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| \to 0 (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0)$$

可见 $\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y = o(\rho)$，从而证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，这样在 $f'_x(x,y)$ 连续，$f'_y(x,y)$ 作为 y 的一元函数连续时，函数便可微. 于是有定理，设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点某邻域内有连续的偏导数 $f'_x(x,y)$，又 $f'_y(x_0,y)$ 存在且连续，则该函数在 (x_0,y_0) 点可微.

进一步再降低条件，只要求 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在，而 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续的条件不变，则也可以证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，证明只须考虑到 $f'_y(x_0,y_0)$ 的定义，而不用拉格所日中值定理即可，事实上，由 $f'_y(x_0,y_0)$ 的存在，有

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_2\Delta y$$

式中 α_2 满足 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\alpha_2=0$，于是重复前面的证明，照例得出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微.

我们也可以提出这样的问题，若不要求偏导数连续，而附加以高阶导数存在，是否可以保障函数可微？

例 6 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^6+y^3} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

容易算出

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2(y^3-2x^6)}{(x^6+y^2)^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0);\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y(2x^6-y^2)}{(x^6+y^2)^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0).\end{cases}$$

达 布

法 (1842-1917)

达布对数学和物理的许多方面都很有建树，特别是在数学分析、微分几何、微分方程等领域有更大的贡献.

如取 $y=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f'_x(x,x^2)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'_y(x,x^2)=\infty$，故 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点极限不存在，当然它们也就不连续.

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,x^2)=\dfrac{1}{2}$，故 $f(x,y)$ 不连续，从而也不可微.

但是，该函数二阶偏导数却都存在，不难算出 $f''_{x^2}(0,0)=0$，$f''_{xy}(0,0)=0$，$f''_{yx}(0,0)=0$，$f''_{y^2}(0,0)=0$.

由此可见，即使二阶偏导数存在，甚至于混合偏导数还相等，函数都不可微. 多元函数可导的条件如此之弱，主要是它只对单变量而言的.

现回过头来再看看，偏导数具备怎样的条件多元函数才连续呢？

设二元函数 $f(x,y)$ 在长方形区域 $R=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta_1,|y-y_0|<\delta_2\}$ 上两个偏导数都存在，讨论增量 $\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)(|\Delta x|<\delta_1,|\Delta y|<\delta_2)$，改写成为

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

应用一元函数拉格朗日中值定理，可得

$$\Delta f=f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y+f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\Delta x$$

式中 θ_1,θ_2 介于 0，1 之间.

如改写 Δf，加减 $f(x_0,y_0+\Delta y)$ 项，则可得

$$\Delta f=f'_x(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta y+f'_y(x_0,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta y$$

θ_3,θ_4 介于 0，1 之间. 以上二式常称之为多元函数的中值定理.

由此可知，若在长方形区域 R 中，两个偏导数存在且有界，则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f=0$，即 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续.

5 方向导数和全导数

方向导数描述了多元函数沿确定方向上的变化率. 假设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 点以及过该点的"超射线"：$x_1=x_1^0+l_1t,\cdots,x_n=x_n^0+l_nt(0\leqslant t,l_1^2+\cdots+l_n^2=1)$ 上有定义，如果极限

$\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(x_1^0+l_1t,\cdots,x_n^0+l_nt)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{t}$存在，则称之为函数在 R^n 空间中沿 $\vec{l}=(l_1,\cdots,l_n)$ 方向上的方向导数，记为$\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

特别，当 $l_1=1,l_2=\cdots=l_n=0$ 时，它就是 R^n 中沿 x_1 正方向的方向导数. 当 $l_1=-1,l_2=\cdots=l_n=0$ 时，它就是沿 x_1 负方向的方向导数. 若二者为相反数，则前者便是函数关于 x_1 的偏导数. 对于其他变量亦然.

若极限$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_1^0+l_1t,\cdots,x_n^0+l_nt)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{t}$存在，则称之为函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 点沿直线 $l:x_1=x_1^0+l_1t,\cdots,x_n=x_n^0+l_nt(-\infty<t<\infty)$ 的全导数. 记为$\dfrac{df}{dt}$. 显然，全导数存在的充要条件是沿 l 两个相反方向的方向导数为相反数. 特别当 $l_1=1,l_2=\cdots=l_n=0$ 时，全导数即为关于 x_1 的偏导数. 对其它变量亦然.

一般而言，设 R^n 中的连续曲线 $x_1=\varphi_1(t),\cdots,x_n=\varphi_n(t),(\alpha<t<\beta)$ 且 $x_1^0=\varphi_1(t_0),\cdots,x_n^0=\varphi_n(t_0)$，若极限$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{t-t_0}$存在，则称之为函数沿该曲线的全导数，仍记作$\dfrac{df}{dt}$，它描述了函数沿该曲线的变化速度.

现在的问题是，方向导数、全导数与偏导数之间有何关系？

假设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点$(x_1,\cdots,x_n)$ 可微，由方向导数的定义，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_1^0+l_1t,\cdots,x_n^0+l_nt)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{t}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{f'_{x_1}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\Delta x_1+\cdots+f'_{x_n}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\Delta x_n+o(t)}{t}\end{aligned}$$

而 $\Delta x_1=l_1t,\cdots,\Delta x_n=l_nt$，故$\dfrac{\partial f}{\partial l}=f'_{x_1}l_1+\cdots+f'_{x_n}l_n$. 这就是在可微条件下，方向导数存在，且由偏导数给出的表示式. 如果引用梯度概念，命 $\mathrm{grad}f=(f'_{x_1},\cdots,f'_{x_n})$，则$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\vec{l}\cdot\mathrm{grad}f$. 可见$\dfrac{\partial f}{\partial l}$最大的方向，即函数 f 变化率最大的方向，是 $\vec{l}$ 与 $\mathrm{grad}f$ 同向，亦即 $\max\left(\dfrac{\partial f}{\partial l}\right)=|\mathrm{grad}f|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}$.

同样对全导数而言，假设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 上可微，$\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 t_0 处可导，则全导数为

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\varphi_1(t_0+\Delta t),\cdots,\varphi_n(t_0+\Delta t))-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f'_{x_1}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\Delta\varphi_1+\cdots+f'_{x_n}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\Delta\varphi_n+o(\Delta t)}{\Delta t}\\&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_n}{dt}\end{aligned}$$

仿上面的讨论，易知当$\sqrt{\left(\dfrac{d\varphi_1}{dt}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{d\varphi_n}{dt}\right)^2}$一定时，曲线的切向与 f 的梯度同向则全导数最大，即沿这样的曲线变化时，函数 f 增大最快.

依此而论，$\mathrm{grad}f$ 是函数 f 增大最快的方向，不言而喻，$-\mathrm{grad}f$ 就是函数 f 下降最快的方向，常称为最速下降方向，它在最优化计算上扮演重要的角色.

6　略论混合偏导数相等的条件

在一般情况下混合偏导数是不相等的，换言之，混合偏导数依赖于求导顺序，在过去很长的历史时期这个问题没有解决，甚至像欧拉、柯西等有名的数学家都曾误认为 $f''_{xy}=f''_{yx}$，但事实非然. 例如函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & (x^2+y^2\neq 0) \\ 0 & (x^2+y^2=0), \end{cases}$ 易于计算，$f''_{xy}(0,0)=1$，而 $f''_{yx}(0,0)=-1$. 因此 $f''_{xy}\neq f''_{yx}$.

现在我们仅就二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点来分析这个问题，由偏导数的定义，有

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$

$$\begin{aligned} f''_{yx}(x_0,y_0)&=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)}{k} \\ &=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right] \\ &=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{hk} \end{aligned}$$

如命 $\varphi(h,k)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)$，

则有，$f''_{yx}(x_0,y_0)=\lim\limits_{k\to 0}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}$，同理可得，$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}$.

显然，问题的实质是一个二次极限交换顺序的问题.

在现行的高等数学教材中都假定 f''_{xy}，f''_{yx} 为二元连续函数，从而证明了 $f''_{xy}=f''_{yx}$. 下而我们将条件稍放宽些，可以证明同样的结论.

定理　设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的某邻域内有连续的偏导数 f'_x，f'_y，若 f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 连续，则 $f''_{yx}(x_0,y_0)$ 必存在，且 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

证　将 $\varphi(h,k)$ 看作 x 的函数在 x_0 与 x_0+h 之间应用微分中值定理，得

$$\varphi(h,k)=[f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)]h,\ (0<\theta<1)$$

进一步，因 f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 处连续，则 f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 附近必存在，故对上式在 y 和 y_0+k 之间应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi(h,k)=f''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta_1 k)hk,\ (0<\theta_1<1)$$

再利用 f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 处连续，有

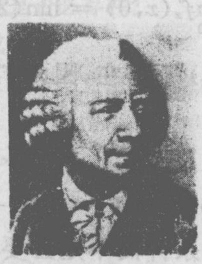
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\varphi(h,k)}{hk}=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}f''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta_1 k)=f''_{xy}(x_0,y_0)$$

即 $\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}$ 在 $(0,0)$ 点二重极限存在.

固定 $k\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{k}[f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)] \\ &=\frac{1}{k}[f'_x(x_0,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)]\end{aligned}$$

同样可知，固定 $h\neq 0$，有



欧　拉

瑞士 (1707-1783)

"如果是做出了给科学宝库增加财富的发现，而不能坦率阐述那些此导他做出发现的思想，那么他就没有给科学做出足够的工作。"

$$\lim_{k\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}=\frac{1}{h}[f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)]$$

这里利用了 f'_x, f'_y 的连续性，于是两个单极限都存在，故$\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}=\lim\limits_{k\to 0}\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}$，即二次极限可以换序，亦即 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$. **证毕**

一般而言，若 $f(x,y)$ 的所有 n 阶偏导数都连续，则 f 的 n 阶偏导数即为$\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(i=0,1,\cdots,n)$.

从这里我们看出，对于多元函数，累次极限交换顺序确是一个重要问题，应谨慎处之.

上面的定理其实还可以削弱条件，比如对 f'_x, f'_y 要求二元连续就没有必要，只须它们是 x、y 的一元连续函数即可.

f''_{xy} 连续是个重要条件，但它并不是混合偏导数相等的必要条件. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

容易计算 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0, f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0$，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f'_x=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, f'_y=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

于是 $f''_{xy}(0,0)=0, f''_{yx}(0,0)=0$，则 $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$.

但 $f''_{xy}=f''_{yx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^3}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 在$(0,0)$点并不连续. 事实上，如取 $y=x$，则$\lim\limits_{x\to 0}f''_{xy}(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{4x^2}{8x^6}\sin\frac{1}{2x^2}=-\infty$.

该例说明，混合偏导数连续只是它们相等的充分条件而非必要条件. 这个例子中的两个混合偏导数在$(0,0)$都不连续，但照样有 $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$.

从此例还可以看出，在$(0,0)$点 f'_x, f'_y 分别沿 x 轴和 y 轴的极限是不存在的，即当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'_x(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2})$ 不存在，当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}f'_y(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}(2y\sin\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\cos\frac{1}{y^2})$ 不存在，因此 f'_x, f'_y 在$(0,0)$点不连续，然而在$(0,0)$点有

$$\Delta f-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\rho)$$

$(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0)$，说明 $f(x,y)$ 在$(0,0)$可微，这又一次证明偏导数连续是函数可微的充分条件而不是必要条件.

由此启发我们，对于一个例子，能够从各个角度细心认真地分析，常可得到许多收获. 这也是学好数学、提高思维能力的好方法.

7 再谈多元函数的中值定理

前面我们在讨论偏导数有界则函数连续时，曾经提到过多元函数微分中值定理. 在那里仅假设在点 (x_0,y_0) 附近偏导数存在，而中值点对于 f'_x, f'_y 是不同的. 现在我们假设函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的某个邻域内可微，看情况如何？

在该邻域内另取一点$(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)$，它与点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 间的直线的方程为 $x_1=x_1^0$

$+t\Delta x,\cdots,x_n=x_n^0+t\Delta x_n(0\leqslant t\leqslant 1)$. 在这条直线上考察函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，令 $F(t)=f(x_1^0+t\Delta x_1,\cdots,x_n^0+t\Delta x_n)$，于是得到

$$F'(t)=f_x(x_1^0+t\Delta x_1,\cdots,x_n^0+t\Delta x_n)\Delta x_1+\cdots+f_{x_n}'(x_1^0+t\Delta x_1,\cdots,x_n^0+t\Delta x_n)\Delta x_n$$

在[0,1]上对 $F(t)$ 应用微分中值公式得 $F(1)-F(0)=F'(\theta)(0<\theta<1)$；回复到f，则得 $f(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)=f_x'(x_1^0+\theta\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\theta\Delta x_n)\Delta x_1+\cdots+f_{x_n}'(x_1^0+\theta\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\theta\Delta x_n)\Delta x_n(0<\theta<1)$

这就是多元函数的微分中值定理. 这里的所有偏导数都在 $(x_1^0+\theta\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\theta\Delta x_n)$ 点取值.

由此可知，若函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 D 中可微且偏导数处处为零，则函数在 D 中必为常数. 这是不难证明的，在 D 中任取两点，总可用 D 中的折线把它们连接起来. 按上面的方法并由偏导数为零的条件，立刻得到该折线相邻两上顶点的函数值相等，从而证明折线首尾两点函数值相等，即证明任意两点函数值相等，故函数在 D 中为常数.

应用微分中值定理的为种推导方法，我们可以得到它的推广，即泰勒公式. 这种方法将多元 函数问题转化成一元函数问题，是具有普遍意义的. 此外，在区域 D 中任意两点用属于 D 的折线将它们连接起来，这也是在处理多元函数问题和复变函数问题常用的方法，从根本方法获益是学好数学的关键.

思 考 题

1、由不等式组 $0<|x-x_0|<\delta_1, 0<|y-y_0|<\delta_2$ 所表示的点集是否是点 (x_0,y_0) 的邻域？

2、多元函数连续性、可导性和可微性有何关系？

3、若多元函数在一点上沿各方向上的方向导数都存在，问它在该点是否可微？是否可导？

4、“二元函数的二次极限是二重极限的两种特殊方式的极限”，这种说法对吗？

5、多元函数在一点连续，是否它必为每个变量的一元连续函数，为什么？

6、若高阶偏导数存在，函数是否必可微？

7、若二元函数 $f(x,y)$ 沿过 (x_0,y_0) 点的任意一条直线都有极限，问在该点二重极限是否必存在？

8、“二元函数在一点可微，则函数曲面过该点必有切平面”，这个命题反之是否成立？

（李振宇、盛立刚、王文初、李海根）

二元函数极限、连续、微分之间的关系与反例

多元函数连续、可导、可微是极其重要的概念，初学者常常将其与一元函数相应概念混淆. “多元函数微分学中的几个重要问题”一文已从理论上予以分析，为加深理解，本文以例题进一步揭示它们之间的关系.

①有定义，重极限不存在：

例 1 $y=f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0<y<x^2 \text{ 时}\\ 0 & \text{其它点}\end{cases}$

当沿 $0 < y = kx \to (0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,kx) = 0$；

当沿 $y = \frac{1}{2}x^2 \to (0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{1}{2}x^2\to 0}} f(x, \frac{1}{2}x^2) = 1$. $\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

②无定义，重极限存在.

例 2 $y = f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$. 虽在 $(0,0)$ 点函数没有意义. 但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

以上二例说明只在函数定义域的聚点上才考虑重极限，函数在该点可有定义，也可无定义.

③累次极限存在，重极限不存在

例 3 $y = f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

$\because \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$；$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$. 而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$.

k 为实数，显然，上式结果随 k 而异. $\therefore$ 二重极限不存在.

④重极限存在，累次极限不存在

例 4 $y = f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & (xy \neq 0) \\ 0 & (\text{当 } xy = 0) \end{cases}$

$\therefore$ 当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时，$0 < |f(x,y)| \leqslant |x\sin\frac{1}{y}| + |y\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x| + |y|$.

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[|x|+|y|] = 0$，$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. 故重极限存在. 但，当 $y \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) =$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在. $\therefore \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 也不存在. 同理，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. 故累次极限不存在.

这两个例子说明重极限和累次极限是两种不同的极限过程.

⑤重极限存在而不连续

例 5 $y = f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x^2+y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2+y^2 = 0) \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 1$，重极限存在. 但 $f(0,0) = 0$，故函数在 $(0,0)$ 点不连续.

⑥重极限存在，但不可导

例 6 $y = f(x,y) = |y|$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$，重极限存在. 但

$\lim\limits_{\Delta y\to 0-} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0-} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = -1$，$\lim\limits_{\Delta y\to 0+} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0+} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = +1$.

此二例的情形与一元函数相同. 故 $f_x(0,0)$ 不存在. 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可导.

⑦可导，但重极限不存在

例 7 $y = f(x,y) = \begin{cases} 1 & (xy \neq 0) \\ 0 & (xy = 0) \end{cases}$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$，同理 $f_y(0,0) = 0$，$\therefore$ 在 $(0,0)$ 点可导.