

高等学校教材

# 有限元基础教程

曾攀 编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



## 内容简介

全书包括两大部分,共分9章。第1部分为有限元分析基本原理,包括第1~5章,内容有:绪论、有限元分析过程的概要、杆梁结构分析的有限元方法、连续体结构分析的有限元方法、有限元分析中的若干问题讨论;第2部分为有限元分析的典型应用领域,包括第6~9章,内容有:静力结构的有限元分析、结构振动的有限元分析、传热过程的有限元分析、弹塑性材料的有限元分析。本书以基本变量、基本方程、求解原理、单元构建、典型例题、MATLAB程序及算例、ANSYS算例等一系列规范性方式来描述有限元分析的力学原理、程序编制以及实例应用;给出的典型实例都提供了完整的数学推演过程以及ANSYS实现过程。本书的基本理论阐述简明扼要,重点突出,实例丰富,书中的两部分内容相互衔接,也可独立使用。适合于大学高年级学生作为课程教材,也适合于不同程度的读者进行自学;对于希望在MATLAB程序以及ANSYS平台进行建模分析的读者,本书更具备参考价值。本书就有限元分析中基本单元的MATLAB程序、ANSYS算例的编程提供有配书光盘(CD-ROM),以方便读者使用。

本书的读者对象为机械、力学、土木、水利、航空航天等专业的高年级本科生、工程技术人员、科研工作者。

### 图书在版编目(CIP)数据

有限元基础教程/曾攀编著. —北京:高等教育出版社, 2009.7

ISBN 978-7-04-025841-7

I. 有… II. 曾… III. 有限元分析—高等学校—教材 IV. O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第067934号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landrace.com">http://www.landrace.com</a>
印 刷	北京市联华印刷厂		<a href="http://www.landrace.com.cn">http://www.landrace.com.cn</a>
开 本	787×960 1/16	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
印 张	24.5	版 次	2009年7月第1版
字 数	460 000	印 次	2009年7月第1次印刷
		定 价	39.30元(含光盘)

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 25841-00

# 前 言

---

有限元分析已经在教学、科研以及工程应用中成为重要而又普及的数值分析方法和工具。本基础教程力求提供具备现代特色的实用教程。在教材的内容体系上,综合考虑有限元方法的力学分析原理、建模技巧、应用领域、软件平台、实例分析等方面,按照教科书的方式深入浅出地叙述有限元方法,并体现出有限元原理“在使用中学习,在学习中使用”的交互式特点。在介绍每一种单元的同时,提供完整的典型推导实例、MATLAB 实际编程以及 ANSYS 应用数值算例,并且给出的各种类型的算例都具有较好的前后对应性,使学生在分析原理的同时,也进行实际编程和有限元分析软件的操作,经历实例建模、求解、分析和结果评判的全过程,在实践的基础上深刻理解和掌握有限元分析方法。

一本基础教材应该在培养学生掌握坚实的基础理论、系统的专业知识方面发挥作用,因此,教材不但要提供系统的、具有一定深度的基础理论,还要介绍相关的应用领域,以给学生进一步学习提供扩展空间。本教程正是按照这一思路进行设计的。全书的内容包括两个部分,共分 9 章。第 1 部分为有限元分析基本原理,包括第 1~5 章,内容有绪论、有限元分析过程的概要、杆梁结构分析的有限元方法、连续体结构分析的有限元方法、有限元分析中的若干问题讨论;第 2 部分为有限元分析的典型应用领域,包括第 6~9 章,内容有静力结构的有限元分析、结构振动的有限元分析、传热过程的有限元分析、弹塑性材料的有限元分析。在基本原理方面,以基本变量、基本方程、求解原理、单元构建等一系列规范的方式进行介绍;在阐述有限元分析与应用方面,采用典型例题、MATLAB 程序及算例、ANSYS 算例的方式,以体现出分析建模的不同阶段和层次,引导学生领会有限元方法的实质,还提供有大量的练习题。

本教程的重点是强调有限元方法的实质理解和融会贯通,力求精而透,强调学生综合能力(掌握和应用有限元方法)的培养,为学生亲自参与建模以及使用先进的有限元软件平台提供较好的素材。同时,给学生进一步学习提供新的空间。

本教程力求体现以下特点。

(1) 教学适应性：强调对学生在数学原理、分析建模和软件应用几个方面的培养目标要求，注重学生在工程数值方面的基础训练，培养学生“使用先进软件+分析实际问题”的初步能力。

(2) 认知规律性：力求按照有限元分析方法的的教学规律和认知规律，在教材中设计了“基本变量、基本方程、求解原理、单元构建”这样的模块，并体现出有限元原理“在使用中学习，在学习中使用”的交互式特点，在介绍每一种单元的同时，提供实用的 MATLAB 实际编程和数值实例；在每一章还进行要点总结，给出典型例题，以引导学生领会有限元方法的实质，体现教材的启发性，有利于激发学生的学习兴趣和便于自学。

(3) 结构完整性：本教程提供完整的教材结构，包括绪论、正文、典型例题、基于 MATLAB 的编程算例与数值算例、具有一定深度的 ANSYS 算例、各章要点、习题、专业术语的英文标注、关键词中文和英文索引、参考文献以及 5 个附录便于学生查阅。

(4) 内容拓展性：除基本内容外，还介绍了较广泛的应用领域，包括静力结构分析、结构振动分析、传热过程分析、弹塑性材料分析；提供了有关的典型问题的建模详细分析过程，基本上反映了有限元分析在一些主要领域的应用状况及建模方法。

(5) 编排逻辑性：本教程力求做到具有分明的层次和清楚的条理，在每一章中重点突出有限元方法的思想、数理逻辑及建模过程，强调相应的工程概念，提供典型例题及详解，许多例题可作为读者进行编程校验的标准考题 (benchmark)，还提供了对应的 MATLAB 编程算例与 ANSYS 算例，特别是介绍了基于 APDL 参数化的 ANSYS 建模方法，并给出具体的实例，力求反映有限元分析的内在联系及其特有的思维方式。

本教程的第 1 部分为有限元分析基本原理，可作为高年级本科生或初学者的入门教材，约需 32~40 学时；第 2 部分为有限元分析的典型应用领域，可作为中级水平读者的教材，也可作为高年级本科生的扩展内容，约需 16~20 学时。

清华大学航天航空学院的陆明万教授对本书进行了详细的审定，并提出了许多建设性的意见，在此表示衷心的感谢。清华大学机械工程系的方刚副教授、雷丽萍副教授以及博士研究生卢永进、赵加清、何文斌、杜泓飞，硕士生吴玥明、黄少锋、刘清俊、郇宜伟、姚波、高蔚然、梅乐、刘倩在本书的编写过程中对各个例题进行了校审和修改。作者还特别感谢张慧玲女士、高等教育出版社的杨倩编辑对本书的重要贡献。

由于作者的水平有限，所写的教程一定会出现不少错误，敬请读者提出批评。

作者

2009 年 1 月于清华园

## 作者简介

---

曾攀，男，1963年生，海南省海口市人；1988年在清华大学获博士学位，1988—1992年先后在大连理工大学和西南交通大学从事两站博士后研究(领域为计算力学)，为国家杰出青年科学基金获得者(1998)、长江学者(2000)、德国“洪堡”学者(1994—1995)、“新世纪百千万人才工程”国家级人选。现为清华大学机械工程系主任、教授、博士生导师，为《机械工程学报》、《工程力学》、《塑性工程学报》等5个学术期刊的编委，为上海交通大学振动冲击噪声国家重点实验室、华中科技大学塑性成形模拟与模具国家重点实验室学术委员会委员。先后主持包括国家级重点基金项目、863项目、霍英东基金项目等科研项目30多个，获教委科技进步二等奖、机械部一等奖、北京市高等教育教学成果二等奖各一项，获国家发明专利授权两项；已出版及翻译的学术著作有：《材料的概率疲劳损伤力学及现代结构分析原理》(曾攀,1993)、《有限元分析及应用》(曾攀,2004)、《工程中的有限元方法》(T. R. Chandrupatla, 曾攀译,2006)、《有限元方法第1卷:基本原理》(O. C. Zienkiewicz, 曾攀译,2008)，发表论文100多篇。主要从事计算力学、结构设计与分析、材料加工中的数值模拟等方面的研究。

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010)58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010)82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100120

**购书请拨打电话：**(010)58581118

策划编辑	杨 倩
责任编辑	杨 倩
封面设计	王 雱
版式设计	陆瑞红
责任校对	殷 然
责任印制	毛斯璐

# 目 录

---

第 1 部分	有限元分析基本原理 .....	1
第 1 章	绪论 .....	3
	1.1 概况 .....	3
	1.2 有限元方法的历史 .....	3
	1.3 有限元分析的作用 .....	9
第 2 章	有限元分析过程的概要 .....	12
	2.1 有限元分析的目的和概念 .....	12
	2.2 一维阶梯杆结构问题的求解 .....	15
	2.3 有限元分析的基本流程 .....	22
	2.4 有限元分析的特点 .....	26
	2.5 本章要点 .....	28
第 3 章	杆梁结构分析的有限元方法 .....	29
	3.1 杆梁结构分析的工程概念 .....	29
	3.2 杆件有限元分析的标准化表征与算例 .....	30
	3.2.1 杆件分析的基本力学原理 .....	30
	3.2.2 局部坐标系中的杆单元描述 .....	35
	3.2.3 杆单元的坐标变换 .....	38
	3.2.4 杆单元分析的 MATLAB 程序 .....	41
	3.2.5 杆结构分析的算例 .....	44
	3.3 梁件有限元分析的标准化表征与算例 .....	54
	3.3.1 梁件分析的基本力学原理 .....	54
	3.3.2 局部坐标系中的平面梁单元 .....	60



3.3.3	平面梁单元的坐标变换	68
3.3.4	空间梁单元及坐标变换	69
3.3.5	梁单元的常用等效节点载荷	72
3.3.6	梁单元分析的 MATLAB 程序	73
3.3.7	梁结构分析的算例	76
3.4	应用: 桥梁结构的 ANSYS 参数化分析	83
3.4.1	桥梁结构描述	83
3.4.2	基于 ANSYS 的桁架桥梁结构分析	85
3.5	本章要点	91
3.6	习题	91
第 4 章	连续体结构分析的有限元方法	96
4.1	连续体结构分析的工程概念	96
4.2	连续体结构分析的基本力学原理	97
4.3	平面问题有限元分析的标准化表征	104
4.3.1	平面问题的 3 节点三角形单元描述	104
4.3.2	平面问题的 4 节点矩形单元描述	110
4.3.3	平面问题 3 节点三角形单元的 MATLAB 程序	123
4.3.4	平面问题 4 节点矩形单元的 MATLAB 程序	125
4.4	轴对称问题有限元分析的标准化表征	128
4.4.1	轴对称问题的基本变量及方程	128
4.4.2	3 节点三角形轴对称单元(环形单元)	130
4.4.3	4 节点矩形轴对称单元(环形单元)	133
4.5	空间问题有限元分析的标准化表征	134
4.5.1	空间问题的 4 节点四面体单元描述	134
4.5.2	空间问题的 8 节点正六面体单元描述	137
4.5.3	空间问题 4 节点四面体单元的 MATLAB 程序	139
4.5.4	空间问题 8 节点正六面体单元的 MATLAB 程序	142
4.6	形状映射参数单元的一般原理和数值积分	147
4.6.1	两个坐标系之间的三个方面的变换	147
4.6.2	参数单元的三种类型	151
4.6.3	参数单元刚度矩阵计算的数值积分	152
4.7	平面问题分析的算例	158
4.7.1	平面 3 节点三角形单元分析的算例	158
4.7.2	平面 4 节点四边形单元分析的算例	166

	4.8 空间问题分析的算例 .....	171
	4.8.1 空间 4 节点四面体单元分析的算例 .....	171
	4.8.2 空间 8 节点六面体单元分析的算例 .....	178
	4.9 本章要点 .....	183
	4.10 习题 .....	183
<b>第 5 章</b>	<b>有限元分析中的若干问题讨论 .....</b>	<b>187</b>
	5.1 单元的节点编号与总刚度阵的存储带宽 .....	187
	5.2 单元形状函数与刚度矩阵系数的性质 .....	188
	5.2.1 形状函数的性质 .....	189
	5.2.2 刚度矩阵系数的性质 .....	190
	5.3 边界条件的处理与支反力的计算 .....	195
	5.4 单元位移函数构造与收敛性要求 .....	207
	5.4.1 选择单元位移函数的一般原则 .....	207
	5.4.2 关于收敛性问题 .....	209
	5.4.3 位移函数构造的收敛性准则 .....	210
	5.5 $C_0$ 型单元与 $C_1$ 型单元 .....	212
	5.6 有限元分析结果的性质与节点应力的平均处理 .....	213
	5.6.1 有限元分析结果的下限性质 .....	213
	5.6.2 共用节点上应力的平均处理 .....	216
	5.7 高阶单元的构建 .....	216
	5.7.1 一维高阶单元 .....	217
	5.7.2 二维高阶单元 .....	219
	5.7.3 三维高阶单元 .....	222
	5.8 提高计算精度的 h 方法和 p 方法 .....	224
	5.9 本章要点 .....	226
	5.10 习题 .....	226
<b>第 2 部分</b>	<b>有限元分析的典型应用领域 .....</b>	<b>229</b>
<b>第 6 章</b>	<b>静力结构的有限元分析 .....</b>	<b>231</b>
	6.1 连续体平面问题的 MATLAB 有限元分析程序 .....	231
	6.1.1 程序原理 .....	232
	6.1.2 完整的 MATLAB 程序源代码 .....	235
	6.2 受均匀载荷方形板的有限元分析 .....	241
	6.3 自主程序开发与 ANSYS 前后处理器的衔接 .....	248

	6.4 工程应用：预应力万吨液压机机架的参数化建模与分析 .....	256
	6.4.1 模锻液压机的描述 .....	256
	6.4.2 8万t模锻液压机主牌坊的简化模型的有限元分析 .....	258
	6.5 习题 .....	264
第7章	结构振动的有限元分析 .....	266
	7.1 结构振动分析的基本原理 .....	266
	7.1.1 结构振动分析的基本方程 .....	266
	7.1.2 结构振动的有限元分析列式 .....	268
	7.1.3 常用单元的质量矩阵 .....	270
	7.2 汽车悬挂系统的振动模态分析 .....	273
	7.3 带有张拉的绳索的振动模态分析 .....	278
	7.4 机翼模型的振动模态分析 .....	283
	7.5 习题 .....	287
第8章	传热过程的有限元分析 .....	290
	8.1 传热过程分析的基本原理 .....	290
	8.1.1 传热过程的基本方程 .....	290
	8.1.2 稳态传热过程的有限元分析列式 .....	292
	8.1.3 热应力问题的有限元分析列式 .....	294
	8.2 平面矩形板的稳态温度场分析 .....	296
	8.3 金属材料凝固过程的瞬态传热分析 .....	300
	8.4 温度变化下的结构热应力分析 .....	307
	8.5 习题 .....	311
第9章	弹塑性材料的有限元分析 .....	314
	9.1 弹塑性材料分析的基本原理 .....	314
	9.1.1 弹塑性材料的物理方程 .....	314
	9.1.2 基于全量理论的有限元分析列式 .....	317
	9.1.3 基于增量理论的有限元分析列式 .....	318
	9.1.4 非线性方程求解的 Newton - Raphson(N - R) 迭代法 .....	318
	9.2 三杆结构塑性卸载后的残余应力分析 .....	320
	9.3 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性分析 .....	325
	9.4 习题 .....	331

---

各章典型例题、求解原理、MATLAB 算例、ANSYS 算例目录 .....	333
参考文献 .....	338
附录 A MATLAB 程序的基本操作 .....	341
附录 B ANSYS 程序的基本操作 .....	355
附录 C 常用材料的力学性能 .....	363
附录 D 常用材料的热力学参数 .....	365
附录 E 英制单位和米制单位的换算表 .....	366
中文名词索引 .....	368
英文名词索引 .....	373
单元及编程索引 .....	378

## 第 1 部分

# 有限元分析基本原理

- |   |       |               |       |
|---|-------|---------------|-------|
| ■ | 第 1 章 | 绪论            | [3]   |
| ■ | 第 2 章 | 有限元分析过程的概要    | [12]  |
| ■ | 第 3 章 | 杆梁结构分析的有限元方法  | [29]  |
| ■ | 第 4 章 | 连续体结构分析的有限元方法 | [96]  |
| ■ | 第 5 章 | 有限元分析中的若干问题讨论 | [187] |



# 第 1 章

## 绪 论

---

### 1.1 概况

---

有限元方法(finite element method)或有限元分析(finite element analysis)<sup>[1,2]</sup>是求取复杂微分方程近似解的一种非常有效的工具,是现代数字化科技的一种重要基础性原理。将它应用于科学研究中,可成为探究物质客观规律的先进手段;将它应用于工程技术中,可成为工程设计和分析的可靠工具。严格来说,有限元分析必须包含3个方面:①有限元方法的基本数学力学原理;②基于原理所形成的实用软件;③使用时的计算机硬件。随着现代计算机技术的发展,一般的个人计算机就能满足第③方面的要求,因此,本书的重点将在以上的第①和第②方面,将通过一些典型的实例来深入浅出地系统阐述有限元分析的基本原理,并强调原理的工程背景和物理概念;基于MATLAB平台来系统演示基于有限元原理的编程方法和过程;通过ANSYS分析平台来展示具体应用有限元方法的建模过程。

### 1.2 有限元方法的历史

---

有限元方法的思想最早可以追溯到古人的“化整为零”、“化圆为直”的作法,如“曹冲称象”的典故,我国古代数学家刘徽采用割圆法来对圆周长进行

计算等，这些实际上都体现了离散逼近的思想，即采用大量的简单小物体来“冲填”出复杂的大物体。

早在 1870 年，英国科学家 Rayleigh 就采用假想的“试函数”来求解复杂的微分方程，1909 年 Ritz 将其发展成为完善的数值近似方法，为现代有限元方法打下坚实基础。

20 世纪 40 年代，由于航空事业的飞速发展，设计师需要对飞机结构进行精确的设计和计算，便逐渐在工程中产生了矩阵力学分析方法。1943 年，Courant 发表了第一篇使用三角形区域的多项式函数来求解扭转问题的论文<sup>[3]</sup>；1956 年，波音公司的 Turner, Clough, Martin 和 Topp 在分析飞机结构时系统研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式<sup>[4]</sup>；1960 年，Clough 在处理平面弹性问题时，第一次提出并使用“有限元方法”（finite element method）的名称<sup>[5,6]</sup>；1955 年，德国的 Argyris 出版了第一本关于结构分析中的能量原理和矩阵方法的书<sup>[7]</sup>，为后续的有限元研究奠定了重要的基础；1967 年，Zienkiewicz 和 Cheung 出版了第一本有关有限元分析的专著；1970 年以后，有限元方法开始应用于处理非线性和大变形问题。我国的一些学者也在有限元领域做出了重要的贡献，如胡海昌于 1954 年提出了广义变分原理<sup>[8]</sup>；钱伟长最先研究了拉格朗日乘子法与广义变分原理之间的关系<sup>[9]</sup>；钱令希在 20 世纪 50 年代就研究了力学分析的余能原理；冯康在 20 世纪 60 年代就独立地先于西方奠定了有限元分析收敛性的理论基础。图 1-1 展示了有限元方法的发展过程。<sup>[19]</sup>

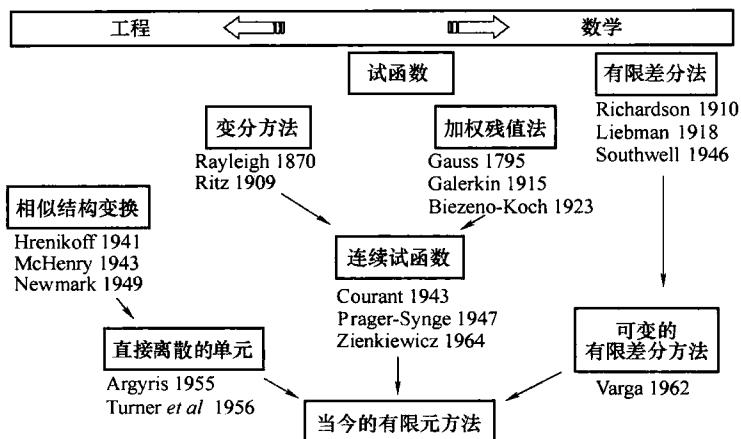


图 1-1 有限元方法的发展过程

随着计算机技术的飞速发展，基于有限元方法原理的软件大量出现，并在实际工程中发挥了愈来愈重要的作用。目前，专业的著名有限元分析软件公司有几十家，国际上著名的通用有限元分析软件有 ANSYS, ABAQUS, MSC/NAS-



TRAN, MSC/MARC, ADINA, ALGOR, PRO/MECHANICA, IDEAS, 还有一些专门的有限元分析软件, 如 LS-DYNA, DEFORM, PAM-STAMP, AUTOFORM, SUPER-FORGE 等。国际上著名的主要有限元分析软件状况见表 1-1。有关有限元分析的学术论文, 每年也不计其数, 学术活动非常活跃, 表 1-2 列出的是刊登有限元分析论文的常见学术期刊。

表 1-1 国际上著名的有限元分析软件状况

年份	软件名称	开发者	网址
1965	ASKA(PERMAS)	IKOSS GmbH, (INTES), Germany	www.intes.de
	STRUDL	MCAUTO, USA	www.gtstrudl.gatech.edu
1966	NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp., USA	www.macsch.com
1967	BERSAFE	CEGB, UK(restructured in 1990)	
	SAMCEF	Univer. of Liege, Belgium	www.samcef.com
1969	ASAS	Atkins Res. & Devel., UK	www.wsasoft.com
	MARC	MARC Anal. Corp., USA	www.marc.com
	PAFEC	PAFEC Ltd, UK 现换名为 SER Systems	
	SESAM	DNV, Norway	www.dnv.no
1970	ANSYS	Swanson Anal. Syst., USA	www.ansys.com
	SAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.eerc.berkeley.edu/software_and_data
1971	STARDYNE	Mech. Res. Inc., USA	www.reiusa.com
	TITUS(SYSTUS)	CITRA, France; ESI Group	www.systus.com
1972	DIANA	TNO, The Netherlands	www.diana.nl
	WECAN	Westinghouse R&D, USA	
1973	GIFTS	CASA/GIFTS Inc., USA	
1975	ADINA	ADINA R&D, Inc., USA	www.adina.com
	CASTEM	CEA, France	www.castem.org; 8001/HomePage.html
	FEAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.eerc.berkeley.edu/software_and_data